

ASTRONOMIE

PAR

JÉRÔME LE FRANÇAIS (LA LANDE).



ASTRONOMIE

PAR

JÉRÔME LE FRANÇAIS (LA LANDE),

De l'Académie des sciences de Paris; de celles de Londres, de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Bologne, etc.; Inspecteur du College royal, et Directeur de l'Observatoire de l'École royale militaire.

TROISIEME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME SECOND.





A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin Saint-Jacques.

DE L'IMPRIMERIE DE P. DIDOT L'AINÉ.

M. DCC. XCII.

ASTRONOMIE.

LIVRE SIXIEME.

Loix du mouvement des sept planetes principales autour du Soleil, avec leurs Élémens. (a)

Puisque les planetes tournent autour du Soleil, de même que la Terre (1107); c'est au centre du Soleil qu'on doit supposer un observateur pour lui faire voir les mouvemens les plus uniformes, et lui en faire connoître les circonstances et les mesures. C'est pour cela que la Caille, en commençant ses leçons d'astronomie, suppose d'abord que son observateur soit placé au centre du Soleil, pour déterminer les loix des mouvemens planétaires. Mais j'ai mieux aimé considérer l'astronomie dans ses premiers principes, suivre les progrès lents et successifs de ceux qui l'ont formée, ou perfectionnée, et ne parler des planetes vues du Soleil qu'après avoir montré que c'est autour de lui qu'elles tournent.

1201. Pour déterminer les mouvemens vus du Soleil, il falloit un moyen d'avoir la longitude d'une planete, telle qu'on l'observeroit du Soleil; c'est ce qu'on a trouvé dans les *oppositions* des planetes supérieures, Mars, Jupiter et Saturne, et dans les *conjonctions inférieures* de Vénus et de Mercure (1152). En effet, quand une planete est opposée au Soleil, le lieu de l'écliptique où elle répond, est sur une même ligne droite avec le Soleil et la Terre; ainsi le lieu de la planete vu du Soleil, ou le lieu vu de la Terre, est absolument le même : si la Terre est en N (fig. 56), et la planete en A opposée au Soleil S, le point du ciel où aboutit

(a) On appelle *Elémens* d'une planete, les trois articles principaux qui déterminent la situation et la figure de l'orbite : sa longitude, celle de son aphélie, et son excentricité. On renferme aussi quelquefois sous ce nom la révolution de la planete ou son mouvement, la longitude du nœud, l'inclinaison, les mouvemens de l'aphélie et du nœud ; et dans ce sens, il y a huit élémens d'une planete.

la ligne SNA, marque le lieu héliocentrique (1139) aussi bien que le lieu géocentrique de la planete A.

Aussi les astronomes ont-ils soin d'observer assidument les oppositions des planetes, comme les circonstances les plus essentielles de leurs mouvemens; parcequ'alors l'observation faite sur la Terre tient lieu d'une observation faite dans le Soleil, et sert à reconnoître l'orbite que la planete décrit autour du Soleil. C'est avec des longitudes héliocentriques ou vues du Soleil que nous avons déterminé les moyens mouvemens des planetes (1153), et que nous allons déterminer encore les orbites planétaires, les circonstances et les inégalités de leurs mouvemens. On trouvera dans le XXIVe livre la maniere d'observer et de calculer l'instant d'une opposition (4150); et nous rapporterons à la fin de ce VIe livre les oppositions ou les conjonctions observées jusqu'ici comme étant les observations les plus propres à déterminer les élémens des orbites planétaires.

Le moyen mouvement est le plus essentiel de tous les élémens d'une planete; nous en avons déja donné le détail (1161); il nous reste à parler de la figure des orbites, des excentricités, des distances, des aphélies, des nœuds, des inclinaisons et des diametres de chacune des sept planetes principales.

DE LA FIGURE DES ORBITES PLANÉTAIRES.

1202. Après avoir trouvé combien de temps les planetes emploient à terminer leurs révolutions autour du Soleil, il faut rechercher les circonstances de leur mouvement dans les différentes parties de chaque révolution, ou ces inégalités périodiques dont il a déja été question pour le Soleil (867), et qui dépendent de la figure des orbites planétaires.

Le mouvement de chaque planete étant rapporté au Soleil, ou observé dans les temps où les apparences sont les mêmes, vues de la Terre et vues du Soleil, est sujet à une inégalité (semblable à celle du mouvement apparent du Soleil): c'est celle que les anciens appelloient *premiere inégalité* [a]. Pour l'expliquer on se servoit, ou d'un épicycle, ou d'un cercle excentrique (867, 1070).

(a) La seconde inégalité étoit celle de la parallaxe du grand orbe (1140), ou bien des stations et des rétrogradations (1181); cette inégalité étant relative à la situation du Soleil, ne pouvoit se déterminer qu'après avoir connu celle qui en étoit indépendante, et qui avoit lieu dans les oppositions.

Ces deux hypotheses étoient absolument équivalentes, comme nous l'avons fait voir.

1203. Ptolémée fit choix de l'excentrique AHPEA (FIG. 24) pour exprimer cette *premiere inégalité*, ou l'équation des planetes dans leur orbite; il y trouvoit plus de clarté, et d'ailleurs il employoit ensuite l'épicycle pour représenter la *seconde inégalité*. Son hypothese (1070) consistoit à faire mouvoir la planete dans un cercle, de maniere que le mouvement fût égal, non pas vu du centre C, mais vu d'un autre point T, également éloigné du centre C. (*Almag. IX*, 5, *p.* 222). Ptolémée ne donne ni démonstration ni observation pour justifier cette hypothese; et, dans le fait, les anciens n'avoient pas, ce me semble, des raisons bien déterminantes pour mettre le centre d'égalité hors du centre du cercle décrit par la planete. Nous nous contenterons donc d'expliquer l'hypothese de Ptolémée telle qu'il la donne, pour faire connoître ensuite la maniere dont cette hypothese conduisit Képler à découvrir l'ellipticité des orbites planétaires (1208).

1204. Soit le cercle excentrique DEF (FIG. 64) dont l'excentricité est BA, en sorte que le centre soit en B, et la Terre ou l'œil de l'observateur en A: D sera l'apogée, F le périgée. Si l'on prend audessus du centre B une ligne BC égale à BA, le point C sera celui autour duquel Ptolémée suppose que la planete décrit des angles égaux en temps égaux, ou le point d'où son mouvement paroîtroit uniforme, *punctum aequantis*, le point d'égalité. Ptolémée appelle excentrique du mouvement uniforme, et d'autres ont appellé *équant*, le cercle RKOL (FIG. 62) placé de maniere que le mouvement de la planete soit uniforme par rapport au centre E de ce cercle, quoique l'épicycle de la planete parcoure le *déférent* FKML. Copernic rejeta cette hypothese (*liv. IV, chap.* 7, et *liv. V, chap.* 4), parceque, dans la physique de son temps, l'on ne vouloit que des mouvemens uniformes.

Tycho-Brahé, voulant perfectionner cette hypothese de Ptolémée, chercha si, en rendant DE différente de DA, on ne parviendroit pas à mieux représenter les inégalités qu'il observeroit dans les planetes; mais Képler fit voir dans la suite que tout cela étoit insuffisant, et ce fut ce qui le conduisit à trouver la véritable figure des orbites planétaires, comme nous allons l'expliquer. Riccioli a remarqué qu'avant Képler, Reinhold, à la fin des Théoriques de Purbach, avoit donné une figure ovale pour l'orbite lunaire. (*Almag. novum I*, 149.) Il n'en falloit peut-être pas davantage pour donner à Képler l'idée de rechercher si la figure des orbites planétaires étoit exactement circulaire.

1205. Nous avons vu (448) que les premieres étincelles du génie de Képler parurent dans le livre qui a pour titre, *Mysterium Cosmographicum*, en 1596. Ce premier essai fut applaudi par *Maestlinus* son ancien maître, et par Tycho-Brahé, qui, en 1597, lui en témoigna de la satisfaction, et lui inspira l'envie de s'appliquer aux observations et aux recherches d'astronomie. Képler, ayant su en 1600 que Tycho s'étoit retiré en Bohême, vint le trouver pour converser avec lui, et lui demander sur-tout les résultats de ses observations sur les excentricités des planetes, sur lesquelles Tycho avoit déja beaucoup travaillé. (Képler, *de stella Martis*, *pag.* 53.)

Une heureuse circonstance fit alors la destinée de Képler. Tycho-Brahé, et Longomontanus qui demeuroit avec lui, s'occupoient des observations de Mars, et dressoient une table de ses oppositions moyennes depuis 1580. Cette planete étoit la plus propre de toutes à faire pénétrer ce grand homme dans les secrets de la physique céleste, à cause de sa proximité et de la grandeur de son excentricité; elle se présenta la premiere comme par hasard. Képler apperçut des difficultés; il s'attacha à les vaincre, et c'est là l'époque où il faut remonter pour connoître l'origine de notre physique céleste.

1206. Tycho avoit formé une hypothese qui représentoit, à quelques minutes près, toutes les observations de Mars au moyen d'un excentrique, en plaçant le point A et le point C (FIG. 64) à des distances différentes par rapport au centre B. Képler savoit déja que l'excentrique pouvoit s'accorder, à cinq minutes près, avec les observations; et, malgré cela, l'hypothese lui paroissoit peu vraisemblable. Il s'occupa à discuter ces observations pour en tirer, s'il étoit possible, quelque chose de plus exact. Ce fut alors que commencerent les recherches qui se trouvent détaillées dans son grand ouvrage intitulé, *Astronomia nova* Αἰτιολογητός, *seu Physica cœlestis, tradita commentariis de motibus* STELLÆ MARTIS, *ex observationibus G. V.* TYCHONIS-BRAHÉ. *Pragae*, 1609, *in-fol.* 337 pages. Je vais donner un extrait de cet ouvrage célebre; M. Bailly en a donné un encore plus étendu dans le second volume de son Histoire: mais un astronome doit lire le livre de Képler en entier. Parmi les superfluités, les longueurs, les tentatives inutiles qui y sont détaillées, on y voit une marche lumineuse et des traits de génie.

1207. Le premier pas qu'il falloit faire dans cette carriere étoit de trouver les distances de la Terre au Soleil, qui servent d'échelle et de terme de comparaison pour toutes les autres distances que

l'on mesure dans le ciel. Pour avoir les distances de la Terre en divers temps de l'année, il falloit trouver l'excentricité AB (FIG. 64) de l'orbite terrestre, c'est-à-dire la distance entre le centre du Soleil supposé en A, et le véritable centre du cercle DEF décrit par la Terre. Les anciens avoient toujours cru, et Tycho-Brahé lui-même le croyoit, que, pour l'orbite du Soleil, le centre B étoit le point d'égalité autour duquel les mouvemens du Soleil paroîtroient uniformes, et que la ligne totale CA, qui sert de base à l'équation du centre ou à l'angle CEA, commençoit en B, et qu'elle étoit au-dessous du centre B, s'étendant de B en *a* qui devenoit le lieu de la Terre. C'étoit la premiere chose qu'il falloit discuter; et Képler reconnut bientôt la bissection de l'excentricité, c'est-à-dire qu'il vit que le centre B du cercle décrit par la Terre occupoit le milieu de l'excentricité totale CA, et qu'il étoit entre le point A, où est la Terre, et le point C, où il faudroit être pour appercevoir des mouvemens uniformes du Soleil ou des angles égaux en temps égaux.

1208. Képler avoit essayé d'expliquer physiquement la cause de l'*équant* (1204), la cause pour laquelle il y avoit un point C (différent du centre B), autour duquel on avoit un mouvement régulier et uniforme (*Myster. Cosmogr. c.* 22) : c'est pourquoi il étoit porté d'avance à croire que la cause étoit générale, et que l'*équant* devoit avoir lieu dans le mouvement de la Terre autour du Soleil, comme dans celui des autres planetes. Ptolémée et Copernic ne l'avoient point employé, ils s'étoient contentés d'un simple excentrique (867) : mais Képler fut persuadé que le point B étoit différent du centre C, sur-tout en 1598, lorsque Tycho lui eut écrit que l'*orbe annuel, ou l'excentrique du Soleil, lui paroissoit n'être pas toujours de la même grandeur.* En effet, Tycho supposoit que l'orbite du Soleil étoit un cercle dont le centre étoit le point d'égalité; et il devoit nécessairement trouver ce cercle plus grand ou plus petit en le comparant avec l'orbite de Mars. Soit S le centre du Soleil (FIG. 65), M le lieu de Mars dans son orbite, observé deux fois lorsque la Terre étoit en D et en E, et Mars au même point M de son orbite, c'est-à-dire après la durée d'une révolution ou de plusieurs (connue par les retours des oppositions); le point M étoit choisi de maniere que les angles MCD et MCE étoient des angles droits, le point C étant celui autour duquel la Terre devoit paroître se mouvoir uniformément. Ainsi CD et CE étant égales, comme Tycho-Brahé le pensoit, puisqu'il supposoit en B le centre d'égalité C, et les angles C étant droits, les angles DMC, CME (que nous appellons les parallaxes annuelles de Mars, considé-

rées par rapport au point d'égalité C), devoient être les mêmes; mais CE étoit véritablement plus grande que CD, parceque le point d'égalité n'est point en B, mais en C: ainsi l'angle CME se trouvoit être plus grand que l'angle CMD, la différence alloit à 1° 45′; et celui qui s'obstinoit à supposer que le rayon BD du cercle étoit la base de cet angle-là, étoit réduit à dire que le rayon du cercle décrit par la Terre n'étoit pas toujours de la même grandeur: c'est ce que Tycho écrivoit à Képler, et ce qui persuada ce dernier qu'il falloit mettre en C, et non pas au centre B du cercle décrit par la Terre, le point d'égalité (1204). *Képler, page* 125.

1209. Képler soupçonna donc que cette variation dans la grandeur du rayon de l'excentrique de la Terre, trouvée par Tycho, provenoit de ce que le point d'égalité C, autour duquel on comptoit les angles de commutation, ne devoit pas être le centre du cercle. Pour s'en assurer, il choisit deux observations faites le 18 mai 1585 et le 22 janvier 1591; il les réduisit (par le calcul des mouvemens de Mars, connus assez exactement pour un intervalle de quelques jours) au 30 mai 1585 et au 20 janvier 1591, jours où la longitude de Mars, vue du point C, devoit être, suivant Tycho, de 6ˢ 13° 28′, et où, la Terre étant en T et en R, les angles MCT et MCR étoient l'un et l'autre de 64° 23′⅓. Les longitudes de Mars, vues de la Terre, suivant l'observation, étoient 5ˢ 6° 37′ et 7ˢ 21° 34′; ainsi les parallaxes annuelles CMT, CMR, ou les différences entre les longitudes héliocentriques calculées, et les longitudes géocentriques observées, étoient 36° 51′ dans la premiere, et 38° 6′ dans la seconde observation (*Képler, page* 128). Ces parallaxes ainsi différentes de 1° 15′, quoique les angles, qu'il appelloit *anomalies de commutation,* MCT, et MCR, fussent égaux, prouvoient que la ligne CR étoit plus grande que CT, et par conséquent CE plus grande que CD; ainsi le point d'égalité, autour duquel les mouvemens de la Terre sont sensiblement uniformes, et auquel se rapportoient les commutations égales MCE, MCD, comptées au point d'égalité C, suivant la méthode de Tycho, n'étoit pas le centre B de l'orbite terrestre, mais un point C placé de l'autre côté du centre.

1210. Képler trouva aussi, par le moyen des triangles TCM, RCM, ou des parallaxes de Mars que nous venons de rapporter, la distance BC de 1837 parties, dont le rayon BD étoit cent mille (*Képler, page* 130): or Tycho avoit déterminé, par beaucoup d'observations, que la distance totale CS du Soleil au centre d'é-

galité, ou la double excentricité qui répond à l'équation du Soleil, étoit de 3584 ; il vit donc bien que le centre du cercle décrit par la Terre étoit entre le Soleil S et le point d'égalité C, puisqu'il venoit de trouver CB à peu-près égal à la moitié de CS.

C'étoit une découverte importante que d'avoir démontré ainsi la bissection de l'excentricité pour la Terre, tandis que les anciens ne l'admettoient que pour les planetes supérieures ; sans cela on ne pouvoit déterminer exactement les distances de la Terre au Soleil en différens temps de l'année, fondement essentiel de toutes les recherches suivantes.

1211. Après avoir déterminé la position du centre d'égalité (*puncti aequantis*) pour l'orbite de la Terre, Képler songea à la déterminer aussi pour l'orbite de Mars, c'est-à-dire à déterminer son excentricité : voici la méthode qu'il employoit. Nous nous contenterons d'en donner une idée, le détail en seroit trop long : on pourra le voir dans l'ouvrage cité (1206), où il explique ses tentatives, ses calculs, ses soupçons, ses erreurs, ses découvertes, avec un grand détail.

Soit B le centre de l'excentrique de Mars, HI la ligne des apsides, A le centre du Soleil, et C le point autour duquel les mouvemens de la planete seroient uniformes ; F, G, D, E, quatre longitudes de Mars observées lorsque cette planete étoit en opposition, et que la seconde inégalité étoit nulle ; Képler se propose le problême suivant : Trouver les angles FAH, FCH, tels que les quatre points F, G, D, E, soient dans un cercle, et que le centre B de ce cercle soit sur la même ligne que les points C et A, c'est-à-dire l'angle BAD égal à l'angle CAD. Il ne résolvoit le problême que par une double fausse position : il supposoit d'abord qu'on connût la distance CA avec les angles FCH et FAH ; il calculoit par la trigonométrie toutes les autres parties de la figure, pour savoir si, à la fin du calcul, les quatre angles formés en A se trouveroient égaux à 360°, et les trois points A, B, C, sur une même ligne ; dans ce cas tout étoit connu, sinon il ne s'agissoit que de recommencer le calcul avec d'autres suppositions (*Képler*, *page* 93).

1212. Képler nous apprend (page 95) qu'il fit de semblables calculs plus de 70 fois, avant de parvenir à reconnoître que le cercle ne pouvoit satisfaire seul aux observations. Après cela, dit-il, on ne s'étonnera pas que j'aie passé cinq ans à établir la théorie de Mars ; et l'on me plaindra plutôt d'avoir supporté l'ennui d'un semblable travail. En effet, un seul exemple que rapporte Képler de cette méthode, remplit dix pages de calculs dans le volume *in-fol.* que nous venons de citer.

1213. Il fut obligé de se contenter d'un cercle, qui approchoit assez des quatre observations ; il calcula, dans cette hypothese circulaire, douze oppositions de Mars, observées par Tycho, et il n'en trouva aucune qui s'écartât de son calcul de plus de 1' ¼. On s'étonnera, dit il, qu'une hypothese si bien d'accord avec les douze oppositions soit fausse : les observations de Tycho-Brahé étant nécessairement exposées à une erreur de 2', au jugement même de Képler, c'étoit véritablement les avoir représentées avec toute la perfection possible, que d'avoir évité des erreurs de 2' (*Képler, page* 110). Mais les oppositions ne suffisoient pas pour reconnoître la figure de l'orbite de Mars. L'hypothese qui représentoit très bien les longitudes de Mars en opposition, ne satisfaisoit ni aux latitudes observées en même temps, ni aux longitudes observées hors des oppositions, parceque les distances de Mars au Soleil, comme A F, A E, étoient défectueuses dans l'hypothese circulaire que Képler venoit d'examiner, quoique les angles ne le fussent pas, lorsqu'il supposoit AB (*excentricitas excentrici*) de 11332, et BC (*excentricitas aequantis*) de 7232 ; la Terre étant placée de côté, ne devoit plus voir la planete à sa véritable place, dès que la distance employée dans le calcul étoit défectueuse, et que la parallaxe annuelle qui dépend de ces distances de Mars au Soleil étoit fausse.

1214. Lorsque l'on faisoit A B = B C, comme paroissoient l'exiger ces autres observations, l'erreur alloit quelquefois à 8' (page 114). Si Képler avoit regardé une erreur de 8' comme négligeable, il en seroit demeuré là, ainsi qu'avoit fait Tycho-Brahé; mais persuadé que ces 8' d'erreur prouvoient la fausseté de l'hypothese circulaire, il songea à s'assurer des distances de Mars au Soleil, et ce furent ces distances qui lui firent ensuite connoître que l'orbite de Mars n'étoit pas un cercle parfait (1218). Ces recherches forment la plus grande partie de son ouvrage *de Stella Martis :* nous ne faisons, pour ainsi dire, que l'histoire ou l'extrait de ce livre ; mais aussi ce livre seul contient le germe et les fondemens de toute l'astronomie : notre objet ayant été de présenter la marche des inventeurs et l'histoire de l'esprit humain, nous suivons l'ouvrage où elles se trouvent totalement pour la partie et pour l'époque dont il s'agit.

1215. Képler avoit déterminé d'abord les distances de la Terre au Soleil (1210) ; il chercha ensuite les distances de Mars au Soleil en trois points de son orbite, avec ses longitudes vues du Soleil, afin d'avoir non seulement la figure, mais encore la grandeur de cette

cette orbite ; nous allons rapporter sa méthode, qui étoit très propre à déterminer exactement ces distances. Keill attribue cette méthode à Halley, qui n'a vécu que long-temps après (*Instit. astronom. pag.* 515); mais Copernic même avoit employé une méthode semblable (1150).

Soit S (FIG. 67) le centre du Soleil, M celui de Mars, B, C, deux points de l'orbite terrestre où se soit trouvée la Terre lorsque Mars étoit au même point M de son orbite, et par conséquent à la même distance S M du Soleil; on connoît les deux positions de la Terre, c'est-à-dire ses longitudes et ses distances au Soleil; il s'agit de trouver S M : dans le triangle rectiligne BSC, l'on connoît les deux côtés BS, SC, distances de la Terre au Soleil, et l'angle compris BSC, différence entre les deux longitudes de la Terre en B et en C; l'on trouvera les angles BCS, CBS, et le côté BC. L'angle MBS est la différence entre la longitude observée de Mars et celle du Soleil, au temps de l'observation faite en B; si l'on en retranche l'angle CBS que nous venons de trouver, on aura l'angle MBC; si l'on ôte aussi l'angle BCS de l'angle MCS, on aura l'angle MCB. Ainsi dans le triangle MCB l'on connoît deux angles et le côté compris; on trouvera aisément MB et MC. Enfin, dans le triangle MBS on connoît deux côtés MB, BS, avec l'angle compris MBS: on trouvera la distance MS avec l'angle MSB, qui étant ôté de la longitude de la Terre lorsqu'elle étoit en B, donnera la longitude héliocentrique de Mars en M.

Képler avoit choisi cinq observations différentes, qui, comparées deux à deux, lui donnoient le même résultat pour la distance et pour la longitude héliocentrique de Mars, en un même point M de son orbite, (*de Stella Martis*, *pag.* 157.)

1216. En employant un grand nombre d'observations de Tycho-Brahé, discutées avec toute la constance et la sagacité possibles, Képler établit l'excentricité de l'orbite terrestre (1210); ainsi il étoit en état de trouver en tout temps les distances de la Terre au Soleil telles que SB, SC, aussi bien que l'angle CSB : mais pour en être encore plus assuré, il refit tous ses calculs dans différentes suppositions d'excentricité, et à chaque fois il prenoit cinq observations, pour que l'accord de différens résultats lui fît mieux connoître le vrai; et c'est ainsi qu'après avoir discuté dans le plus grand détail une multitude d'observations, il s'arrêta à l'excentricité de 1800, et aux distances de Mars que nous rapporterons (1218). Les différentes parties de ces recherches se confirmoient réciproquement, et il ne pouvoit pas se faire que cinq positions

de la Terre donnassent toutes, deux à deux, le même résultat pour la distance SM de Mars au Soleil, à moins que les distances SC et SB de la Terre au Soleil n'eussent été bien supposées.

1217. Cette méthode par laquelle Képler trouvoit une distance de Mars au Soleil (1215), lui donnoit le moyen d'en déterminer plusieurs, et par conséquent de trouver l'excentricité de Mars : ayant en effet déterminé la distance de Mars, aux environs de son aphélie, il la trouva de 166780, et dans le périhélie 138500; en sorte que la distance moyenne étoit de 152640 et l'excentricité de 14140 : c'est ce qu'il appelloit *Centrorum excentrici et Mundi distantia* (Képler, *pag.* 209).

Lorsque ces observations ne se trouvoient pas avoir été faites précisément dans le même endroit de l'orbite de Mars, il y appliquoit les réductions nécessaires pour les faire toutes coïncider en un même point; mais ces réductions étant fort petites, il n'en résultoit aucune erreur (4127).

1218. Képler détermina ainsi, par plusieurs observations, trois distances de Mars au Soleil AF, AE, AD (FIG. 66), indépendantes de toute supposition sur la théorie de Mars : il avoit aussi déterminé la position de la ligne des apsides HT, par une méthode qui étoit également exacte, soit que l'orbite fût circulaire, soit qu'elle ne le fût pas (1280).

Supposant donc l'orbite circulaire et l'excentricité AB, de 14140, on a le triangle ABF, dans lequel on connoît le rayon BF de 152640, avec l'excentricité AB et l'anomalie vraie BAF; il est aisé de trouver la distance vraie AE; il en est de même des autres distances AE, AD. Voici les trois distances que Képler trouvoit dans cette supposition (*page* 213). . 166605, 163883, 148539.
Les distances observées. . . . . 166255, 163100, 147750.
Ainsi l'erreur du calcul étoit. . . . . . 350, 783, 789.

1219. Les vraies distances de Mars au Soleil étoient donc plus courtes que les distances calculées dans l'hypothese circulaire, et cela d'autant plus qu'elles approchoient des côtés G et E de la figure. Cela prouvoit donc que l'orbite étoit applatie, ou rentrante par les côtés, c'est-à-dire ovale : d'où suivoit la conclusion importante et fameuse que Képler en tira, et qui fut la premiere loi de Képler : *Itaque plane hoc est, orbita planetae non est circulus, sed ingrediens ad latera utraque paulatim; iterumque ad circuli amplitudinem in perigeo exiens, cujusmodi figuram itineris ovalem appellitant* (*pag.* 213).

1220. Cette ovalité de l'orbite de Mars fit juger à Képler que

cette orbite étoit une véritable ellipse; car l'ellipse est de toutes les courbes alongées, ou ovales, la plus simple et celle qui se présente la premiere : cela fut confirmé par l'examen des lieux de Mars, observés dans toutes ses positions, qui se trouverent d'accord, aussi bien que ses distances, avec les calculs faits dans l'ellipse ordinaire. Cette conclusion, que Képler étendit ensuite à toutes les planetes dans ses tables rudolphines, s'est trouvée dans toutes également exacte. Dans la suite, on a vu que c'étoit une conséquence nécessaire de l'attraction universelle (3580), en sorte qu'il a été reconnu pour regle générale, que *les sept planetes principales décrivent des ellipses dont le foyer est au centre du Soleil.*

1221. Le reste du livre de Képler est employé à confirmer cette découverte par d'autres observations et par d'autres genres de preuves, à expliquer par des raisonnemens physiques la cause de cette ovalité, et à chercher les moyens de calculer l'équation dans une ellipse dont on connoît l'anomalie moyenne. Nous ne suivrons pas l'auteur dans ces différentes tentatives, où l'on voit cependant le génie et l'imagination de l'auteur: mais il nous suffit d'avoir montré la route par laquelle il étoit arrivé à cette belle découverte.

On a dû remarquer avec quelle sagacité Képler avoit su diviser les questions, pour les résoudre chacune séparément, et choisir dans le grand nombre d'observations que Tycho lui avoit fournies, celles qui décidoient un élément, c'est-à-dire un des points de la question, *indépendamment* de tous les autres. Il avoit d'abord déterminé l'excentricité de l'orbite terrestre (1208) par le moyen de deux longitudes de Mars, observées dans le temps que cette planete étoit au même point de son orbite : cette excentricité le mettoit à portée de connoître les autres distances de la Terre au Soleil en différens points de l'orbite terrestre. Connoissant les distances de la Terre au Soleil, il s'en étoit servi pour trouver celles de Mars au Soleil, dans son aphélie et dans son périhélie ; ce qui donnoit directement l'excentricité de son orbite (1213). Enfin, il compara trois autres distances de Mars au Soleil, calculées dans un cercle dont l'excentricité étoit connue; et les trouvant plus longues que les vraies distances observées, il en conclut que ces vraies distances appartenoient à une orbite plus étroite que le cercle (1219).

Képler avoit été long-temps à secouer le préjugé universel des orbes circulaires; il s'accuse lui-même du temps considérable que lui avoit fait perdre cette fausse persuasion, fondée sur l'autorité générale de tous ceux qui l'avoient précédé, et sur les principes

de cette métaphysique arbitraire dont on n'osoit s'écarter. *Primus meus error fuit viam planetae perfectum esse circulum ; tantò nocentior temporis fur, quantò erat ab auctoritate omnium philosophorum instructior, et metaphysicae in specie convenientior* (*pag.* 192).

La découverte de Képler fut contestée et rejetée d'abord par beaucoup d'astronomes, comme l'avoit été le système de Copernic, et comme le fut ensuite l'attraction newtonienne : l'inertie de la matiere semble donner aux hommes une certaine difficulté à s'élever à des idées nouvelles ; il n'y a que ceux qui ont de la jeunesse, du feu et de la curiosité, qui les examinent et les reçoivent ; encore faut-il qu'ils n'aient pas honte de s'instruire et de se réformer.

Après que l'orbite de Mars eut servi à trouver les dimensions de l'orbite terrestre, et la regle du mouvement planétaire, la même méthode (1216) servit à trouver les distances de toutes les autres planetes : Képler les calcula lui-même avec assez d'exactitude, au moyen des observations de Tycho ; et il s'en servit pour dresser ses tables rudolphines.

1222. Ces distances lui servirent à trouver la loi dont nous parlerons ci-après (1224) ; et cette loi de Képler a servi aux autres astronomes pour trouver ces distances encore plus exactement qu'on ne pouvoit le faire par la méthode précédente. Ces calculs ont été faits plus d'une fois : les voici suivant les tables de Képler, Cassini et Halley, et suivant mes nouveaux calculs (1225), d'après les durées des révolutions (1162). Toutes ces distances supposent celle du Soleil de 100000 ; mais j'y ai ajouté des décimales, quand le calcul me les a données. J'y ai aussi ajouté la planete d'Herschel, découverte en 1781 et dont j'ai parlé (1160).

Tables des distances moyennes des planetes au Soleil, suivant divers auteurs.

PLANETES.	Distances moyen. suiv. Képler.	Suivant Cassini.	Suivant Halley.	Selon nos Tables.	Logarithmes de ces distances.
Mercure.	38806	38760	38710	38710	9,5878221
Vénus.	72113	72340	72333	72333,24	9,8593379
La Terre.	100000	100000	100000	100000	0,0000000
Mars.	152349,5	152373	152369	152369,27	0,1828973
Jupiter.	529900	520290	520098	520279,2	0,7162364
Saturne.	951003,5	954180	954007,4	954072,4	0,9795813
Herschel.				1908180	1,2806193

Les logarithmes par le moyen desquels j'ai trouvé les distances, sont dans la derniere colonne; ils supposent la distance du Soleil égale à l'unité, parceque c'est sous cette forme qu'on emploie les distances dans les calculs. On trouvera celles de la Lune art. 1703.

1223. Les distances précédentes des planetes au Soleil, en négligeant les quatre derniers chiffres, sont entre elles comme les nombres 4, 7, 10, 15, 52, 95; ce sont là les nombres les plus simples qu'il y ait pour représenter les intervalles et les grandeurs des orbes planétaires, et nous nous en sommes déja servis en expliquant la figure du systême de Copernic (1088): il est utile de se souvenir de ces six nombres dont on fait un fréquent usage.

Les carrés des temps périodiques sont comme les cubes des distances.

1224. La plus fameuse loi du mouvement des planetes découverte par Képler, est celle du rapport qu'il y a entre les grandeurs de leurs orbites, et le temps qu'elles emploient à les parcourir; Jupiter est cinq fois plus éloigné du Soleil que la Terre, le contour de son orbite est cinq fois plus grand : mais il met douze fois plus de temps que la Terre à parcourir cette orbite qui est seulement cinq fois plus grande. Képler chercha long-temps la cause de cette différence et la nature de ces rapports. Les anciens Pythagoriciens et Archimede avoient imaginé des rapports harmoniques dans les distances des planetes (Pline liv. 2, c. 22; Censorinus, c. 13; Macrobe, *Somn. Scip.* liv. 2, c. 3; Riccioli, *Almag.* I, 415, 481, 689). Ils en établissoient aussi entre les aspects: l'aspect quadrat est par rapport à l'aspect sextile, comme 3 est à 2: c'est le rapport des cordes qui forment une quinte ou diapente, etc. (Riccioli, p. 668). Képler voulut aussi rapporter les distances des six planetes aux corps réguliers, le cube, le tétraëdre, l'octaëdre, le dodécaëdre, l'icosaëdre; ensuite à l'harmonie des corps sonores (voy. *Mysterium Cosmographicum*, 1596, et *Harmonices Mundi*, 1619); mais il ne trouvoit aucun rapport satisfaisant entre les temps et les distances.

Ce fut le 8 mars 1618 qu'il lui vint à l'esprit pour la premiere fois de comparer les puissances des différens nombres, au lieu de comparer les nombres mêmes qui exprimoient les temps périodiques des planetes et leurs distances : il compara donc au hasard des carrés, des cubes, etc. il essaya même les carrés des temps avec les cubes des distances; mais trop de vivacité ou d'impatience l'égara dans quelque faute de calcul, il se trompa cette premiere

fois ; il crut trouver que la regle n'avoit pas lieu, et rejeta cette proportion comme fausse et inutile. Ce ne fut que le 15 mai qu'il revint à cette idée, en recommençant les mêmes essais et les mêmes comparaisons des carrés et des cubes ; il calcula mieux, et il les trouva parfaitement d'accord ; alors enfin il reconnut qu'il y avoit réellement toujours un rapport égal et constant entre les carrés des temps périodiques de deux planetes quelconques, et les cubes de leurs distances moyennes au Soleil : il fut si enchanté de cette découverte, qu'à peine il se fioit à ses calculs ; il crut d'abord se faire illusion et avoir supposé ce qu'il falloit chercher ; il n'osoit qu'à peine se persuader qu'il eût enfin trouvé une vérité cherchée pendant 17 ans : *Tantâ comprobatione et laboris mei septendecennalis in observationibus Braheanis, et meditationis hujus in unum conspirantium, ut somniare me et praesumere, quaesitum inter principia primò crederem* (*Harmonices*, *lib.* V, pag. 189). Qu'auroit-il dit, s'il eût pu prévoir les conséquences admirables qu'on a su tirer de cette loi (3546)?

1225. La distance de la Terre au Soleil est à celle de Jupiter au Soleil, comme 10 est à 52 ; leurs cubes sont par conséquent comme dix est à 1407 ; or, les durées de leurs révolutions sont de 365 $\frac{1}{4}$ et de 4332 jours $\frac{1}{2}$, dont les carrés, en négligeant les derniers chiffres, sont encore comme 10 est à 1407, ou comme 1 est à 141 environ ; donc le rapport est le même de part et d'autre ; le carré du temps périodique de Jupiter est 141 fois plus grand que le carré du temps périodique de la Terre, et le cube de la distance moyenne de Jupiter au Soleil est 141 fois plus grand que le cube de la distance moyenne de la Terre, c'est en quoi consiste l'égalité des rapports. Si l'on prend plus exactement les révolutions sidérales (1161) et les distances (1222), on aura 140, 7026 pour le nombre exact qui exprime combien le carré de la révolution de Jupiter et le cube de sa distance contiennent ceux de la Terre. On verra dans le XVIIIe livre que cette loi se vérifie également quand on compare les distances des satellites de Jupiter et de Saturne avec les durées de leurs révolutions ; et quand nous traiterons de l'attraction, nous ferons voir que de cette loi donnée par observation, suivoit celle de la gravité, c'est-à-dire la plus belle découverte de Newton, qui dut son origine à celle de Képler (3546).

Je me suis servi de cette loi pour trouver les distances moyennes des planetes qui sont dans la table de l'article 1222, en ôtant du logarithme du mouvement séculaire total du Soleil, relativement

aux étoiles, ou de 129597735″ qui est 8, 1125974 celui du mouvement séculaire de chaque planete (1162); et prenant les deux tiers de la différence. J'emploie les mouvemens séculaires, qui sont en raison inverse des temps des révolutions, parceque c'est presque toujours le mouvement qui est donné immédiatement par les observations, et duquel je déduis les périodes; il est bon de remonter à la source des données, toutes les fois qu'on a de nouvelles conséquences à en tirer.

1226. On n'a point assez observé les planetes hors des oppositions pour vérifier si cette loi de Képler ne souffre pas quelque petite altération par les attractions réciproques, la résistance de l'éther et l'atmosphere du Soleil. En examinant la quadrature de Mars et les digressions de Mercure en 1786, il m'a semblé reconnoître qu'il faudroit diminuer un peu les distances, de maniere à changer l'élongation de Mars d'une demi-minute (*Mém. ac.* 1786, p. 294). M. de la Place, par les calculs de l'attraction, trouve dans les distances de Jupiter et de Saturne quelque différence: la distance de Jupiter est, selon sa théorie, 52028, tandis que la regle de Képler donne 52012, et pour Saturne 95407 au lieu de 95379 qu'on déduiroit de la révolution observée et corrigée par les inégalités de ces planetes (*Mém.* 1785 et 1786).

Les aires sont proportionnelles au temps.

1227. *Cette loi* générale du mouvement des planetes devenue si importante dans l'astronomie, savoir, que les aires sont proportionnelles au temps, est encore une des découvertes de Képler; et c'est ce qu'on appelle la troisieme loi de Képler: cependant il ne démontroit cette vérité que d'une maniere incomplete; Newton a été le premier qui ait fait voir qu'elle étoit une suite nécessaire et exacte des loix générales du mouvement.

Képler étoit persuadé que le mouvement circulaire des planetes étoit produit par une certaine force émanée du Soleil, qui les forçoit à tourner autour du Soleil, comme celui-ci tournoit lui-même sur son axe. D'après l'idée que Képler avoit déja conçue (3281); il considéroit que puisque les planetes les plus éloignées tournoient plus lentement que les planetes les plus proches du Soleil, il falloit que la force motrice fût plus petite à une plus grande distance, et cela le conduisit à établir non seulement la force d'*inertie*, dont il a parlé le premier, mais encore la regle des aires proportionnelles au temps.

1228. Képler démontre d'abord (page 165) que le mouvement

des planetes dans les apsides est réciproquement proportionnel à leur distance au Soleil, même dans l'hypothese de Ptolémée (1204); c'est-à-dire qu'en prenant un arc de l'éxcentrique vers l'aphélie, et un autre arc de même longueur vers le périhélie, la planete est plus long-temps dans l'arc aphélie, à proportion que la distance aphélie est plus grande; ou, ce qui revient au même, que les aires décrites dans le même temps sont égales.

Soit E (FIG. 68) le point autour duquel le mouvement est supposé uniforme (1204); S le centre du Soleil à même distance du centre C que le point E; ayant tiré deux lignes MEO, NEP, l'arc MN et l'arc OP sont parcourus dans le même temps, suivant cette hypothese, puisque les angles en E sont égaux; si du point S on tire les lignes SO, SP, et les lignes SN, SM, je dis qu'elles formeront des secteurs égaux OSP, NSM. En effet, MN : OP :: ER : EQ, donc MN. EQ = OP. ER; mais EQ = SR, et ER = SQ; donc MN. SR = OP. SQ; donc le secteur SNM est égal au secteur OSP : donc, dans l'hypothese même des anciens, si l'on prend deux arcs MN et OP décrits par une planete dans des temps égaux, vers les apsides, on aura au point S des aires égales.

De ce que la planete emploie plus de temps dans son aphélie à parcourir un même arc, Képler conclut en général (*pag.* 168) que plus la planete est éloignée du centre du Soleil, plus elle est foiblement animée par la force motrice qui la fait tourner autour du Soleil. Après cela il applique cette égalité des aires (*cap.* 40) au calcul de l'équation. Enfin il observe que les surfaces des secteurs doivent exprimer les anomalies moyennes. En effet, la demeure d'une planete dans chacun des arcs égaux de l'excentrique, ou le temps qu'elle emploie à le parcourir étant toujours proportionnel à la distance de la planete; si l'on peut avoir la somme de toutes les distances, on aura la somme de toutes les demeures, ou de tous les temps, c'est-à-dire le temps employé à parcourir un arc quelconque, de quelque grandeur qu'il soit : or la somme de toutes les distances est visiblement la surface entiere du secteur décrit par la planete; ainsi l'aire du secteur représentera l'anomalie moyenne, qui est proportionnelle au temps.

1229. Lorsque Képler (*pag.* 219 et 223) passe à la considération des orbes elliptiques, il transporte à l'ellipse cette propriété qu'il n'avoit démontrée que pour le cercle excentrique, dans l'hypothese des anciens, sans y employer d'autre démonstration; ainsi la loi des aires proportionnelles au temps n'étoit démontrée qu'imparfaitement, mais elle étoit justifiée par l'accord du calcul avec

avec l'observation. Nous verrons bientôt (1233) une démonstration physique et rigoureuse de cette loi.

1230. On prouve très bien aujourd'hui, par l'observation des diametres du Soleil, que les aires sont proportionnelles aux temps vers les apsides, ou, ce qui revient au même, que le mouvement réel du Soleil est d'autant plus lent qu'il est plus éloigné de la Terre. Le diametre du Soleil est de 31′ 31″ en été, et de 32′ 36″ en hiver, suivant mes observations; cela prouve que la distance du Soleil en hiver est à sa distance en été, comme 31′ 31″ est à 32′ 36″; car les grandeurs apparentes d'un objet éloigné sont en raison inverse de ses distances (1384) : le mouvement horaire du Soleil en hiver paroît de 2′ 33″; or 32′ 36″ : 31′ 31″ :: 2′ 33″ : 2′ 28″; ainsi le mouvement horaire du Soleil devroit être de 2′ 28″ en été, si le mouvement horaire vrai étoit en lui-même constant et uniforme, et que ses différences ne dépendissent que de l'éloignement du Soleil, qui le feroit paroître ralenti de 5″. Cependant, par l'observation, ce mouvement horaire ne se trouve que de 2′ 23″; il est plus petit qu'il ne devroit être dans cette supposition : donc, outre les 5″ de différence qu'il doit y avoir entre les mouvemens horaires du Soleil en été et en hiver à cause de ses différentes distances, il y a encore une différence réelle de 5″, qui ne provient pas des distances, mais qui est un ralentissement véritable dans le mouvement vrai du Soleil; donc le mouvement réel de la Terre est effectivement plus lent dans l'aphélie que dans le périhélie. On voit même que le mouvement horaire du Soleil en été, comparé à son mouvement en hiver, est en raison inverse des distances, puisqu'on l'observe plus petit de 10″ au lieu de 5″, ou de 2′ 23″, au lieu de 2′ 28″ qu'il y auroit en supposant le mouvement uniforme; c'est-à-dire qu'il y a 5″ de ralentissement réel en été, indépendamment des 5″ qu'il doit y avoir, à raison de l'éloignement.

La loi des aires proportionnelles au temps ayant été vérifiée d'ailleurs par un accord général entre les observations et le calcul tiré de cette loi, nous pourrions la regarder comme prouvée astronomiquement, sur-tout n'ayant pas encore traité des causes qui doivent produire cet effet ; cependant nous allons démontrer encore, 1°. que les planetes tournent en vertu d'une force centrale ou attractive, dirigée vers le Soleil; 2°. que cette force une fois supposée, il s'ensuit que les aires sont proportionnelles au temps : ce sera une connoissance élémentaire qui préparera le lecteur à la physique céleste, dont nous traiterons dans le XXIIe livre.

1231. C'est la premiere loi du mouvement prouvée par l'expérience, et admise par tous les mathématiciens, même par les anciens (3519, 3536), qu'un corps ayant parcouru une ligne droite uniformément dans l'espace d'une minute, parcourroit une autre ligne droite sur la même direction dans la minute suivante, si rien ne s'y opposoit; ainsi la planete P (FIG. 69) ayant été une seule fois uniformément de P en Q sur la ligne droite PQ, elle continueroit à se mouvoir de Q en F sur la même direction PQF, en parcourant un espace QF égal à PQ uniformément, et dans le même espace de temps : cependant les planetes décrivent des ellipses, et non pas des lignes droites; elles courbent sans cesse leur route du côté du Soleil, et reviennent après une révolution reprendre la même route à la même distance du Soleil; il y a donc dans le Soleil une force capable de détourner à chaque instant une planete de la ligne droite qu'elle venoit de décrire l'instant précédent. Nous examinerons la mesure et la quantité de cette force dans le XXIIe livre, où nous traiterons de l'attraction; il nous suffit ici de faire voir que cette force centrale existe, puisque sans elle une planete ne pourroit décrire qu'une ligne droite, et jamais ne reviendroit au même lieu, comme elle le fait, en décrivant sans cesse une courbe qui environne le Soleil.

1232. La seconde loi du mouvement, qui est démontrée dans tous les livres de mécanique, est celle-ci : un corps poussé à la fois par deux forces différentes, dont les directions font un angle, et dont chacune pourroit lui faire parcourir en une minute un des côtés d'un parallélogramme, en décrira la diagonale dans la même minute. La planete arrivée en Q est poussée vers le Soleil, suivant la direction QS, avec une force qui seule seroit capable de lui faire parcourir en une minute une ligne droite QG, tandis qu'au même instant elle est sollicitée à parcourir en une minute une ligne QF égale à PQ, en vertu de la premiere loi du mouvement (1231); si sur les lignes QG et QF on forme un parallélogramme GQFR, la planete parcourra la diagonale QR dans la même minute. Il ne faut que ces deux principes pour démontrer que la loi des aires proportionnelles au temps doit avoir lieu dans tous les cas; nous allons faire cette démonstration à peu près comme Newton (*Philosophiae natur. Principia mathemat. l. I, sec. II, prop.* 1).

1233. Considérons une planete en un point Q de son orbite, venant de parcourir une très petite portion PQ de cette orbite, que je considère comme une très petite ligne droite : le rayon de son orbite ayant passé de SP en SQ, a décrit l'aire SPQ en une

minute de temps; je dis que dans la minute suivante elle décrira une aire SQR égale à l'aire SPQ, ou un triangle égal en surface à SPQ, en sorte que l'aire décrite par le rayon vecteur sera égale en temps égal. En effet, si la planete, livrée à elle-même, eût continué à se mouvoir de Q en F, en vertu de la premiere loi du mouvement (1231), elle auroit décrit une aire QSF qui est égale à l'aire PSQ, parceque ces deux triangles sont égaux, ayant des bases égales PQ et QF, et pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du point S sur la direction FQP, prolongée au-dehors : mais à cause de la force centrale qui attire la planete vers le Soleil, ce sera l'aire QSR (à la place de l'aire QSF), qui sera décrite par la planete; or, les triangles QSR, QSF, sont encore égaux, parcequ'ils ont la même base QS, et sont compris entre les mêmes paralleles FR et QS; donc l'aire QSR est aussi égale à l'aire PSQ : ainsi il est démontré que la petite aire décrite dans la seconde minute est égale à la petite aire décrite dans la minute précédente; et procédant ainsi, de minute en minute, dans toute la durée de la révolution, on démontreroit avec la même facilité que la même planete décrira éternellement la même aire dans le même temps, à quelque distance du Soleil qu'elle parvienne, tant qu'il ne surviendra pas une force étrangere qui puisse troubler l'égalité entre QF et PQ, c'est-à-dire entre la ligne qu'une planete vient de parcourir, et celle qu'elle tend à parcourir dans la minute suivante.

Ainsi la loi des aires proportionnelles aux temps est prouvée, non seulement par l'observation, c'est-à-dire par l'accord général des calculs fondés sur cette loi, avec les observations, mais encore par la nature même des deux forces qui animent les planetes : nous allons donc passer au calcul du mouvement des planetes dans les orbites elliptiques, pour être en état d'assigner en tout temps le point de son orbite où une planete doit se trouver en vertu de la loi précédente.

On a appellé *Loix de Képler* cette regle des aires proportionnelles aux temps et celles des articles 1220 et 1224, du nom de ce célebre inventeur: mais il n'eut pas la satisfaction de voir leur connexion, et leur dépendance essentielle d'une autre loi plus générale; cela étoit réservé à Newton, dans la découverte de l'attraction universelle, comme on le verra dans le livre XXII.

Théorie du mouvement elliptique des planetes autour du Soleil.

1234. Définitions. L'excentricité d'une orbite est la distance CS du centre au foyer de l'orbite. Le *rayon vecteur* d'une planete est la ligne tirée du centre du Soleil au centre de la planete, ou la distance de la planete au foyer de son ellipse. Soit AMDP (fig. 70) l'orbite elliptique d'une planete décrite autour du foyer S, où est placé le Soleil (1220), M le lieu actuel d'une planete pour un instant donné, la ligne SM sera le rayon vecteur.

La ligne des apsides (864), ou le grand axe de l'ellipse, marque l'aphélie et le périhélie de la planete. L'aphélie, ou l'apside supérieure, est le point de l'orbite où la planete est le plus éloignée du Soleil; tel est le sommet A du grand axe AP, le plus éloigné du foyer S. Le Périhélie, ou l'apside inférieure, est le point de l'orbite où la planete est le plus proche du Soleil; telle est l'extrémité inférieure P du grand axe AP, la plus voisine du foyer S où réside le Soleil.

L'anomalie en général est la distance d'une planete à son aphélie; mais il y a plusieurs manieres de mesurer cette distance.

L'anomalie vraie, ou anomalie égalée [a], est l'angle formé au foyer de l'ellipse par le rayon vecteur et par la ligne des apsides; tel est l'angle ASM formé par le grand axe A P et par le rayon vecteur SM.

L'anomalie excentrique est l'angle formé au centre de l'ellipse par le grand axe et par le rayon d'un cercle circonscrit, mené à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le lieu vrai de la planete. Ainsi ayant décrit un cercle ANP sur le grand axe AP de l'orbite, comme diametre, on tirera l'ordonnée RMN par le point M où est supposée la planete, et à l'extrémité N de cette ordonnée on menera le rayon CN: c'est celui qui déterminera l'anomalie excentrique A N ou ACN.

L'anomalie moyenne est la distance à l'aphélie, supposée pro-

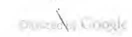
(a) Dans Képler *anomalia æquata*, dans les anciens *anomalia orbis*, étoit la distance d'une planete au sommet de son épicycle ; c'étoit dans Copernic *anomalia commutationis*, *anomalia secundæ inæqualitatis*. Mais *anomalia excentrici* étoit le mouvement du centre de l'épicycle, compté depuis l'apogée de l'excentrique. La Lune ayant d'autres inégalités, il y avoit d'autres anomalies, que Képler appelloit *soluta*, *menstrua temporanea*, *menstrua perpetua* : c'étoient les argumens des trois grandes inégalités.

portionnelle au temps; c'est celle qui augmente uniformément et également depuis l'aphélie jusqu'au périhelie: ainsi une planete qui emploieroit six mois à aller de A en P, auroit, à la fin du premier mois, 30° d'anomalie moyenne, 60° à la fin du second; et ainsi de suite, en augmentant toujours proportionnellement au temps. Si l'on prend une ligne CX pour marquer l'anomalie moyenne, en supposant que cette ligne tourne uniformément autour du centre C, la ligne CX sera d'abord plus avancée que la ligne CN, parceque AN croît plus lentement vers l'aphélie où le mouvement de la planete est moindre que le mouvement moyen, et cet avancement augmentera tant que la vîtesse de la planete sera moindre que sa vîtesse moyenne (1257).

La différence entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne forme L'ÉQUATION *de l'orbite*, ou *l'équation du centre*.

1235. Puisque l'anomalie moyenne est proportionnelle au temps, et qu'elle est une portion du temps de la révolution, elle peut être mesurée par toute quantité qui aura un progrès uniforme : ainsi non seulement l'arc AX, l'angle ACX, et le secteur ou l'aire circulaire ACX, peuvent s'appeller *anomalie moyenne*, mais encore le secteur elliptique, ou l'aire ASM, formée par le rayon vecteur SM, le grand axe SA et l'arc d'ellipse AM. En effet, les aires décrites par le rayon vecteur SM étant proportionnelles aux temps (1227), le secteur AMS sera la sixieme partie de la surface elliptique AMDPA au bout du premier mois (dans la supposition de l'article précédent); il en sera par conséquent le tiers au bout de deux mois, et toujours ainsi uniformément; en sorte que la surface, ou l'aire elliptique, sera la quantité proportionnelle au temps, une fraction égale à la fraction du temps, ou à l'anomalie moyenne : ainsi l'on pourra dire à la fin du premier mois, que l'anomalie moyenne est 30°, ou, en général, qu'elle est un douzieme ; car alors les 30° sont la douzieme partie du ciel, l'arc sera la douzieme partie du cercle, le temps employé à le parcourir sera la douzieme partie du temps de la révolution entiere; et enfin l'aire AMS sera la douzieme partie de l'aire entiere de l'ellipse : mais ordinairement c'est en degrés que nous exprimons l'anomalie moyenne.

1236. Képler ayant trouvé que les planetes décrivoient des ellipses avec des aires proportionnelles au temps, il ne lui restoit plus que d'en conclure le vrai lieu d'une planete pour un temps donné. Lorsqu'on connoît la durée de la révolution de la planete, par exemple, celle de Mercure, qui est de 88 jours, et qu'on demande le lieu de Mercure au bout de deux jours, c'est-à-dire



de la 44e partie de sa révolution, on sait dès lors que l'aire du secteur ASM, compris entre l'aphélie et le rayon vecteur SM, est la 44e partie de la surface de l'ellipse; cette portion du temps, ou cette portion de l'ellipse, est proprement l'*anomalie moyenne*, que l'on peut aussi exprimer en degrés, en prenant la 44e partie des 360° ou du cercle entier: c'est en degrés que nous la prendrons toujours, pour suivre la forme usitée dans les tables astronomiques, où toutes les anomalies et toutes les équations s'expriment en degrés, minutes et secondes.

1237. Lorsqu'on connoît l'anomalie moyenne, ou la surface du secteur AMS, il s'agit de trouver l'anomalie vraie, ou l'angle ASM de ce secteur. Képler sentit bien la difficulté de ce problême, *étant donnée l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie*, même dans un cercle, car la difficulté est la même que dans l'ellipse; il se contenta d'inviter les géometres à en chercher la solution, sans espérer qu'on la pût trouver d'une maniere directe, parcequ'elle suppose connu le rapport entre les arcs et leurs sinus, qui n'est donné que par approximation. Voici comment il s'exprime au sujet de ce fameux problême, qui a toujours été appellé depuis *Problême de Képler*, parcequ'en effet il le proposa le premier, et en donna même une solution approchée: *Hæc est mea sententia: quae quominùs habere videbitur geometricae pulchritudinis, hoc magis adhortor geometras ut mihi solvant hoc problema: Datâ areâ partis semicirculi, datoque puncto diametri, invenire arcum et angulum ad illud punctum: cujus anguli cruribus et quo arcu data area comprehenditur: vel aream semicirculi ex quocumque puncto diametri in data ratione secare. Mihi sufficit credere solvi a priori non posse propter arcus et sinus* ἑτερογένειαν (pag. 300). C'est par-là que Képler termine ses recherches. Le problême dont il désespéroit alors, est encore aujourd'hui désespéré; mais nous le résoudrons par approximation (1247).

1238. La premiere chose que nous ferons pour simplifier ces recherches, sera de renverser la question, et de supposer connue l'anomalie vraie pour en déduire l'anomalie moyenne; cette méthode sera plus courte, souvent plus exacte, et tiendra toujours lieu, dans la pratique, de la méthode directe, que nous expliquerons cependant à son tour (1247). Cette méthode indirecte a été employée avec succès par la Caille dans ses recherches sur le Soleil; elle est fondée sur deux théorêmes, que nous allons démontrer d'une maniere très simple, en supposant quelques propositions des sections coniques, ou de la trigonométrie, qui seront démontrées à leur place dans les livres XXI et XXIII.

1239. LEMME. *Dans une ellipse* AMP, *à laquelle on a circonscrit un cercle* ANP, CX *étant la ligne de l'anomalie moyenne,* M *le vrai lieu de la planete,* RMN *l'ordonnée qui passe par le lieu de la planete; le secteur circulaire* ANSA *est toujours égal au secteur circulaire* ACX *de l'anomalie moyenne.*

DÉMONSTRATION. Soit T le temps entier de la révolution de la planete, et *t* le temps qu'elle a employé à aller de A en M: on aura, par la regle des aires proportionnelles aux temps, *t* est à T comme le secteur AMS est à la surface de l'ellipse; de même, puisque ACX est l'anomalie moyenne, on aura *t* est à T comme ACX est à la surface du cercle; donc AMS est à ACX comme la surface de l'ellipse est à la surface du cercle. Mais, par la propriété de l'ellipse (3398), AMS est à ANS comme la surface de l'ellipse est à la surface du cercle; nous avons donc deux proportions qui ont trois termes communs, savoir AMS; la surface de l'ellipse, et la surface du cercle; le terme qui paroît différent est donc nécessairement le même; donc ACX et ANS sont égaux entre eux. C.Q.F.D.

1240. *LA* RACINE CARRÉE *de la distance périhélie est à la racine carrée de la distance aphélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie vraie est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique.*

DÉMONSTRATION. C'est une propriété des triangles rectangles, tels que *RSM*, que la tangente de la moitié de l'angle RSM est égale au côté opposé RM, divisé par la somme des deux autres côtés SR, SM (3848); ainsi dans les triangles rectangles MSR et NCR on a cette proportion : tang. $\frac{1}{2}$ MSR : tang. $\frac{1}{2}$ NCR :: $\frac{RM}{SR + SM} : \frac{RN}{CR + CN}$; si l'on met à la place du rapport de RM à RN, celui de CD à CA, qui lui est égal par la propriété de l'ellipse, et à la place de SR + SM, sa valeur PR. $\frac{SA}{CA}$ (3403), et enfin PR à la place de CR + CN, on changera la proportion en celle-ci : tang. $\frac{1}{2}$ MSR : tang. $\frac{1}{2}$ NCR :: $\frac{CD \cdot CA}{PR \cdot SA} : \frac{CA}{PR}$ :: CD : SA; et nommant a le demi-axe de l'ellipse, et e l'excentricité CS, on aura T. $\frac{1}{2}$ MSR : tang. $\frac{1}{2}$ NCR :: CD : SA :: $\sqrt{(aa - ee)}$ [a] : $a + e$; on divisera les deux derniers termes par $\sqrt{(a + e)}$, et l'on aura T. $\frac{1}{2}$ MSR : T $\frac{1}{2}$ NCR :: $\sqrt{(a - e)} : \sqrt{(a + e)}$, :: $\sqrt{(PS)} : \sqrt{(SA)}$. Donc la ra-

(a) $\sqrt{aa\text{-}ee}$ est la valeur de CD (3402).

cine de la distance périhélie PS est à celle de la distance aphélie AS, comme la tangente de la moitié de l'anomalie vraie ASM est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique NCR ou ACN. C. Q. F. D.

1241. *La différence entre l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne est égale au produit de l'excentricité par le sinus de l'anomalie excentrique.*

Démonstration. Le secteur circulaire ANSA est égal au secteur de l'anomalie moyenne ACX (1239); si l'on ôte de tous deux la partie commune ACN, on aura le secteur NCX égal au triangle CNS. La surface du secteur circulaire NCX est égale au produit de CN par la moitié de l'arc NX; la surface du triangle CNS est égale au produit de CN par la moitié de la hauteur ST, qui est une perpendiculaire abaissée du foyer S sur la base NC, prolongée au-delà du centre C; ainsi les deux surfaces étant égales, et ayant un des produisans CN qui est commun à toutes deux, les autres produisans sont aussi égaux; donc l'arc NX est égal à la ligne droite ST. Mais dans le triangle STC, rectangle en T, l'on a ST = CS. sin. TCS, suivant l'expression ordinaire de la trigonométrie rectiligne (3801); donc NX = CS. sin. TCS = CS. sin. ACN; donc la différence NX entre l'anomalie excentrique AN et l'anomalie moyenne AX est égale au produit de l'excentricité CS par le sinus de l'anomalie excentrique ACN. C. Q. F. D.

1242. Pour comparer entre elles les lignes NX, ST, CS, il faut qu'elles soient exprimées en parties de même espece. C'est en degrés, minutes et secondes, qu'on exprime les anomalies moyennes; c'est donc en secondes qu'il faut exprimer ST, et l'excentricité CS. Pour y parvenir il suffit de savoir que le rayon AC d'un cercle quelconque ANX est égal à environ 57°, ou à l'arc de 206264″8 (3467, 3499): ainsi l'on aura l'arc équivalent à l'excentricité CS, en faisant cette proportion: La distance moyenne ou le rayon AC est à l'excentricité CS comme l'arc égal au rayon est à l'arc équivalent à CS, ou au nombre de secondes que contient l'excentricité; donc ce nombre est $\frac{206264''8. \ CS.}{AC}$.

Si l'on fait AC : CS :: 1 : e, c'est-à-dire si e est l'excentricité en parties de la distance moyenne (1278), on aura $e = \frac{CS}{AC}$; et pour exprimer l'excentricité en secondes, il suffira de multiplier par e le nombre 206264″8, dont le logarithme est 5,3144251332. C'est aussi le complément arithmétique du log. sin. 1″, en sorte

que

que $206264''8 = \frac{1''}{\sin. 1''}$, et $\sin. 1'' = \frac{1''}{206264''8}$. Aussi toutes les fois que Mayer veut exprimer une quantité en secondes, il la divise par le sinus de 1''. Si au contraire il veut exprimer en décimales du rayon un nombre de secondes, il le multiplie par sin. 1''. En effet, le sinus et l'arc de 1'' sont sensiblement égaux : on peut dire 1'' : sin. 1'' :: un nombre de secondes n est au même nombre exprimé en parties pareilles à celles de sin. 1'', c'est-à-dire en décimales du rayon ; et le quatrieme terme de cette analogie est n sin. 1''. Cette maniere peut se retenir plus facilement, et sin. 1'' tient moins de place dans une formule ; quelquefois aussi j'écrirai 57° au lieu de 206264''8.

Il en est de même de toutes les quantités qu'on trouve dans les calculs, exprimées en parties du rayon ; lorsqu'on les veut avoir en secondes, on les multiplie par 206264'', ou l'on ajoute à leur logarithme le logar. constant 5,3144251332. C'est le contraire si l'on a des arcs en secondes, et qu'on veuille les réduire en décimales du rayon.

1243. On verra bientôt l'application des deux théorêmes (1240 et 1241) avec un exemple (1244); mais pour plus de facilité, nous donnerons dans la table suivante pour chaque planete, les deux logarithmes constans qui servent pour les proportions contenues dans ces deux théorêmes. Le premier, pour l'anomalie excentrique, est la moitié de la différence entre le logarithme de la distance aphélie et celui de la distance périhélie (1240) ; il s'ajoute avec le logarithme de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie, pour avoir celui de la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique. Le second logarithme est pour trouver l'anomalie moyenne : c'est la somme du logarithme de l'excentricité (1278) et du logarithme de 57° ; on ajoute ce logarithme constant avec celui du sinus de l'anomalie excentrique, pour avoir celui de la différence qu'il y a entre l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne. Enfin, nous avons joint à la même table le logarithme de la moitié du petit axe, pour servir à trouver la distance (1246) ; c'est la demi-somme des logarithmes de la distance aphélie et de la distance périhélie.

Les logarithmes constans pour l'orbite de la Lune supposent sa moyenne distance égale à l'unité, et son excentricité 0,05503568, qui donne pour la plus grande équation 6° 18' 31''6 (1278) ; c'est ainsi que Mayer supposoit la quantité moyenne de l'équation, et l'on n'y a rien changé (1480).

Logarithmes constans, d'après les nouvelles Tables.

PLANETES.	Premier Logarit. pour l'anomalie excentrique.	Second Logarit. pour l'anomalie moyenne.	Logarithme du demi-axe conjugué.
Mercure,	0 0905430	4 6272651	9 5784504
Vénus,	0 0029905	3 1522975	9 8593275
Le Soleil,	0 0072927	3 5394899	9 9999387
Mars,	0 0405448	4 2833172	0 1810076
Jupiter,	0 0208955	3 9963597	0 7157339
Saturne,	0 0244430	4 0643360	0 9788940
La Lune,	0 0239255	4 0550625	9 9993412
Herschel,	0 8206824	3 9919124	1 2801270

1244. Exemple. Je suppose qu'on connoisse l'anomalie vraie de Mars 1s 0° 8′ 40″, et qu'on veuille la convertir en anomalie moyenne: le logarithme de la distance aphélie, suivant mes tables, est 5,221552; le logarithme de la distance périhélie, 5,140463; la moitié de la différence de ces deux logarithmes est 0,0405448, c'est le logarithme constant pour la premiere analogie. Les distances qui répondent aux deux logarithmes des tables sont 166553o et 1381856, la moitié de la somme de ces deux distances est 1523693; c'est le demi-axe de l'ellipse, ou la distance moyenne de Mars au Soleil; la moitié de la différence entre ces mêmes distances est 141837, excentricité de Mars. Il faut d'abord convertir cette excentricité en fraction de la distance moyenne de Mars, prise pour unité, en disant: 152369 est à 1, comme 14183 est à 0,0930877: c'est une fraction décimale de la distance de Mars. Cette fraction qui exprime l'excentricité a pour logarithme 8,9688921; pour la réduire en secondes, on la multiplie par l'arc égal au rayon (1242) et l'on trouve 19200,″ dont le logarithme est 4,2833172: voici l'opération détaillée.

Logarithme de l'excentricité, 14183,7	4, 1517895
Otez le logarithme du demi-axe, 152369	5, 1828974
différence	8, 9688921
Ajoutez le logarithme de 57°	5, 3144251
Somme, log. cons. pour la 2e analogie (1243) . .	4, 2833172

Log. constant pour la premiere analogie		0, 0405448
L. T. de la demi-anomalie vraie . .	15° 4′ 20″	9, 4302374
L. T. de la demi-anomalie excent. .	16 28 13,8	9, 4707822
Donc l'anomalie excentrique est . .	32 56 27,6	
Logarithme constant pour la sèconde analogie , . .		4, 2833172
Logarit. du sin. de l'anom. excent. .	32° 56′ 27″6	9, 7354193
Logarithme de 10440″9 , ou	2 54 0,9	4, 0187365
Ajoutez à l'anomalie excentrique, .	32 56 27,6	
Anomalie moyenne , ...	35 50 28,5	

Si l'anomalie vraie donnée surpasse six signes ou 180°, on prendra ce qui s'en manque pour aller à 360°, ou à 12 signes, afin d'avoir la distance à l'aphélie par le plus court chemin, dont on fera le même usage que dans l'exemple précédent; mais après avoir trouvé l'anomalie moyenne, on aura soin de reprendre aussi son supplément à 360° pour avoir toujours cette anomalie moyenne comptée suivant l'ordre des signes.

C'est ainsi qu'on trouve l'anomalie moyenne, en supposant connue l'anomalie vraie; mais c'est ordinairement l'anomalie moyenne qui est donnée, et c'est l'autre que l'on cherche: voici le procédé qu'il faut suivre.

1245. Connoissant l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie. Il faut voir *à peu-près* par les tables quelle est l'équation de l'orbite qui a lieu au degré d'anomalie qui est donné; on l'applique à l'anomalie moyenne pour avoir la vraie; et cette anomalie vraie se convertit en moyenne par les regles précédentes. Si l'anomalie moyenne qui en résulte, est la même que celle qui étoit donnée, c'est une preuve que l'équation employée étoit exacte; si l'on trouve une anomalie moyenne trop grande, on diminue l'anomalie vraie supposée, et l'on a ainsi, après deux suppositions, au moyen d'une simple proportion, une anomalie moyenne exactement d'accord avec celle qui étoit donnée; la différence entre celle-ci et l'anomalie vraie qui a servi à la trouver, est l'équation exacte que l'on cherchoit [a].

1246. LE RAYON VECTEUR, ou la distance d'une planete au Soleil, se trouve par le moyen de l'anomalie vraie et de l'anomalie excen-

(a) On peut éviter ces tâtonnemens, en prenant les variations de l'anomalie moyenne et de l'anomalie vraie, dans une table d'équation déja faite, ou en considérant qu'elles sont entre elles comme b sin.² x est à sin.² u (3481).

trique en faisant cette proportion : *Le sinus de l'anomalie vraie est au sinus de l'anomalie excentrique, comme la moitié du petit axe est au rayon vecteur.*

Démonstration. Ayant tiré la ligne NQ (fig. 70), parallele au rayon vecteur MS, on a par les triangles semblables cette proportion, SM : QN :: RM : RN :: CD : CK ou CN; donc SM : CD :: QN : CN :: sin. QCN : sin. CQN :: sin. RCN : sin. RSM; donc sin. RSM : sin. RCN :: CD : SM, qui est la distance cherchée.

Pour faciliter l'usage de ce théorême, nous avons mis dans la table de l'art. 1243 les logarithmes de chaque demi-axe conjugué pour les planetes principales, en supposant l'excentricité telle qu'elle est dans nos tables; on sait par la propriété ordinaire de l'ellipse, que CD ou $\sqrt{(SD^2 - CS^2)} = \sqrt{(CP^2 - CS^2)} = \sqrt{(CP + CS)}$ $\sqrt{(CP - CS)}$; c'est-à-dire que CD est égal au produit des racines de la distance aphélie et de la distance périhélie.

Exemple. L'anom. vraie (1244), étant de 30° 8′ 40″, l'anom. exc. 32° 56′ 27″6; on demande la dist. de Mars au Soleil, ou le rayon vecteur. On ajoutera ensemble le logarithme de la distance aphélie et le logarithme de la distance périhélie, on prendra la moitié de leur somme, et l'on aura le logarit. du demi-axe conjugué,.. 0,1810076

Ajoutez le logarithme sin. anom. exc. 32° 56′ 27″,6	9,7354193
	9,9164269
Otez le logarithme sin. anom. vraie,	9,7008609
Reste le logarithme de la distance, 0,64273	0,2155660

Problême de Képler : connoissant l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie.

1247. Jusqu'ici nous avons donné les regles nécessaires pour convertir l'anomalie vraie en anomalie moyenne, problême facile, et auquel nous avons coutume de réduire le problême de Képler qui en est l'inverse; néanmoins, pour satisfaire aussi le lecteur sur les méthodes directes qu'on peut employer pour résoudre le problême de Képler par approximation, nous allons en rapporter une solution.

Dans le cercle ANB (fig. 71), circonscrit à l'orbite AMB d'une planete, on a vu que AX étant pris pour anomalie moyenne, la différence NX entre l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique ACN est égale à la perpendiculaire ST (1241); si du point X on tire une ligne XY parallele à NCT, ou perpendiculaire sur ST, la petite ligne SY sera la différence entre l'arc NX égal à ST, et le sinus de cet arc, qui est égal à YT; cette différence entre l'arc

et le sinus n'excede pas une demi-seconde, lorsque l'arc NX ne va pas au-delà d'un degré et demi; on peut alors la négliger entièrement, et considérer les lignes NC, XS, comme paralleles entre elles : dans ce cas l'angle CXS est égal à l'angle NCX. Dans le triangle SCX on connoît deux côtés et l'angle compris : savoir, l'excentricité SC, le rayon du cercle, c'est-à-dire CX et l'angle compris SCX qui est le supplément de l'anomalie moyenne donnée, ACX; on trouvera donc l'angle CXS égal à NCX, qui, retranché de l'anomalie moyenne ACX, donnera l'anomalie excentrique ACN dont le supplément est NCS. Dans le triangle NCS, on connoît encore les deux côtés SC, CN, et l'angle compris NCS; on trouvera donc l'angle NSC ou NSA. On cherchera aussi SN pour parvenir à trouver la distance (1241). Enfin on dira, suivant la propriété de l'ellipse (3387) : RN est à RM, ou le grand axe est au petit axe, comme la tangente de l'angle NSR est à la tangente de l'anomalie vraie MSR.

On pourroit aussi, pour trouver MSR par le moyen de MCS, à la place des deux dernieres opérations, employer l'analogie de l'article 1240, en renversant les termes.

Si l'angle CXS, ou l'arc NX qui en differe très peu, est assez grand pour que son sinus égal à TY soit sensiblement moindre que l'arc, ou que NX, c'est-à-dire, si cet angle passe 1° 30′, on prendra la différence de l'arc au sinus dans la table suivante, en *décimales du rayon* CA, et l'on aura SY; on cherchera aussi le côté SX du triangle CSX; alors dans le triangle XSY, rectangle en Y, on connoîtra SX et SY; on trouvera l'angle SXY qui, retranché de SXC, donnera YXC, égal à l'angle NCX, dont on avoit besoin dans le calcul précédent pour le retrancher de l'anomalie moyenne; le reste du calcul sera le même; mais si l'on a pris la différence de l'arc au sinus pour un arc trop grand, ou si l'arc NCX n'a pas été bien supposé, il faudra y revenir pour l'avoir plus exactement.

On voit, par la nécessité d'employer la différence entre un arc et son sinus, que ce problême dépend de la quadrature du cercle, et que cette méthode s'emploieroit difficilement si l'excentricité étoit assez grande pour que l'arc NX devînt extrêmement grand, comme cela a lieu dans les cometes; mais on y supplée, soit par la méthode indirecte (1244), soit par d'autres moyens (3189). La table suivante peut se calculer par des méthodes que nous expliquerons (3465). Dans les tables de Berlin, *t.* 3. *pag.* 172, *et suiv.*

on trouvera ces sinus exprimés en secondes pour toutes les minutes ; mais pour Mercure, la différence ne va pas à 13°. Ainsi il est inutile d'étendre plus loin cette table pour les planetes.

Différence entre les arcs de cercles et leurs sinus.

Deg.	Différence en décimales.	En secondes.		Deg.	Différence en décimales.	En secondes.	
1	0 0000009	0'	0"	7	0 0003037	1'	3"
2	0 0000071	0	1	8	0 0004532	1	33
3	0 0000239	0	5	9	0 0006451	2	13
4	0 0000567	0	12	10	0 0008847	3	3
5	0 0001108	0	23	11	0 0011772	4	3
6	0 0001913	0	39	12	0.0015278	5	15
7	0 0003037	1	3	13	0 0019417	6	41

1248. Exemple. Supposons avec M. Cassini dans l'orbe de Mercure l'excentricité 0,20878, c'est-à-dire, 20878 parties dont le demi-axe est cent mille, et cherchons l'anomalie vraie qui répond à 60° d'anomalie moyenne : on trouvera d'abord CG=0,9779626 par l'art. 1246. Dans le triangle XCS dont on connoît les deux côtés et l'angle compris XCS=120°, on cherchera l'angle X, en disant, suivant la regle de trigon. rectiligne (3837) : La somme des côtés CX et CS (ou la distance aphélie) est à leur différence (qui est la distance périhélie), comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne est à la tangente de 20° 42′ 7″,6, qui, retranchés de cette moitié, donnent l'angle X de 9° 17′ 52″,4, et le côté SX de 1,119093 ; la quantité SY est 0,0007031, suivant la table précédente; or, SX:SY :: R : sin. 2′ 10″; ainsi l'on ôtera cette quantité de l'angle X, et l'on aura CXY, égal à NCX, 9° 15′ 42″,8 (a) ; c'est ce qu'il faut retrancher de l'anomalie moyenne, il restera pour l'angle ACN 50° 44′ 17″2, dont le supplément NCS est de 129° 15′ 42″8. Ainsi, dans le triangle NCS, on pourra trouver l'angle S en disant : La distance aphélie est à la distance périhélie, comme la tangente de 25° 22′ 8″6 est à la tangente d'un angle qui,

(a) Pour plus d'exactitude, il faut prendre la quantité SY qui répond à 9° 15′ 42″8, mais la différence est insensible; cependant je suppose ici 2′ 9″6 qui est la quantité exacte.

ajouté à 25° 22′ 8″6, donne NSR=42° 36′ 43″6. Pour en conclure l'anomalie vraie, on dira : RN est à RM, ou le demi-grand axe, 1, est à la moitié du petit axe, comme la tang. NSR est à la tang. de MSR, qui sera de 41° 58′ 35″7; c'est l'anomalie vraie qui répond à 60° d'anomalie moyenne; la différence des deux anomalies est l'équation de l'orbite, 18° 1′ 24″3. Cassini (*pag.* 148) trouve 2″ de moins, mais le calcul que je rapporte ici a été fait avec plus de soin.

1249. LA DISTANCE de la planete au Soleil seroit aisée à trouver en même temps que l'anomalie vraie; car dans les triangles RSN, RSM, en prenant SR pour rayon, les côtés SN et SM seront comme les sécantes des angles RSN, RSM, ou, ce qui revient au même, en raison inverse des cosinus; donc le cosinus de l'anomalie vraie est au cosinus de l'angle RSN, comme le côté SN trouvé ci-devant (1247) est au rayon vecteur SM qui est la distance de la planete au Soleil; mais il vaut mieux chercher la distance par l'analogie 1245.

La méthode que je viens d'expliquer pour le problême de Képler a été donnée par Cassini dans les mémoires de l'académie pour 1719, et dans ses élémens d'astronomie, *pag.* 141; je la trouve plus aisée à employer que la plupart des méthodes proposées jusqu'ici.

1250. On peut résoudre aussi le problême de Képler par une approximation directe, fondée sur l'article 1241, en calculant le rapport qu'il y a entre le changement de l'anomalie excentrique et celui de l'anomalie moyenne. Simpson en 1740, et M. Cagnoli en 1786, ont employé ce moyen. L'excentricité réduite en secondes est la plus grande différence possible entre ces deux anomalies; on peut donc estimer à la vue, par le moyen des sinus, la différence qui a lieu dans un cas particulier. Soit x l'anomalie excentrique et z l'anomalie moyenne qui est $= x + e$ sinus x (1241), et supposons qu'on connoisse à-peu-près z, et par conséquent $z - x$; multipliant l'excentricité e par le sinus de l'anomalie excentrique x, on aura plus exactement x, et $z - x$; nommons δz l'erreur commise dans l'anomalie excentrique, et divisant δz par $1 + e$ cos. x, on aura δx (3447). Dans cette opération, l'on augmentera ou diminuera x de la moitié de δx (qu'on peut prendre ici pour δz afin d'employer l'anomalie excentrique qui tient le milieu de l'erreur ou du changement; par ce moyen l'on aura δx très exactement; l'on corrigera la valeur supposée de x, et on l'aura exactement, si la valeur de l'erreur δz n'a été que de quelques minutes. Connoissant l'anomalie excentrique, on trouvera facilement l'anomalie vraie (1240).

Supposons pour Mercure $z = 90°$, l'excentricité 11° 46′ 55″, et x de 78° 13′, quoiqu'il puisse y avoir un quart de degré de plus. Son sinus multiplié par l'excentricité donne 11° 32′ 1″ pour la différence cherchée $z - x$; ce qui supposeroit 89° 45′ seulement pour l'anomalie moyenne; la différence est plus petite de 14′ 54″ que celle qu'on a supposée.

Il faut diviser cette différence par $1 + e \cos. x$; mais pour que x soit plus exact, augmentons-le de 7′ 27″, moitié de la différence trouvée, en supposant que δx est aussi de 14′ 54″; alors $x + \frac{1}{2}\delta x$ sera 78° 20′ 27″, et divisant δz par $1 + e \cos. (x + \frac{1}{2}\delta x)$, on trouve 14′ 18″; ce qui donne 78° 27′ 18″ pour anomalie excentrique, et pour la différence $z - x$, 11° 32′ 42″.

En multipliant la nouvelle anomalie excentrique, on trouve une différence plus petite de 5″; or puisque dans la premiere opération 14′ 54″ ont produit 14′ 18″41, les 5″ en feront aussi 5 sur l'anomalie excentrique, et elle deviendra 78° 27′ 23″. Il n'y a pas en effet un quart de seconde d'erreur, et l'on pourra facilement s'assurer d'un centieme de seconde.

Cette méthode peut s'appliquer aux cometes avec la même facilité; elle est sur-tout commode quand il s'agit de calculer des tables, il n'y a que trois logarith. à chercher pour calculer et l'équation et la distance, tandis que, par les regles précédentes, il en faut six, et une proportion.

1251. Les tables d'équation que M. de Lambre a calculées pour Mars et Mercure ont été faites par les différences premieres et secondes; on n'est obligé de les vérifier que de 15 en 15° ou de 30 en 30.

Si l'on nomme u l'an. vraie, z l'an. moyenne, q l'équat. e l'excent. b le demi-petit axe, on a les formules suiv. pour les différences premieres et secondes. (*Mém. de l'acad. de Toulouse*, *t.* 4.)

$$\delta q = \delta z - \frac{1 + \frac{1}{2}e^2}{b^3}\delta z + \frac{2e\delta z \cos. u}{b^3} - \frac{\frac{1}{2}e^2 \delta z}{b} \cos. 2u.$$

$$\delta\delta q = \frac{-2e\delta^2 z. \sin. u (1 - e \cos. u)^3}{57°. b^6}$$. Les secondes différences croissent assez uniformément, ce qui facilite beaucoup le calcul. $\delta^2 z$ signifie le carré de δz.

1252. Le mouvement horaire vrai d'une planete sur son orbite peut se calculer aussi avec autant de facilité que de précision, par le moyen de ces petites variations. J'avois donné une méthode à cet effet (*Mém.* 1762); mais en voici une plus simple. Soit δu le mouvement horaire vrai d'une planete vue du Soleil, δz le mouvement moyen, r le rayon vecteur, b le petit demi-axe, le

demi-grand

demi-grand axe étant $= 1$, l'on aura $du = dz. \frac{\sqrt{(1-ee)}}{rr}$ (3481) $= \frac{b}{rr} dz$. Si la distance moyenne est a, on aura $\frac{ab\,dz}{rr}$.

Il est plus exact d'employer le rayon vecteur qui tient le milieu entre les deux extrêmes de l'intervalle, pour lequel on cherche le mouvement ; alors on aura $\frac{ab\,dz}{r(r+dr)}$; dans cette formule tout est constant, excepté le rayon vecteur qu'on a toujours très exactement par les tables ; ainsi le double de son logarithme étant retranché des logarithmes ci-joints, donne le mouvement horaire héliocentrique vrai pour chaque planete (a). Ces logarithmes supposent que la distance du Soleil est l'unité.

Mercure. .	1,9543394
Vénus. . .	2,0994649
La Terre. .	2,1697514
Mars. . . .	2,2593847
Jupiter. . .	2,5278151
Saturne. . .	2,6595899
Herschel. .	2,8096130

Pour le problême de Képler, il y a aussi une méthode analytique (3480). Il y a les méthodes de Grégory, de Wallis, celles de Keill et de Machin (*Trans. phil.* 1713, 1737); celle de la Hire (Mém. de l'acad. 1710); celle de Newton dans le premier livre de ses principes, par la cycloïde et par une espece de série; celle de Herman dans le 1er vol. des Mém. de Pétersbourg (M. d'Alembert en fait l'éloge dans l'encyclopédie); celle de Simpson (*Essays on several subjects*, 1740,); celle-ci est une des plus simples pour la pratique. M. l'abbé Bossut dans les pieces des prix 1766, M. Cagnoli dans sa Trigonométrie p. 396, en ont aussi donné (3486). Mais il y a bien des personnes qui trouvent que la méthode indirecte (1238) est la plus facile : nous en donnerons d'autres applications (1301) (b).

Hypothese elliptique simple.

1253. Pour simplifier les opérations qu'exige la théorie exacte de Képler (1247), on a souvent employé ce que Cassini appelle *Hypothese elliptique simple*, et qui abrege considérablement le calcul. Cette hypothese consiste à supposer que les angles au foyer

(a) Dans les tables de Berlin, tom. 2, p. 250, il y a une table des mouvemens horaires pour toutes les planetes, mais on y a employé les élémens des tables de Halley.

(b) Des personnes plus exercées trouvent que nous avons trop négligé dans cet ouvrage les méthodes analytiques, et qu'elles sont presque toujours préférables ; mais nous avons voulu éviter, dans un livre élémentaire, tout ce qui pouvoit effrayer un certain ordre de lecteurs.

supérieur de l'ellipse croissent uniformément, et soient proportionnels au temps, ce qui est à-peu-près vrai; c'est-à-dire que l'angle AFL (FIG. 74) croisse toujours également en temps égaux, quoique les anomalies vraies, comme ASL, soient fort inégales; ainsi, dans l'hypothese elliptique simple l'angle AFL se prend pour l'anomalie moyenne. Cette hypothese est une suite naturelle de celle de Ptolémée (1070). Képler avoit remarqué qu'on approchoit des observations par cette hypothese, même en prenant l'orbite pour un cercle (1213). Boulliaud reconnut qu'en employant l'ellipse, et supposant toujours le mouvement uniforme autour d'un des foyers, on représentoit encore assez bien les inégalités des planetes, et que le calcul en étoit fort simple, en imaginant un cercle et un épicycle à la place de l'orbite elliptique (*Astron. Phil.* 1645, *pag.* 46).

Seth-Ward, professeur d'astronomie à Oxford, publia en 1654 un Examen de l'astronomie philolaïque, et, en 1656, un ouvrage intitulé *Astronomia geometrica*, in-8°, où il donne (à la page 8) une autre maniere fort simple de calculer l'équation dans une orbite elliptique, en supposant le mouvement uniforme autour d'un des foyers. En conséquence, les Anglois ont donné à l'hypothese elliptique simple le nom d'*hypothese de Ward :* c'est le nom que lui donnent Keill et M. le Monnier (*Inst. astr. page* 510), quoique Mercator et Ward lui-même aient cité Boulliaud, comme le premier auteur dans cette matiere. Cette hypothese a été employée par Street dans ses tables carolines, mais avec une correction que Keill attribue à Boulliaud, par erreur; il paroît que Street la tenoit de Robert Anderson (*Astronomia Carolina* 1710, *pag.* 40). On peut voir, sur l'exactitude de ces méthodes, Mercator, *Phil. Trans.* 1670, n°. 57.

1254. Suivant la méthode proposée par Seth-Ward, on prolonge FL, de maniere que FE soit égale au grand axe AP de l'ellipse: on a LE = LS, parceque FL et LS équivalent aussi au grand axe par la propriété de l'ellipse (3406); ainsi le triangle LSE est isoscele, l'angle E égal à l'angle LSE, et l'angle extérieur FLS double de l'angle E. Suivant une proportion de trigonométrie (3837), la demi-somme des côtés FE et FS est à leur demi-différence; comme la tangente du demi-supplément de l'angle LFS est à la tangente de la demi-différence des angles E et FSE : mais la demi-somme de FE et FS est égale à AS, leur demi-différence égale à PS; la demi-somme des angles FES, FSE, est égale à la moitié de l'angle externe AFL, ou à la moitié de l'anomalie

moyenne; la demi-différence de ces angles est aussi la demi-différence de l'angle FSE et de l'angle LSE (qui est égal à LES); c'est donc la demi-anomalie vraie ASL; ainsi il suffira de faire cette proportion : *La distance aphélie est à la distance périhélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne est à la tangente de la moitié de l'anomalie vraie.*

1255. La distance SL de la planete au Soleil se trouve aussi par une simple proportion, au moyen du triangle SLF, en disant: Le sinus de l'équation SLF est au double FS de l'excentricité, comme le sinus de l'anomalie moyenne LFS est au rayon vecteur SL.

Halley fit usage de cette hypothese elliptique simple dans ses tables de la Lune, au moyen d'une petite correction (1439): mais pour les autres planetes, dont l'excentricité ne change point, Halley les avoit calculées rigoureusement dans l'hypothese de Képler, et j'en ai fait de même dans mes tables. Cela est nécessaire, sur-tout pour les planetes qui sont fort excentriques, telles que Mercure et Mars. En effet, si, dans l'exemple ci-dessus (1248), on employoit l'hypothese elliptique simple, on trouveroit l'équation de 18° 35′ 44″, plus grande de 34′ 22″ que dans l'hypothese de Képler: l'anomalie vraie dans l'hypothese elliptique simple seroit de 41° 24′ 15″; c'est le double des 20° 42′ 7″6 que nous avons trouvés dans la premiere proportion de l'article 1248, puisque cette proportion étoit la même que celle de la regle ci-dessus (1254).

Pour le Soleil, dont la plus grande équation ne va pas à 2°, la plus grande erreur de l'hypothese elliptique simple n'est que de 17″, et c'est vers 45° de distance à l'apogée ou au périgée. Dans la Lune, la différence peut aller à 1′ 35″; l'erreur se trouve en moins depuis l'apogée jusqu'à 90° d'anomalie, et depuis le périgée jusqu'à 270°, et le vrai lieu est plus avancé qu'il ne paroîtroit par l'hypothese elliptique simple: c'est le contraire dans le second et le quatrieme quart d'anomalie moyenne, où l'hypothese elliptique simple donne une trop grande anomalie (Cassini, *pag.* 147).

1256. Dominique Cassini, dans son livre sur l'origine et les progrès de l'astronomie, proposa aussi, pour le calcul des orbites planétaires, une courbe où le produit des deux lignes menées des deux foyers à chaque point de la circonférence, seroit constant. C'est une courbe du 4e degré qui devient dans certains cas une lemniscate en 8 de chiffre, et même deux ovales conjugués. Voyez les élémens de Cassini, p. 149; d'Alembert dans l'encyclopédie aux mots *Ellipse* et *Cassinoïde;* M. de Gua dans son analyse;

Grégory, *Astron. élém.* p. 331 ; *Philos. Trans.* 1704; la dissertation de M. Bonati de Ferrare (*Raccolta Ferrarese*, t. VIII, 1781), et M. Malfatti, *della Curva Cassiniana*, Pavia, 1781. Mais cette courbe ne sauroit convenir en aucune façon aux orbites des planetes.

1257. Ce que nous avons expliqué jusqu'ici au sujet de l'équation de l'orbite, suffit pour reconnoître trois propriétés, que nous aurons souvent occasion de citer en parlant de l'équation : 1°. l'équation de l'orbite est nulle dans l'apside supérieure (aphélie ou apogée), puisque vers ce point-là le lieu moyen et le lieu vrai sont confondus; mais en partant de l'apside, leur différence augmente rapidement, parceque la vîtesse vraie étant la plus petite, differe le plus de la vîtesse moyenne : 2°. cette différence s'accumule chaque jour, tant que la vîtesse vraie est moindre que la vîtesse moyenne; lorsqu'elles sont égales, il se trouve un point vers trois signes et quelques degrés d'anomalie moyenne où la différence qui a augmenté jusqu'alors, est devenue la plus grande, et où l'équation cesse d'augmenter, étant presque la même pendant quelque temps, pour diminuer ensuite jusqu'à l'apside inférieure (soit périhélie, soit périgée), où le lieu vrai et le lieu moyen se retrouvent d'accord une seconde fois : 3°. l'équation du centre est soustractive, ou se retranche du lieu moyen dans les six premiers signes pour avoir le lieu vrai, parceque la vîtesse moyenne, en partant de l'apside supérieure, est plus grande que la vîtesse vraie; ainsi le lieu moyen est plus avancé ; il faut donc ôter de la longitude moyenne la quantité de l'équation pour avoir le lieu vrai. Le contraire arrive après l'apside inférieure: la vîtesse vraie étant la plus grande, prévant à son tour sur la moyenne, et le lieu vrai se trouve toujours le plus avancé dans la seconde moitié de l'ellipse, ou dans les six derniers signes de l'anomalie; alors l'équation de l'orbite s'ajoute au lieu moyen pour avoir le lieu vrai, ou à l'anomalie moyenne pour avoir l'anomalie vraie.

De la plus grande équation.

1258. La plus grande équation peut s'observer immédiatement, comme nous le dirons bientôt (1259) : mais lorsqu'on connoît l'excentricité (1217), on peut trouver par le calcul la plus grande équation, aussi bien que le degré d'anomalie où elle arrive; pour cela il suffit de trouver le point M (FIG. 72) de la vîtesse moyenne. En effet, dès que la planete est arrivée au point où sa vîtesse angulaire DFM (c'est-à-dire l'angle qu'elle parcourt vue du Soleil)

est égale à la vîtesse moyenne, par exemple, de 59′ 8″ par jour si c'est la Terre, la longitude moyenne cesse d'anticiper sur la longitude vraie; elle en differe alors le plus qu'il est possible, parceque jusqu'à ce moment la vîtesse réelle, qui étoit plus petite, faisoit retarder tous les jours le lieu vrai sur le lieu moyen : mais dès que la vîtesse vraie est devenue égale à la vîtesse moyenne, elle est prête à la surpasser, elle va commencer à regagner ce qu'elle avoit perdu jusqu'alors, le lieu vrai se rapproche du lieu moyen, et l'équation de l'orbite diminue. Ainsi toute la difficulté consiste à trouver le point M, et l'anomalie vraie AFM de la planete au moment où sa vîtesse est égale à la vîtesse angulaire moyenne. Pour cela, ayant pris une ligne FM, moyenne proportionnelle entre les deux demi-axes de l'orbite, on décrira du foyer F comme centre un cercle MN sur le rayon FM, et ce cercle aura une surface égale à celle de l'ellipse (3401). Supposons un corps qui décrive le cercle MN dans un temps égal à celui de la révolution de la planete dans son ellipse; sa vîtesse angulaire sera constamment égale à la vîtesse angulaire moyenne de la planete; l'aire décrite dans le cercle sera toujours égale à l'aire décrite en même temps dans l'ellipse, puisque les aires totales sont égales et parcourues en temps égaux, les durées des révolutions étant les mêmes, et les aires partielles de l'ellipse proportionnelles aux parties du temps: par exemple, si Mercure décrit en un jour une aire DFR de son ellipse égale à la 365ᵉ partie de la surface elliptique, l'aire EFO décrite dans le cercle sera aussi la 365ᵉ partie de l'aire du cercle (qui est égale à l'ellipse) : la vîtesse vraie de Mercure (ou l'angle DFR) sera donc égale à la vîtesse moyenne en M, c'est-à-dire à l'angle EFO; car ce sont deux secteurs égaux qui ont la même longueur FM, la même surface, et par conséquent le même angle; d'ailleurs les triangles égaux MED, MRO, qui sont l'un en dehors du cercle, l'autre en dedans, font voir que le secteur elliptique est précisément égal au secteur circulaire qui a le même angle en F: donc pour trouver le point de la vîtesse moyenne, il faut trouver à quel degré répond l'intersection M de l'ellipse, et du cercle qui lui est égal en surface. Pour cet effet ayant tiré du point M à l'autre foyer B de l'ellipse une ligne MB, l'on aura un triangle BFM, dans lequel on connoît les trois côtés, savoir BF qui est le double de l'excentricité; FM qui est la moyenne proportionnelle entre les deux demi-axes, et BM qui est la différence entre FM et le grand axe (parceque les deux lignes FM et MB font entre elles la valeur du grand axe); ainsi résolvant

le triangle BFM, on cherchera l'angle F qui est l'anomalie vraie de la planete au temps de la plus grande équation.

1259. EXEMPLE. Soit pour Mercure le demi-axe CA = 38710, et le demi-axe conjugué = 37883, CF = 7955 $\frac{1}{2}$, BF = 15911, FM sera = 38294 $\frac{1}{2}$. On résoudra le triangle BFM; la méthode la plus exacte est celle-ci (3980): de la demi-somme des trois côtés on ôte séparément chacun des trois côtés; de la somme des logarithmes des deux différences des côtés qui comprennent l'angle cherché, l'on ôte la somme des deux logarithmes qui appartiennent à la demi-somme des trois côtés et à la différence du côté opposé à l'angle cherché; la moitié du reste est le logarithme de la tangente de la moitié de l'angle cherché.

Dans le cas particulier de la plus grande équation, le calcul se réduit à cette regle : de la distance aphélie on ôte séparément la moyenne proportionnelle entre les deux demi-axes et le 3e côté BM (différence entre le grand axe et la moyenne), on a deux différences dont on cherche les logarithmes, et l'on retranche le plus petit du plus grand; de cette différence de logarithmes on ôte celle des logarithmes de la distance aphélie et de la distance périhélie, la moitié du reste est le logarithme de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie. Par la méthode des cosinus (3978), on prend les logarithmes de la distance aphélie et de la différence au côté BM, on y ajoute les complémens des logarithmes de BF et FM; la moitié de la somme est le logarithme cos. de la demi-anomalie vraie. Si l'angle étoit très petit, la regle des cosinus donneroit moins de précision; mais s'il est très grand, elle est préférable, étant un peu plus courte. On verra encore une autre regle (3914).

Dans notre exemple on trouve l'angle BFM de 81° 6′ 5″; c'est l'anomalie vraie au temps de la plus grande équation; d'où l'on peut conclure (1244) l'anomalie moyenne 104° 46′ 5″; leur différence 23° 40′ 0″ est la plus grande équation de l'orbe de Mercure: elle est ainsi dans mes nouvelles tables. On trouve une expression analytique assez commode pour la plus grande équation dans les éphémérides de Berlin 1788.

1260. Après avoir indiqué le moyen de calculer l'équation, nous parlerons de la maniere de l'observer. Depuis l'instant où une planete part de son aphélie A (FIG. 72) jusqu'au temps où elle arrive au point M de sa plus grande équation, sa vîtesse est moindre que la vîtesse moyenne; ainsi l'anomalie vraie, plus petite que l'anomalie moyenne, en differe de plus en plus; lorsque la planete ayant passé le périhélie P se trouve au point G, vers neuf signes

d'anomalie, sa distance vraie AFG à l'aphélie est également plus petite que sa distance moyenne, de la quantité de la plus grande équation. Si l'on a deux longitudes vraies de la planete, observées en G et en M, elles différeront entre elles de la quantité de l'angle GFM, qui est la somme des deux anomalies vraies; mais la somme des deux anomalies moyennes sera plus grande, et cela du double de l'équation, puisque chaque distance vraie est plus petite que la distance moyenne, de la quantité de la plus grande équation. Il est aisé de calculer en tout temps la somme des deux anomalies moyennes, quoiqu'on ne connoisse pas le lieu de l'aphélie A, parceque la somme de deux anomalies moyennes est égale au mouvement moyen de la planete, dans cet intervalle de temps, et on le trouve aisément quand on connoît la durée de la révolution (1161) [a]; ainsi l'excès du mouvement moyen calculé, sur le mouvement vrai observé, donne le double de la plus grande équation, pourvu que l'on ait fait ces deux observations en M et en G, c'est-à-dire aux temps de la vîtesse moyenne (1258). Ce sera le mouvement vrai qui sera le plus considérable, si l'on prend la premiere observation avant le périhélie et la seconde après, c'est-à-dire que le mouvement soit MPG comme dans l'exemple suivant (1262).

1261. Pour discerner les temps et les observations convenables à cette recherche, un observateur isolé, qui ne connoîtroit en aucune façon la situation de l'orbite de la planete, n'auroit qu'à rassembler un grand nombre de positions observées, les comparer deux à deux, et voir combien le mouvement vrai observé différeroit du mouvement moyen calculé pour chaque intervalle; ou bien prendre pour époque une de ces longitudes, et lui comparer toutes les autres pour avoir le mouvement vrai observé, et chercher le mouvement moyen pour chaque intervalle. Si on a comparé les observations deux à deux, la plus grande de toutes les différences entre le mouvement vrai et le mouvement moyen donnera le double de la plus grande équation; car le mouvement vrai differe du mouvement moyen à raison de l'équation soustractive dans l'une des observations et additive dans l'autre: donc si l'on a des observations faites dans tous les points de l'orbite, ou du moins dans un assez grand nombre pour que les deux points de la plus grande équation s'y soient trouvés, on en trouvera deux où le mouvement vrai sera

(a) Pour plus d'exactitude, c'est la révolution anomalistique (1311) dont il faut se servir; mais, dans les premieres approximations, on peut se servir de la révolution tropique.

moindre ou plus grand que le mouvement moyen, du double de la plus grande équation. Si on les a comparées avec une seule observation, ce sera la plus grande différence additive et la plus grande soustractive, qui, étant ajoutées, donneront le double de l'équation. L'on s'est servi de cette méthode pour le 4e satellite de Jupiter (2946).

Actuellement que l'on connoît, à très peu près, les lieux des apsides et des moyennes distances de toutes les planetes, on n'a qu'à choisir du premier coup les observations faites avant et après le périhélie ou l'aphélie, vers le temps de la plus grande équation, comme dans l'exemple suivant.

1262. EXEMPLE. Le 7 octobre 1751, le vrai lieu du Soleil observé par la Caille, en y faisant entrer trois jours d'observations discutées

et comparées entre elles, fut trouvé de	6s 13° 47′ 13″ 7
Le 28 mars 1752 cette long. vraie fut de	0 8 9 25 5
La différence de ces deux longitudes, ou le mouvement vrai, est donc	5 24 22 11, 8
Mais dans cet intervalle le mouvement moyen avoit dû être par le calcul	5s 20° 31′ 43″ 2
Differ. double de la plus grande équation	3 50 28, 6
Dont la moitié est l'équation	1 55 14, 3

Ce seroit là exactement la plus grande équation de l'orbite, si dans les deux observations le Soleil se fût trouvé exactement dans les points de sa plus grande équation ; mais ayant calculé par les tables chacune de ces deux équations, on a trouvé qu'il s'en falloit de 18″6 que la somme des deux équations qui avoient lieu le 7 octobre et le 28 mars, ne fût exactement le double de la plus grande équation [a] ; ainsi l'on ajoutera ces 18″6 à la quantité trouvée, et l'on aura l'équation qui résulte de ces deux observations 1° 55′ 33″.

1263. Comme il est extrêmement rare d'avoir deux observations qui soient faites précisément dans les points M et G de la vîtesse moyenne, on ne trouve guere dans un premier calcul la quantité exacte de la plus grande équation ; mais après qu'on a trouvé à

(a) En effet quand même il y auroit plusieurs minutes d'erreur dans les tables, pour la valeur de l'équation, cette petite différence de 18″ s'y trouveroit toujours avec la même exactitude, parceque l'erreur seroit la même dans les deux équations très voisines, celle du jour donné et celle qui est la plus grande de toutes,

peu

peu-près l'équation et le lieu de l'apside (1279), on calcule pour les deux temps d'observations l'équation de l'orbite, et l'on calcule aussi la plus grande équation (1258) ; on sait alors combien l'équation donnée par les observations devoit différer de la plus grande: c'est ainsi que, dans l'exemple précédent, la Caille avoit trouvé 18″,6, qu'il falloit ajouter pour avoir la véritable quantité de la plus grande équation.

1264. Quand on a trouvé par observation la plus grande équation., et qu'on veut en conclure l'excentricité, on peut employer une regle de fausse position ; ou supposer d'abord connue l'excentricité que l'on cherche, pour en conclure la plus grande équation (1258). Si elle se trouve trop grande, on diminuera l'excentricité supposée, et l'on recommencera le calcul ; cette méthode de déterminer l'excentricité par le moyen de la plus grande équation est souvent plus commode que celle dont se servit Képler pour trouver l'excentricité de Mars (1217), ou celle dont je me servirai pour Mercure (1267). Au reste il y a des formules analytiques de Lambert qui sont très commodes pour trouver l'excentricité (*Eph. de Berlin* 1788) ; nous verrons bientôt une méthode exacte pour trouver l'excentricité sans avoir la plus grande équation (1301).

1265. La plus grande équation du Soleil, ou de l'orbite de la Terre, est celle que l'on peut déterminer le plus souvent et le plus facilement ; elle avoit été fixée à 1° 55′ 31″½ par la Caille vers 1750.

Dans les tables de *Flamsteed*, achevées par M. le Monnier et publiées en 1746 dans ses Institutions, on la trouve de 1° 56′ 20″. Halley la faisoit de la même quantité: mais, à la derniere page de ce livre, M. le Monnier la réduit à 1° 55′ 30″ ; ainsi il est en cela presque d'accord avec la Caille. Mayer, par des observations faites à Gottingen en 1756, et dont il m'envoya le résultat, la trouvoit de 1° 55′31″ : dans ses tables publiées à Londres, elle est de 1° 55′ 31″ 6. Cassini, après avoir comparé plusieurs observations des années 1717 et 1718 (*Elém. d'ast. p.* 192), et prenant un milieu entre les différentes déterminations qui en résultent, trouve l'équation du Soleil de 1° 55′ 34″, quoique dans ses tables il y ait 17″ de plus. La Caille en 1759 et 1760, depuis la publication de ses tables, continua d'observer le Soleil, et m'assura qu'il trouvoit encore 1° 55′ 32″ pour la plus grande équation. Enfin les calculs de M. de Lambre faits en 1787 sur un grand nombre d'observations de M. Maskelyne ont donné 1° 55′ 30″,9 pour 1780. Tant de témoignages si bien d'accord ne nous laissent sur cet élément aucune incertitude,

1266. En y employant les observations de la Hire faites vers 1684, la Caille trouvoit 1° 55′ 51″, ou 20″ de plus. Cela s'accorde avec la diminution qui doit avoir lieu par l'attraction (1277).

Flamsteed trouvoit pour 1690 1° 56′ 0″, ce qui differe peu du résultat précédent.

Les observations mêmes de Waltherus faites il y a plus de 250 ans donnent 1° 55′ 40″ suivant le calcul de la Caille (*Mém.* 1747).

1267. Pour déterminer les équations des autres planetes, on n'a pas toujours deux longitudes héliocentriques observées dans les moyennes distances; on n'en a même dans aucune position pour Mercure, si ce n'est dans ses passages sur le Soleil : mais on détermine la plus grande équation, ainsi que le lieu de l'aphélie, par d'autres moyens. La premiere méthode qui sert pour Mercure et pourroit servir pour Vénus, consiste à observer la plus grande digression, lorsque la planete est dans ses apsides; on en conclut la distance aphélie ou périhélie; et comme la distance moyenne est connue (1222), on a l'excentricite (*Mém.* 1767, *p.* 544). Le 25 septembre 1753 à 22h 47′ 50″ temps moyen, Mercure passant au méridien à Paris, sa longitude fut observée de 5s 15° 41′ 14″; Mercure étoit alors fort près de son périhélie, et en même temps vers sa plus grande digression; le lieu du Soleil calculé par les tables étoit à 6s 3° 27′ 25″, en sorte que l'élongation de Mercure étoit de 17° 46′ 11″; c'est l'angle sous lequel paroissoit alors la distance périhélie de Mercure vue de la Terre. On pourroit trouver cette distance absolue par le moyen du triangle formé à la Terre, au Soleil et à Mercure, où l'on connoît la distance du Soleil à la Terre, l'angle au Soleil qui étoit de 101° 39′, et qui pouvoit se conclure de la distance à la conjonction, enfin l'angle à la Terre ou l'élongation observée : il seroit facile de résoudre ce triangle pour connoître le côté opposé qui étoit la distance périhélie de Mercure; et comparant cette distance périhélie avec la distance moyenne, on auroit l'excentricité. Cependant comme dans cette observation et dans celles que j'ai pu rassembler, Mercure n'étoit pas exactement dans son périhélie et dans sa plus grande digression, on peut savoir quelle est la distance qui satisfait à l'observation, en calculant l'élongation pour cet instant-là par des tables déja à-peu-près exactes dans différentes suppositions d'excentricité; et l'on trouve celle qui satisfait à l'élongation observée. On pourroit aussi trouver l'excentricité par un calcul direct, au moyen du rayon vecteur et de l'anomalie. L'excentricité 79554 est la plus propre à satisfaire aux différentes observations. La plus grande équation qui lui répond est 23° 40′ 0″.

(1258). Cette méthode suppose que le lieu de l'aphélie ait été à-peu-près déterminé par d'autres observations (1315), afin que l'erreur qu'on commettroit sur le lieu de l'aphélie n'affecte pas la distance de Mercure au Soleil, et l'élongation calculée, que l'on veut comparer à l'observation pour juger si l'excentricité supposée dans les tables est exacte: mais dans cette recherche il n'est besoin de connoître l'aphélie qu'à-peu-près; la distance de Mercure au Soleil ne change alors que de $\frac{1}{40680}$ pour un degré d'erreur sur le lieu de l'aphélie, et nous ne pouvons commettre actuellement une pareille erreur sur l'aphélie de Mercure. Une seule seconde d'erreur sur la plus grande digression en fait cinq sur la plus grande équation; mais comme on peut avoir à 12″ près ces digressions, on peut espérer une précision d'une minute sur l'équation, ce qui ne fait que 12″ sur la longitude vue de la Terre.

1268. La seconde méthode qui peut servir pour connoître l'excentricité de Mercure, suppose qu'on connoisse déja exactement le lieu de l'aphélie, et son mouvement, par la méthode que j'expliquerai bientôt (1285): on prend deux longitudes observées dans les conjonctions de Mercure, on en retranche le lieu de l'aphélie qui convient à chacune pour avoir deux anomalies vraies, on les convertit en anomalies moyennes (1244), en supposant une excentricité déja à-peu-près connue; si la différence des anomalies moyennes trouvées est la même que celle que l'on connoît d'avance, on est sûr que l'excentricité supposée est exacte; sinon l'on en prend une autre; et, par ces diverses tentatives, on s'assure de la véritable.

Je choisis pour exemple les passages de Mercure observés fort exactement en 1743 et en 1753; voici les temps moyens de ces deux conjonctions, les longitudes de Mercure sur son orbite, les lieux de l'aphélie que je supposois connus d'avance, et les anomalies vraies que j'en avois déduites.

Temps moyens.	Longitude obs.	Aphél. supposé.	Anomalie vraie.
1743. 4 nov. 22h 26′ 10″	1s 12° 36′ 21″	8s 13° 25′ 47″	4s 29° 10′ 34″
1753. 5 mai 18 29 50	7 15 48 10	8 13 36 58	11 2 11 12

La différence des anomalies moyennes pour l'intervalle donné est connue d'avance par la durée de la révolution et par le mouvement de l'aphélie, je l'avois trouvée 5s 9° 42′ 8″; or, en conver-

tissant les deux anomalies vraies données en anomalies moyennes avec l'excentricité 7960, on trouve en effet 5ˢ 9° 47′ 44″, et 10ˢ 19° 29′ 52″, qui different exactement de 5ˢ 9° 42′ 8″, ce qui m'apprend que l'excentricité 7960 satisfait à ces deux observations. On sent bien que si j'avois supposé d'autres quantités pour les lieux de l'aphélie, j'aurois trouvé une autre valeur pour l'excentricité : la différence entre ces deux observations n'est qu'une donnée, et elle ne peut déterminer qu'un élément, c'est-à-dire, l'excentricité si l'aphélie est connu, ou l'aphélie si l'excentricité est donnée; mais cette méthode m'avoit fait connoître assez exactement l'équation, parceque j'avois déterminé fort bien le lieu de l'aphélie par les digressions observées dans les moyennes distances (1286).

1269. Aussi la méthode que je viens d'expliquer serviroit à trouver le lieu de l'aphélie de Mercure, si l'on vouloit supposer l'excentricité connue par les digressions aphélie et périhélie (1267); car en convertissant les anomalies vraies en moyennes, avec différentes suppositions pour le lieu de l'aphélie, on trouveroit quel est l'aphélie qui satisfait aux deux longitudes observées, et c'est en effet le parti que j'ai pris (1315), parcequ'en 1786 je suis parvenu à m'assurer suffisamment de l'excentricité de Mercure par le moyen des plus grandes digressions aphélie et périhélie.

1270. Cassini, en employant les passages de Mercure sur le Soleil observés en 1661, 1690 et 1697, avoit trouvé la plus grande équation de Mercure, dans l'hypothese de Képler, de 24° 3′; je fis ensuite une pareille recherche au moyen des passages de 1740, 1743 et 1753, je ne trouvai que 23° 27′ 51″ pour la plus grande équation (*Mém. acad.* 1756). Mais les passages de Mercure ne sont pas propres à ces recherches; ils ne sont pas disposés sur trois points de l'orbite assez différens les uns des autres, et ne peuvent donner qu'un seul élément. La théorie de Mercure étoit difficile à établir, parceque les observations en sont rares. Les tables rudolphines, qui dans le dernier siecle étoient les meilleures, s'écartoient encore de 14′ du lieu observé, et celles de la Hire de 5′ (*Mém. acad.* 1706, *pag.* 99 et 101); ce qui fait une très grande erreur, vue du Soleil : dans le passage même de 1786 il y avoit une heure et demie de différence entre les tables de Halley et les miennes, et l'observation a tenu à-peu-près un milieu; mais l'erreur venoit du lieu de l'aphélie.

L'extrême différence qu'on trouvoit entre les résultats de Halley et de Cassini, dont l'un fait la plus grande équation de 23° 42′ 36″,

et l'autre de 24° 2′ 58″, prouvoit la nécessité qu'il y avoit d'observer encore Mercure avec soin : cest ce que j'ai fait ; je calculai en 1767 diverses observations qui me donnoient l'excentricité 7960 ou l'équation 23° 40′ 49″ (*Mém.* 1767). M. le Monnier en a calculé d'autres qui lui donnoient entre 23° 37′½ et 23° 40′ (*Mém.* 1775). Mais enfin j'ai discuté plus de 70 observations de Mercure faites aux environs des digressions aphélie et périhélie, dont le résultat moyen a été 23° 40′ 0″ : il est impossible, quant à présent, d'avoir une plus grande précision (*Mém.* 1786, *pag.* 292).

1271. Je finirai cet article par indiquer les 4 circonstances dans lesquelles il est important d'observer encore Mercure ; ce sont les plus grandes digressions aphélies qui arrivent vers le premier avril, Mercure passant le matin, et vers le 8 août, Mercure passant le soir; et les plus grandes digressions périhélies qui arrivent vers le 15 février, le soir, et le 25 septembre le matin à l'occident du Soleil.

1272. Les conjonctions inférieures de Vénus du Soleil observées à Paris en 1715, 1716 et 1718, qui seront rapportées à la fin de ce livre, ont servi à Cassini (*Elém. d'Astron. pag.* 562) pour déterminer la plus grande équation de Vénus, et il la trouvoit de 49′ 8″: par les observations de 1715, 1718 et 1719, il trouvoit 49′ 4″, M. Krast 49′ 6″ (*Mém. de Pét. t. XVI*). Halley ne l'emploie que de 48′ 0″. Par les conjonctions de 1715, 1718 et 1719, je ne trouve que 47′ 27″. Celles que M. Slop a observées à Pise en 1774, 1775 et 1777, m'ont donné 47′ 19″ (*Mém. de l'ac.* 1779); enfin celles de 1774, 1775, 1780, 1782 et 1783, m'ont donné à-peu-près le même résultat; ainsi cette équation est de 47′ 20″ (*Mém.* 1785).

1273. L'équation de Mars, suivant les observations de Ptolémée, calculées par Cassini, étoit de 10° 49′ pour l'année 133 avant J. C. (*Elém. d'astr. p.* 472), et trois observations de Flamsteed faites à Greenwich le 11 décembre 1691, le 20 février 1696, et le 8 mai 1700, donnent 12° 39′ 8″ ; cela s'accorde avec la diminution qui doit avoir lieu (1277).

Pour déterminer cet élément par des observations plus récentes et plus exactes, j'avois comparé entre elles les oppositions de Mars observées en 1743, 1751 et 1753 (*Mém. acad.* 1755); j'ai refait ces calculs de nouveau, et j'ai trouvé pour l'excentricité 14198.4 (art. 1304). J'ai comparé ensuite d'autres observations qui m'ont donné l'exc. 14218, et l'équation 10° 42′ 13″ ; elle étoit ainsi dans mes premieres tables : mais par les oppositions de 1762, 1764, 1766, 1768, 1770 et 1775 (1307) j'ai trouvé 10° 40′ 47″ (*Mém. de l'acad.* 1775) : tout considéré, je la supposerai de 10° 40′ 40″,

et l'excentricité 14183,8, la distance du Soleil étant 100000 ; c'est d'après ce résultat que M. de Lambre a calculé la nouvelle table d'équation dont je fais usage actuellement (*Connoiss. des temps* 1790).

1274. L'ÉQUATION de Jupiter est difficile à déterminer à cause des dérangemens qu'il éprouve. Les oppositions observées en 1723 et 1728 donnent pour la différence du mouvement vrai 5ˢ 27° 46′ 40″; et comme dans l'intervalle de ces observations on a pour le moyen mouvement 5ˢ 16° 50′ 15″, la différence 10° 56′ 25″ est le double de la plus grande équation (1260). Aussi Cassini en conclut que l'équation du centre est de 5° 28′ 12″ ½ (*Elém. d'astr. pag.* 423). Par d'autres oppositions il trouvoit de 5° 27′ à 5° 32′.

Les observations de Ptolémée faites vers l'an 136 de J. C. donnent la plus grande équation encore plus petite; suivant le calcul de Cassini, elle étoit de 5° 12′ 40″; suivant Wargentin, 4° 57′ 27″. Et l'on voit en effet qu'elle diminue à mesure que l'on remonte aux anciennes observations. Cassini en avoit déja fait la remarque (*pag.* 429), pour donner lieu d'examiner dans la suite s'il y auroit encore une semblable augmentation dans l'équation de Jupiter.

M. Bailly ayant comparé entre elles diverses oppositions de Jupiter, corrigées par les équations qui viennent de l'attraction de Saturne, a trouvé par un milieu entre divers résultats 5° 12′ 10″ pour l'an 136; 5° 31′ 53″ pour 1590; 5° 31′ 36″ pour 1661; et 5° 33′ 23″ pour 1762; en sorte que l'augmentation de cette équation lui paroissoit d'environ 1′ 47″ par siecle. Wargentin avoit trouvé 5° 34′ 1″ pour 1760; avec un accroissement de 2′ 15″ par siecle, et je l'avois employé ainsi dans mes premieres tables. Mais par de nouveaux calculs, faits sur une théorie plus rigoureuse, M. de la Grange a trouvé l'augmentation de 56″ ½ seulement. Quant à la valeur actuelle de l'équation, M. de Lambre, par les calculs de la nouvelle inégalité de Jupiter, que M. de la Place a fait connoître, trouve pour 1750, 5° 30′ 38″, en supposant une augmentation de 55″36 par siecle.

1275. L'équation de Saturne est également difficile à déterminer par les observations ; Cassini, par un grand nombre d'oppositions depuis 1685 jusqu'en 1716, prises trois à trois, la trouvoit de 6° 31′ 38″, et c'est à peu près celle qu'il employoit dans ses tables (*Elémens d'astron. pag.* 371), et elle approche également de celle qui est dans les tables de Halley, 6° 32′ 4″.

Euler, dans la piece qui a remporté le prix de l'académie en 1748, suppose cette équation de 6° 32′ 10″, avec une diminution

de 1′ 50″ par siecle: dans la piece de 1752, il trouvoit à-peu-près la même chose; et cette diminution s'accorde en effet avec celle qu'a trouvée M. de la Grange.

Par les recherches que je fis sur la théorie de Saturne, d'après l'inégalité que j'avois remarquée (1167), je trouvai que pour satisfaire aux observations faites depuis 1730, il falloit supposer l'équation de 6° 23′ 19″, et c'est ainsi que je l'employai dans mes premieres tables: cette équation ne satisfaisoit pas aux observations plus anciennes; il étoit impossible de les concilier avec les plus récentes, sans connoître les dérangemens de Saturne, et je préférois des tables qui fussent exactes pour le temps où nous étions (*Mém.* 1768): mais M. de la Place ayant fait de nouveaux calculs sur les dérangemens de Jupiter et de Saturne, M. de Lambre les ayant combinés avec un grand nombre d'observations recalculées avec un nouveau soin, il en résulte que la plus grande équation de l'orbite de Saturne étoit, en 1750, 6° 26′ 42″, en supposant avec M. de la Place qu'elle diminue d'une seconde et un dixieme par année.

1276. L'ÉQUATION DE HERSCHEL n'a pas pu être déterminée jusqu'ici avec certitude; suivant les calculs de M. de la Place et les tables de M. Nouet, elle est de 5° 27′ 16″; mais le P. Fixlmillner la fait de 5° 16′ 58″ (*Ephém. de Berlin* 1789); et M. Oriani la porte jusqu'à 5° 32′ 59″ (*Ephém. de Milan* 1785): mais cette année 1788 les tables françoises s'accordent un peu mieux avec l'observation, ainsi je les préférerai pour le présent.

1277. LES EXCENTRICITÉS et les équations que nous avons déterminées jusqu'ici ne sont pas constantes: M. de la Grange ayant calculé avec grand soin les variations que donne la théorie de l'attraction, les a trouvées telles qu'on les voit dans la table suivante pour chaque planete, par l'effet de chacune des autres (*Mém. de Berlin* 1782, p. 220).

On voit par exemple dans cette table que l'équation de Mars augmente de 37″08 par siecle, dont 3″ 66 sont dues à l'action de la Terre, et 1″30 à l'action de Saturne.

Cette table suppose la masse de Vénus 1, 31, par rapport à celle de la Terre, et je crois qu'il ne faudroit prendre que le tiers des trois quantités de la seconde ligne, qui sont l'effet de l'action de Vénus. On en verra les raisons (3565). L'équation de Herschel diminue de 0″01 par l'action de Jupiter, et de 0″10 par celle de Saturne, suivant des calculs faits en 1788 par M. de la Grange; mais les variations périodiques de la planete sont très sensibles, comme je m'en suis assuré par le calcul des attractions de Jupiter et de Saturne.

Changemens de l'équation en un siecle.

	MERCURE.	VÉNUS.	LA TERRE.	MARS.	JUPITER.	SATURNE.
Par ☿	. . .	— 9″ 02	— 0″ 80	+ 0″ 22	— 0″ 00	. . . . .
Par ♀	+3″ 04	. . . .	+ 4, 18	+ 0, 22	— 0, 00	. . . .
Par ♁	+0, 58	— 9, 02	. . . .	+ 3, 66	— 0, 00	. . . .
Par ♂	—0, 22	— 0, 64	— 4, 94	. . . .	— 0, 02	. . . .
Par ♃	—1, 26	— 6, 16	—16, 02	+31, 68	. . . .	—1′50″60
Par ♄	+0, 02	— 0, 14	— 0, 08	+ 1, 30	+56, 28	. . . .
Total.	+2″ 16	—24″ 98	—17″ 66	+37″ 08	+56″ 26	—1′50″60

1278. Pour qu'on puisse juger de l'incertitude qu'on avoit sur les équations de chaque planete, nous rapporterons les quantités assignées par quatre différens auteurs dans leurs tables astronomiques, de même que les excentricités que l'on peut conclure (1258), 1264), et que l'on conclut effectivement de ces plus grandes équations observées, ou que l'on détermine sans le secours de la plus grande équation (1218, 1267).

Les excentricités qui sont dans la table suivante, supposent la distance moyenne du Soleil à la Terre 100000, et les distances moyennes des planetes telles que je les ai données (1222); mais j'y ai ajouté des décimales, quand le calcul me les a données. Les logarithmes des excentricités supposent la distance moyenne de chaque planete égale à l'unité, parcequ'on les emploie ordinairement sous cette forme (1244). Elles ont été déduites de la plus grande équation observée, qui se trouvera dans la seconde table.

Ce sont ces excentricités qui fournissent les logarithmes constans dont on a vu la table, art. 1243, sauf les différences qu'il doit y avoir pour le Soleil, Jupiter et Saturne, parceque les tables d'équations se rapportent à des époques différentes de celle de la table suivante, qui est pour 1750, et que les logarithmes constans sont calculés pour les tables des planetes qui sont jointes à cet ouvrage.

TABLE

Table des excentricités, suivant différens auteurs.

PLANETES.	Excentricité suivant Képler.	Suivant Cassini.	Suivant Halley.	Excentricité suiv. nos tables.	Log. de l'excentr. en parties de la dist. moyenne, suiv. nos tables, pour 1750.
Mercure.	8150	8092 $\frac{1}{3}$	7970	7955,4	9,3128399
Vénus.	501	517	504,985	498	7,8378910
Le Soleil.	1800	1690	1691,90	1681,395	8,2253628
Mars.	14115,5	14155	14170	14183,7	8,9688921
Jupiter.	25074	2506	25078,6	25013,3	8,6819346
Saturne.	54143,5	5432	54381,4	53640,42	8,7499109
Herschel.				90804	8,6774873

Table des plus grandes équations des orbites planétaires, suivant différens auteurs.

	Boulliaud, 1645.	La Hire, 1702.	Halley, 1719.	Cassini, 1740.	Suivant les nouvelles tables, pour 1750.	Changem. annuel.
Mercure.	24° 17′ 20″	24° 16′ 52″	23° 42′ 36″	24° 2′ 58″	23° 40′ 0″	+0″ 02
Vénus.	0 54 36	0 50 0	0 48 0	0 49 6	0 47 20	−0, 25
Le Soleil.	2 2 41	1 55 42	1 56 20	1 55 51	1 55 36,5	−0, 188
Mars.	10 36 12	10 40 40	10 40 2	10 39 19	10 40 40	+0, 37
Jupiter.	5 34 0	5 36 54	5 31 36	5 31 17	5 30 38,3	+0, 5536
Saturne.	6 37 10	6 30 00	6 32 4	6 31 40	6 26 42	−1, 11
Herschel.					5 27 16	−0, 11

Méthodes pour trouver le lieu de l'aphélie d'une planete.

1279. Il y a trois méthodes pour déterminer le lieu de l'aphélie d'une planete. La premiere et la plus simple de toutes sert principalement pour le Soleil; elle peut servir aussi quelquefois pour les planetes: en voici l'explication. Lorsqu'on a plusieurs observations d'une planete, faites en différens points de son orbite, il faut chercher celles qui donnent deux points diamétralement opposés, par rapport au foyer ou au Soleil; et si les temps de ces observations different exactement d'une demi-révolution, on sera sûr que ces deux observations sont l'une dans l'aphélie, et l'autre dans le

périhélie : ainsi en comparant deux à deux un grand nombre d'observations, on ne pourra manquer de tomber sur celles qui indiqueront la place des apsides.

Soit l'aphélie d'une planete en A (FIG. 73), et le périhélie en P, la partie ABP de l'ellipse est égale à la partie ACP : elles sont parcourues l'une et l'autre dans l'espace du temps de la demi-révolution, par exemple, en 182^j 15^h 6' 59'', s'il s'agit du Soleil (1312). Nous prenons ici la révolution anomalistique, c'est-à-dire par rapport à l'apogée ; mais, dans une premiere approximation, l'on se contenteroit de la révolution tropique (1162), en supposant l'aphélie immobile pendant une demi-révolution.

Si l'on prend un autre point quelconque D avec le point E qui lui est opposé, la partie DACE de l'ellipse exigera plus de temps que la partie DBPE, parceque la premiere renferme l'aphélie, c'est-à-dire l'endroit où le mouvement de la planete est le plus lent, tandis qu'au contraire la partie DBE, dans laquelle se trouve le périhélie, doit être parcourue d'un mouvement plus rapide et en moins de temps.

Ainsi les points A et P des deux apsides sont les seuls qui, étant diamétralement opposés, fassent aussi deux intervalles de temps égaux ; on sera donc assuré de connoître le lieu des apsides, si l'on trouve deux longitudes qui, étant diamétralement opposées comme A et P, répondent aussi à des temps éloignés d'une demi-révolution, c'est-à-dire de la moitié du temps qu'il faut à la planete pour revenir à son apside ; et il suffira de chercher, dans le nombre des observations d'une planete, les deux qui satisferont à la fois à cette double condition.

1280. Cette maniere de déterminer le lieu de l'aphélie d'une planete fut employée pour la premiere fois par Képler (pag. 208). *Perpende itaque quòd si Mars a puncto apogaei eundo, dimidium temporis restitutorii insumat, fine hujus temporis, omninò confectis* 180 *gradibus, sit futurus in puncto perigaei. At si jam hoc spatium temporis auspicetur uno die postquam in apogaeo fuit, incipiet igitur cursum a* 26' 13'' *ab apogaeo, finietque in* 180° 38' 2''; *itaque dimidio temporis plus dimidio itineris curret per* 11' 49'': *contrarium si die uno ante apogaeum inciperet.* La Caille avoit trouvé cette méthode, et il en fit l'objet d'un mémoire qu'il lut à l'académie en 1742 ; il y appliqua des observations qu'il fit ensuite en 1743 (*Mém. acad.* 1742). Il employa cette méthode dans sa théorie du Soleil (*Mém. acad.* 1757), en annonçant qu'il l'avoit trouvée très bien expliquée dans le livre de Manfredi *de Gnomone meridiano Bono-*

niensi, imprimé en 1736; mais je l'ai retrouvée dans Képler: au reste il faut convenir que cette méthode est si naturelle, et découle si naturellement de la loi du mouvement elliptique, qu'il n'est pas surprenant que trois personnes l'aient imaginée séparément.

1281. Pour faire usage de cette méthode, on peut employer la proportion suivante, en cherchant une quantité qui, ajoutée au temps de l'observation, ou en étant ôtée, donne celui du passage par l'aphélie. *La différence des vîtesses aphélie et périhélie est à la vîtesse périhélie, comme la différence entre l'intervalle de temps des deux observations, et la demi-révolution anomalistique, est au temps dont la planete est éloignée de son aphélie.*

Soit a le mouvement diurne de la planete quand elle est vers son aphélie, p le mouvement dans le périhélie, c la différence trouvée par observation entre le temps par DPE (FIG. 73) et la demi-révolution anomalistique, t la quantité cherchée ou le temps qui répond à l'arc AD: alors on aura cette proportion, $p : a :: t : \frac{ta}{p}$, c'est-à-dire, la vîtesse périhélie est à la vîtesse aphélie, comme le temps par AD est au temps par PE. Si à la demi-révolution anomalistique de A en P on ajoute le temps par AD, et qu'on ôte le temps par PE (1230), on aura $t - \frac{ta}{p}$ pour la différence entre l'intervalle observé et la demi-révolution anomalistique, différence que nous avons appellée c; ainsi $t - \frac{ta}{p} = c$, ou $tp - ta = pc$, ce qui se réduit à cette proportion, $p - a : p :: c : t$, et par conséquent à la regle que nous voulions démontrer. Cette quantité s'ajoute quand l'intervalle est plus grand que la demi-révolution, la premiere observation étant vers l'apogée; dans les autres cas, c'est le contraire.

1282. EXEMPLE. Le lieu du Soleil observé au Cap de Bonne-Espérance le 30 juin 1751, à $22^h\ 58'\ 40''$ de temps moyen réduit au méridien de Paris, étoit de $3^s\ 8^\circ\ 9'\ 2''\ 3$; et le 29 décembre à $22^h\ 58'\ 45''$, il étoit de $9^s\ 8^\circ\ 30'\ 5''\ 0$; l'apogée ayant dû avancer dans cet intervalle de $32''\ 7$, il faut les ajouter à la premiere longitude pour la réduire, par rapport à l'apogée, au même état que si l'apogée étoit immobile, et l'on aura $3^s\ 8^\circ\ 9'\ 35''\ 0$, dont l'opposite devoit être $9^s\ 8^\circ\ 9'\ 35''$, moins avancé de $20'\ 30''$ que le vrai lieu observé.

Le 30 de juin il faut au Soleil $8^h\ 36'\ 10''$ pour parcourir cette quantité; ainsi, le 30 juin à $7^h\ 34'\ 50''$, le Soleil dut être exactement à l'opposite du lieu qui fut observé ensuite le 29 décembre; l'in-

tervalle de temps moyen entre ces deux momens est de 182ʲ 15ʰ 23′ 55″, plus long de 16′ 13″ que la demi-révolution anomalistique supposée par la Caille de 182ʲ 15ʰ 7′ 42″ (1312), ce qui prouve que le Soleil n'étoit pas encore à son apogée dans la premiere observation. Si l'on fait la proportion (1281), l'excès de la vîtesse diurne du Soleil périgée sur la vîtesse du Soleil apogée, qui est de 4′, est à la vîtesse périgée 61′ 12″, comme 16′ 13″ de temps, que nous voulons avoir de moins sur l'intervalle des deux observations, sont à 4ʰ 8′ 7″: on aura ce qu'il faut au Soleil le 30 juin pour avancer d'une quantité suffisante; on ajoutera cette quantité au 30 juin 7ʰ 34′ 50″, et l'on aura le moment du passage du Soleil par l'apogée 11ʰ 42′ 57″, temps moyen à Paris. La longitude du Soleil pour cet instant-là est aisée à conclure de l'observation, elle se trouve de 3ˢ 8° 39′ 56″; c'est le lieu de l'apogée du Soleil qui résulte de ce calcul; c'est en même temps le vrai lieu et le lieu moyen du Soleil le 30 juin 1751, 11ʰ 42′ 57″, temps moyen à Paris : d'où l'on tire la longitude moyenne (1325) pour le dernier jour de l'année 1749 à midi moyen à Paris, 9ˢ 10° 0′ 46″ 5 (*Mém. ac.* 1747).

1283. On peut aussi trouver le lieu de l'aphélie par des observations qui ne seroient éloignées que d'un quart de cercle, lorsqu'on connoît l'équation du centre, et qu'on s'en est bien assuré par des observations faites vers les moyennes distances, ou plus exactement dans les points de la plus grande équation (1258 *et suiv.*). Il suffit de prendre deux observations qui soient faites l'une vers l'aphélie, l'autre dans la moyenne distance ou à-peu-près, pour connoître exactement le lieu de l'aphélie. On calculera pour chacune de ces observations l'équation du centre, en supposant le lieu de l'aphélie tel qu'on le connoît, et l'on prendra la différence de ces deux équations, si les deux observations sont du même côté de l'aphélie, ou la somme si l'une étoit avant l'aphélie et l'autre après : la différence ou la somme de ces deux équations sera la quantité dont le vrai mouvement doit différer du mouvement moyen, qui est toujours supposé connu dans l'intervalle des deux observations. Si ce vrai mouvement calculé differe trop du mouvement moyen, c'est-à-dire s'il en differe plus que le mouvement vrai observé, ce sera une preuve qu'on a supposé le lieu de l'aphélie trop près de l'observation faite dans la moyenne distance.

1284. En effet, soit une planete en B (FIG. 73) dans sa moyenne distance, ayant, comme Jupiter, 5° ½ d'équation, et en D à 6° de son aphélie supposé connu à peu-près, ayant un demi-degré d'équation; la différence de ces deux équations est 5°; c'est la

quantité dont le mouvement moyen doit surpasser le mouvement vrai dans l'intervalle de deux observations. Je suppose que les deux points B et D soient éloignés l'un de l'autre exactement du quart de la révolution de Jupiter en temps (environ trois ans), en sorte que le moyen mouvement soit de 90°; le mouvement vrai doit être, suivant le calcul précédent, de 85°, c'est-à-dire plus petit de 5° que le mouvement moyen; et je suppose que par l'observation on l'ait trouvé de 86°, plus petit seulement de 4° que le mouvement moyen, c'est-à-dire moins différent du moyen mouvement que suivant le calcul; alors je raisonne ainsi: En éloignant dans mon calcul l'aphélie A de l'observation faite en B, l'équation en D se trouvera plus grande, étant plus loin de l'aphélie; mais l'équation en B ne changera pas sensiblement, parceque vers les moyennes distances l'équation ne varie presque point : ainsi la différence des deux équations en D et en B deviendra moindre qu'elle n'étoit dans la premiere supposition, et elle approchera davantage de l'observation, suivant laquelle on vient de supposer qu'il n'y avoit que 4° de différence entre le vrai et le moyen mouvement, au lieu de 5° qu'on avoit trouvés par le calcul.

Ainsi cette différence entre le vrai et le moyen mouvement, trouvée trop grande par le calcul, m'apprend que le lieu de l'aphélie supposé dans ce calcul étoit trop voisin de l'observation B; on peut l'en éloigner de quelques minutes pour voir ce qui en résultera sur la différence du mouvement vrai au mouvement moyen, et par une ou deux tentatives trouver enfin le lieu de l'aphélie A, qu'il faut employer pour que la différence calculée soit d'accord avec la différence observée.

1285. La troisieme méthode pour trouver le lieu de l'aphélie d'une planete a lieu pour Mercure ou pour Vénus (1316): c'est celle que j'ai donnée à l'occasion de ma théorie de Mercure (*Mém.* 1766), et par laquelle je cherchois à déterminer soit pour les temps les plus anciens, soit pour le temps où nous sommes, le lieu de l'aphélie de Mercure. Je suppose qu'on ait observé la plus grande digression de Mercure dans le temps qu'il est à ses moyennes distances du Soleil, et que la distance ou le rayon vecteur change rapidement; si l'on connoît déja la moyenne distance et l'excentricité, l'on calculera facilement à quel endroit il faut placer l'aphélie, pour que le rayon sur lequel se trouve la planete soit précisément de la longueur convenable à la digression observée. Soient M et N (FIG. 73) deux positions de Mercure observées dans ses plus grandes digressions et dans ses moyennes distances, la

Terre étant en un même point T de son orbite: si les digressions étoient parfaitement égales, ce seroit une preuve que la Terre étoit exactement dans la direction de l'aphélie; ainsi l'on connoîtroit par là sa véritable situation : si ces digressions sont inégales, leur inégalité fera connoître aussi combien il s'en faut que l'aphélie ne soit dirigé vers le point T.

C'est le 24 mai et le 6 décembre que le Soleil et la Terre se trouvent dans la ligne des apsides, et que les plus grandes digressions de Mercure doivent être égales: c'est à 57° de l'aphélie que le rayon vecteur change le plus et qu'il y a le plus d'avantage à observer les digressions pour déterminer l'aphélie; mais celles qui sont à 75° de l'aphélie ont l'avantage de ne pas dépendre de l'excentricité.

Dans l'usage ordinaire on n'a pas des observations doubles comme je viens de le supposer.

Soit donc le lieu de Mercure, suivant les tables, en M sur le rayon TM qui touche l'orbite, la plus grande digression étant alors l'angle STM, et la distance à l'aphélie ASM. Si, dans les tables dont nous nous servons, le lieu de l'aphélie est mal indiqué, en sorte que l'aphélie soit réellement en D, en faisant avancer le point A en D, le rayon vecteur SC arrivera en SG, et l'élongation de Mercure sera égale à l'angle STG, plus petite par conséquent que l'élongation calculée STM; si donc on a trouvé par le calcul des tables une élongation plus grande que celle qu'on a observée, il n'y a qu'à éloigner l'aphélie du lieu de l'observation en laissant toujours Mercure à la même longitude héliocentrique ou sur la même ligne SGM, c'est-à-dire augmenter le lieu de l'aphélie, si l'anomalie est plus grande que 6 signes. Un degré d'erreur dans le lieu de l'aphélie change de $\frac{1}{250}$ la distance au Soleil; et comme la plus grande digression est alors d'environ 21°, il en résulteroit 5 minutes d'erreur sur cette digression: or on peut l'observer, à 10″ près ; donc alors on doit connoître le lieu de l'aphélie de Mercure à 4 minutes près, par le moyen de la plus grande digression observée entre 3 et 4^s, ou entre 8 et 9^s d'anomalie.

1286. Le 24 mai 1764 à 8^h 7′ 50″ temps moyen, j'observai la longitude de Mercure 2^s 26° 50′ 35″; il étoit alors dans sa plus grande digression en M à 22° 51′ 12″ du Soleil; notre rayon visuel touchoit son orbite à la moyenne distance SM vers 9^s 8° d'anomalie, qui est presque l'endroit où la distance change le plus. Je calculai cette longitude par les tables de Halley, et je la trouvai trop grande

de 1′ 14″; c'est-à-dire que, suivant ces tables, Mercure étoit en M au lieu d'être sur TG. Pour qu'un point C de l'ellipse de Mercure se trouve en G, il faut que l'ellipse tourne, que l'aphélie A avance en un point D, et que sa longitude soit plus grande. En conséquence j'augmentai de 14′ la longitude de l'aphélie tirée des tables, sans changer la longitude héliocentrique de Mercure; l'anomalie devint plus petite aussi bien que le rayon vecteur, l'élongation de Mercure devint aussi moindre, et la longitude de Mercure se trouva d'accord avec l'observation (*Mém. acad.* 1766). Après un grand nombre de comparaisons semblables, je n'ai fait cette augmentation que de 10′ dans mes premieres tables, et j'ai supposé l'aphélie à 8ˢ 13° 49′ 30″ pour 1764. Ayant calculé de la même maniere les 16 observations anciennes de Mercure qui sont rapportées dans l'Almageste de Ptolémée, j'ai trouvé qu'il y avoit plusieurs degrés à ôter du lieu de l'aphélie que les tables donnoient pour ces temps-là (*Mém.* 1766): mais l'erreur sur le moyen mouvement de Mercure affecte encore beaucoup ces résultats; aussi j'ai voulu y employer encore les passages de Mercure sur le Soleil, par la méthode des art. 1268 et 1283 (*Mém. acad.* 1786). J'en donnerai l'explication (1315).

1287. La quatrieme méthode pour déterminer l'aphélie ne suppose point qu'on ait une des plus grandes digressions, ni des longitudes observées précisément dans les apsides; mais elle exige trois conjonctions ou oppositions, c'est-à-dire trois longitudes héliocentriques, et elle donne tout à la fois l'excentricité, l'aphélie, et l'époque de la longitude moyenne: ce sera l'objet des articles suivans. Nous expliquerons d'abord cette méthode pour les cas les plus simples, ensuite nous la donnerons d'une maniere plus générale (1293).

Méthode générale pour corriger à la fois les trois élémens d'une orbite.

1288. Nous avons vu séparément (1260, 1279, 1283) les méthodes que l'on peut suivre pour trouver l'équation et les apsides d'une planete; nous allons rassembler l'esprit de ces méthodes et en tirer un procédé pour trouver par trois observations les trois élémens d'une orbite, savoir l'excentricité, le lieu de l'aphélie, et l'époque ou lieu moyen qui en résulte nécessairement (1282); je suppose trois observations réduites, comme on le verra ci-après (1296), et je suppose aussi les élémens à-peu-près connus.

Pour bien faire sentir l'esprit de cette méthode, je rappellerai ici trois choses qui doivent être familieres à tous ceux qui s'occupent du calcul astronomique. 1°. L'équation de l'orbite est la plus grande qui soit possible vers trois signes et quelques degrés d'anomalie moyenne, alors elle est à son *maximum;* elle augmente à peine en passant d'un degré à l'autre (1257); en sorte que l'anomalie moyenne peut être alors plus ou moins grande, sans que l'équation en soit affectée : ainsi dans ces cas-là on pourroit se tromper sur le lieu de l'aphélie, sans qu'il en résultât aucune erreur sur l'équation, ni sur la longitude calculée. 2°. L'équation de l'orbite, ou la différence entre la longitude moyenne et la longitude vraie, est additive depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie, c'est-à-dire, dans les six derniers signes d'anomalie; on l'ajoute alors à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie : elle est soustractive depuis l'aphélie jusqu'au périhélie, c'est-à-dire qu'on retranche l'équation de la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie. 3°. Le mouvement moyen d'une planete dans l'espace d'une ou de deux révolutions, est assez bien connu pour qu'on puisse toujours le supposer exact; car les moyens mouvemens se déterminent par la comparaison des observations les plus anciennes; ainsi il ne peut y avoir d'erreur sensible dans l'espace de quelques années : d'où il résulte que si l'erreur de l'époque, ou de la longitude moyenne d'une planete, est connue pour un point quelconque de son orbite, ou pour un temps donné, elle est également connue, ou plutôt elle est la même dans tous les autres points; elle ne fait que se combiner avec les erreurs qui proviennent des autres élémens, sans que cette erreur de l'époque, prise en elle-même, soit différente.

1289. Si l'on avoit deux observations faites précisément dans les moyennes distances, c'est-à-dire, à trois signes d'anomalie moyenne, et à neuf signes, il seroit aisé de corriger par ces deux observations, 1°. l'époque des moyens mouvemens, 2°. l'équation du centre. En effet, si l'équation du centre est bonne, c'est-à-dire, si celle qu'on a employée dans le calcul des tables est exacte, il n'y aura, entre le calcul et l'observation, d'autre différence que celle de l'époque des moyens mouvemens, puisque le lieu de l'aphélie n'influe point dans le calcul des longitudes prises vers les moyennes distances; l'erreur sera donc égale dans les deux observations, car nous supposons le moyen mouvement exactement connu : ainsi l'erreur des tables étant trouvée égale à 3ˢ et à 9ˢ d'anomalie, ce sera une preuve que l'équation de l'orbite est exacte; mais que

que l'erreur des deux calculs vient uniquement de l'époque de la longitude qui est mal établie.

Si l'équation est aussi défectueuse, l'erreur sera plus ou moins grande, parcequ'à 3ˢ d'anomalie l'équation se retranche de la longitude moyenne pour avoir la vraie, mais à 9ˢ elle s'ajoute : ainsi, dans l'une des deux observations, l'erreur de l'équation augmentera celle de l'époque, et dans l'autre observation elle la diminuera ; par ce moyen l'erreur totale sera plus grande dans une observation que dans l'autre, et cela du double de l'erreur commise sur l'équation.

Si, par exemple, l'erreur de l'époque est — 5′, c'est-à-dire qu'il y ait dans l'époque des tables 5 minutes de trop, et que l'erreur de la plus grande équation soit — 2′, alors ces deux erreurs s'accumuleront à 9ˢ d'anomalie moyenne, parceque l'équation y est additive, en sorte qu'on aura ajouté 2′ de trop, à raison de l'équation qui est trop grande, et 5′ de trop, à raison de l'époque qui est trop avancée : la longitude calculée aura donc 7′ de trop. Au contraire vers 3ˢ d'anomalie on n'aura que 3′ de trop, c'est-à-dire que l'erreur des tables ne sera que de 3′, parceque l'équation qui est trop grande de 2′, étant soustractive, dans ce cas-là on aura ôté 2′ de trop ; et l'époque ayant toujours 5′ de plus qu'il ne faut, il ne restera que 3′ d'erreur. La différence entre ces deux erreurs des tables, 7′ et 3′, est donc 4′, et cette différence partagée en deux parties donnera 2′, erreur de l'équation.

1290. Lorsqu'on a rectifié, par les deux observations dont nous venons de parler, soit l'époque, soit l'équation de l'orbite d'une planete, il s'agit de rectifier aussi le lieu de l'aphélie ; pour cela on choisit une observation qui tienne le milieu entre les deux autres, et qui soit faite vers le temps où la planete étoit aphélie ou périhélie ; on calcule pour le moment de l'observation la longitude par les tables, après avoir rectifié l'époque et l'équation, ainsi que nous l'avons indiqué dans l'article précédent ; et si l'on trouve quelque différence entre l'observation et le calcul, on est sûr qu'elle dépend toute entiere du lieu de l'aphélie qui sera mal supposé dans les tables.

1291. En effet, puisque par l'hypothese nous avons trouvé la véritable époque et la véritable équation, il ne doit y avoir d'erreur que dans le degré d'anomalie moyenne auquel chaque équation appartient ; si l'on fait l'anomalie trop grande aux environs de l'aphélie, on aura une trop grande équation dans ce point-là, quoique la quantité totale de la plus grande équation ait été exactement déterminée.

1292. En jetant les yeux sur la table de l'équation de l'orbite d'une planete, on voit combien elle varie pour chaque degré d'anomalie moyenne aux environs de l'aphélie ; par exemple, il y a 1′ 58″ pour le Soleil ; car si l'anomalie moyenne augmente d'un degré en partant de l'aphélie, l'équation augmente de 1′ 58″ : si l'on trouvoit donc la longitude par les tables vers ce point-là trop petite de 1′ 58″, on jugeroit que l'aphélie doit être plus avancé d'un degré ; car, puisque la longitude des tables est trop petite, c'est une preuve qu'on a trop retranché pour l'équation, si elle est soustractive, ou que la planete ait déja passé son aphélie, c'est-à-dire que l'anomalie moyenne étoit trop grande, et par conséquent le lieu de l'aphélie trop peu avancé. Si la planete étoit moins avancée que son aphélie, et qu'elle ne l'eût pas atteint, ce seroit la même chose, avec cette différence, que la longitude trop petite prouveroit une équation additive trop petite, et une anomalie moyenne trop grande, d'où résulteroit également un lieu de l'aphélie trop peu avancé.

1293. On pourroit donc trouver par des considérations pareilles les corrections à faire dans chacun des trois élémens : mais cela supposeroit les observations faites exactement dans les apsides et dans les points de la plus grande équation, et ces circonstances sont trop rares ; ainsi je vais expliquer une méthode exacte quoiqu'indirecte, par laquelle on peut trouver les trois élémens d'une orbite par trois observations, avec toute la précision qu'on voudra, sans être assujetti à des observations faites précisément dans les apsides, ou dans les moyennes distances. Les méthodes les plus ingénieuses, les plus géométriques, les plus directes, qu'on ait données jusqu'ici, ne sont point comparables pour la facilité à la méthode indirecte, ou de fausse position, que nous allons expliquer ; ainsi elle nous tiendra lieu de toutes les autres.

1294. On peut voir, si l'on est curieux, plusieurs méthodes pour parvenir au même but, dans les mémoires de 1723, et dans les élémens d'astronomie de Cassini, *pag.* 172 : la huitieme ressemble un peu à celle que nous allons expliquer ; mais elle est encore un peu plus indirecte à cause de l'usage qu'on y fait de l'hypothese elliptique simple dans quelques unes des approximations. Halley avoit résolu le problême par une construction géométrique, où il employoit l'intersection de deux hyperboles (*Philos. Trans. n°.* 128, 1676). La Hire publia une solution de ce problême dans le journal des Savans (*mars* 1677) par une méthode ingénieuse dont il donna ensuite la démonstration dans son grand traité des sections coniques,

liv. VIII, pr. 25. Newton en donna une autre solution (*Phil. nat. Princ. math. lib. I, prop.* 21). Voici le problême qu'il se propose : *Trajectoriam circa datum umbilicum describere quæ transibit per puncta data et rectas positione datas continget ;* mais il cite la solution de M. de la Hire, en disant qu'elle n'est pas fort différente de la sienne. Celle de Newton se trouve dans Keill, et dans les Institutions astronomiques de M. le Monnier, *page* 545. Nicollic, dans les mém. de 1746, *pag.* 291, donna une autre méthode fondée sur de nouvelles propriétés des sections coniques, dans laquelle il détermina l'espece et la position d'une orbite planétaire, connoissant la position et le rapport de trois rayons vecteurs de cette orbite, et il en donna le calcul de deux manieres différentes. Toutes ces méthodes étoient utiles pour le cas où Képler s'étoit trouvé, après avoir fixé trois distances de Mars au Soleil par une multitude d'observations et de calculs (1218). Cela pourroit encore avoir lieu pour la planete de Herschel dont on ne connoît pas bien la révolution. Mais comme, dans la pratique ordinaire de l'astronomie, on ne connoît que les angles au Soleil, et non la longueur des rayons vecteurs ; je vais détailler une autre méthode employée par la Caille (*Mém. acad.* 1750) qui ne suppose que les trois longitudes observées et les temps des observations : elle est beaucoup plus commode et plus facile à employer ; je vais l'expliquer avec plus de détail que je n'avois fait dans les mémoires de *1755*, et je la simplifierai ensuite beaucoup plus (1306).

1295. La révolution d'une planete est la premiere chose que l'on doit connoître (1153) ; ainsi le moyen mouvement d'une planete est donné dans l'intervalle de trois observations : le mouvement de l'aphélie doit être aussi connu par d'autres observations très éloignées auxquelles on aura appliqué la méthode expliquée ci-dessus (1279 et suiv.), parceque les trois observations qu'on emploie pour déterminer une orbite ne peuvent déterminer qu'une ellipse fixe et immobile; mais dans l'intervalle des trois observations qu'on calcule, il ne peut pas y avoir une erreur considérable sur le mouvement de l'aphélie, parceque l'intervalle de temps est peu considérable.

Les trois observations doivent être, autant qu'il est possible, éloignées d'un quart de révolution, c'est-à-dire, deux aux environs des apsides, et l'autre aux environs de la moyenne distance, ou deux aux moyennes distances, et une à l'apside ; car quoique la méthode ne soit pas assujettie à cette condition, le résultat n'en sera que plus concluant et plus sûr, si l'on a cette attention.

Quand il y a deux longitudes vers les apsides, le lieu de l'aphélie est mieux déterminé; quand il y en a deux vers les moyennes distances, c'est l'équation que l'on trouve avec plus de précision, car elle est alors déterminée par le double de sa valeur. Ces observations peuvent aussi être éloignées de plusieurs révolutions entieres, pourvu que l'on connoisse assez bien le mouvement de la planete, et celui de son aphélie pendant tout l'intervalle qu'on aura pris; on rapproche alors une révolution de l'autre, comme si les trois observations appartenoient à la même révolution, et cela revient au même.

On suppose encore que l'on connoît déja, du moins à-peu-près, l'excentricité et le lieu de l'aphélie: on les connoît en effet pour les planetes; d'ailleurs on a vu ci-devant (1260, 1279) la maniere de les trouver, en supposant même qu'on n'en eût aucune idée.

1296. Les trois longitudes doivent être réduites au plan de l'orbite, et non à l'écliptique (1133); je fais cette remarque afin d'avertir que les astronomes publient toujours les résultats des longitudes observées réduites à l'écliptique: ainsi il est nécessaire, dans le cas dont nous parlons, d'y faire une réduction pour les rapporter au plan de l'orbite; mais elle est contraire à celle des tables, où il s'agit de réduire à l'écliptique une longitude qui est d'abord comptée sur l'orbite.

Ces trois longitudes, qui sont destinées à déterminer les trois principaux élémens de l'orbite, devroient encore être corrigées des inégalités que peuvent y causer les attractions planétaires (3671). Enfin ces observations doivent être dégagées de l'aberration, qui augmente toujours les longitudes des planetes dans leurs oppositions (2882).

Nous diviserons le procédé de cette méthode en trois parties: dans la premiere nous supposerons qu'on connoisse l'excentricité, et nous chercherons le lieu de l'aphélie; dans la seconde nous changerons d'excentricité pour avoir un autre lieu de l'aphélie; dans la troisieme nous chercherons, par le moyen d'une troisieme observation, quelle est de ces deux excentricités celle qu'on doit préférer.

1297. Dès que l'on connoît la durée de la révolution d'une planete, on sait exactement combien il y a de temps, ou combien il y a de degrés d'anomalie moyenne, entre deux instans quelconques où cette planete aura été observée: par exemple, si ces deux instans sont éloignés du quart de la durée de cette révolution, il y aura toujours un quart de cercle pour la différence des anomalies moyennes; car il ne faut pas perdre de vue que les

temps et les anomalies moyennes marchent toujours uniformément et sont toujours proportionnels (1234).

Si l'on est toujours en état de connoître la différence ou la somme de deux anomalies moyennes, ou de deux distances moyennes à l'apside, l'une à droite, l'autre à gauche, il n'en est pas ainsi de ces anomalies prises séparément; car pour connoître chacune des deux, il faudroit connoître et le lieu de l'aphélie, qui est le point d'où elles se comptent, et le lieu moyen de la planete: mais l'observation ne donne que le lieu vrai; il faudroit donc connoître encore l'excentricité, qui sert à trouver l'anomalie moyenne par le moyen de l'anomalie vraie (1244). Cette considération fournit le moyen de reconnoître par deux observations si le lieu de l'aphélie d'une planete qui se trouve dans les tables, est exact, en supposant qu'on connoisse l'excentricité; car ayant les deux longitudes observées, on aura (en retranchant le lieu de l'aphélie) deux anomalies vraies supposées, on cherchera l'anomalie moyenne qui répond à chacune par le moyen des deux proportions (1240 et 1241), et de l'excentricité supposée connue: si ces deux anomalies moyennes different entre elles autant que l'exige l'intervalle des deux observations, elles sont exactes l'une et l'autre, et par conséquent le lieu de l'aphélie est bien connu et a été bien supposé.

1298. Si les deux anomalies vraies supposées ne donnent pas la différence d'anomalie moyenne, telle qu'elle doit être, c'est-à-dire, si elles ne donnent pas le même intervalle de temps que l'on a par observation, c'est une preuve qu'elles ne sont pas bonnes; c'est par cette épreuve qu'on appercevra si le lieu de l'aphélie qu'on a supposé d'après les tables, ou par conjecture, n'est pas exact: dans ce cas on fera une autre *supposition*, en donnant à l'aphélie quelques minutes de plus ou de moins, on recommencera le même calcul; et l'on verra ainsi, par l'événement de la seconde *supposition*, quelle est celle qu'il faut adopter, et quel est le lieu de l'aphélie qu'il faut prendre pour représenter l'intervalle de ces deux premieres observations (avec l'excentricité qui est connue, ou employée dans cette premiere hypothese). Ainsi j'appelle *premiere hypothese* une excentricité supposée, avec le lieu de l'aphélie qui lui correspond en satisfaisant à l'intervalle des deux observations; pour parvenir à cette hypothese, on a été obligé de passer par diverses *suppositions* pour le lieu de l'aphélie.

1299. Pour que le lieu de l'aphélie trouvé dans la premiere hypothese fût bien déterminé, il faudroit nécessairement que l'excentricité fût exacte; car pour réduire l'anomalie vraie en anoma-

lie moyenne, on fait usage de l'excentricité, comme on le voit dans les deux analogies (1240 et 1241).

Si l'on suppose une autre excentricité, et qu'on refasse les mêmes calculs, on aura pour seconde hypothese un résultat différent pour le lieu de l'aphélie, en employant toujours les deux mêmes observations; on pourroit faire ainsi une table de différentes excentricités, et à côté de chacune on écriroit le lieu de l'aphélie qui répond à chaque hypothese d'excentricité.

1300. Pour savoir maintenant quelle est la véritable excentricité que l'on doit choisir, ou celle de toutes nos hypotheses qui est la bonne, on emploie une troisieme observation éloignée d'environ 90° des autres et sur laquelle on fera la remarque suivante. L'intervalle de temps entre l'observation aphélie, et l'observation faite 90° avant ou après l'aphélie, étant connu, on a la différence entre les deux anomalies moyennes; mais si l'on se trompoit sur l'excentricité, ou, ce qui revient au même, sur l'équation, toute l'erreur tomberoit sur l'anomalie qui est à 90° de l'aphélie, parceque l'équation y est fort grande; et cette erreur seroit nulle dans l'aphélie où l'équation est nulle, ou du moins fort petite: ainsi la différence entre l'anomalie moyenne vers l'aphélie et l'anomalie moyenne à 90° de là, seroit affectée de toute l'erreur commise sur l'équation de l'orbite. On verra donc par cette différence d'anomalie quelle équation il faut employer pour que la différence des anomalies soit égale à celle que l'on connoît d'avance par le temps écoulé entre les deux observations, et c'est ainsi que l'équation se trouvera déterminée.

On prendra donc l'excentricité de la premiere hypothese avec le lieu de l'aphélie connu, ainsi qu'il a été déterminé pour cette premiere excentricité (1298); on formera deux anomalies vraies avec les deux longitudes vraies, dont une soit assez éloignée de l'autre pour que l'équation soit le plus différente qu'il est possible; on les convertira en anomalies moyennes; et si la différence de ces deux anomalies moyennes est exactement ce que l'on sait qu'elle doit être, on sera sûr que l'hypothese est bonne, et l'on n'aura pas d'autre calcul à faire. Mais il n'arrive jamais que l'on rencontre ainsi du premier coup la véritable excentricité; l'on choisira donc une autre excentricité avec la position de l'aphélie qui lui répond, c'est-à-dire, la 2e hypothese; on verra laquelle des deux satisfait mieux à l'intervalle donné; et par une regle de trois on en trouvera un troisieme qui satisfera exactement à l'intervalle ou à la différence de l'anomalie moyenne connue entre ces deux observa-

tions ; on trouvera par une autre proportion quelle est la longitude de l'aphélie correspondante : cette excentricité et le lieu de l'aphélie qui lui répond, seront conformes aux trois observations, et le problême sera résolu.

1301. Exemple. Je suppose trois oppositions de Mars observées en 1743, 1751 et 1753, c'est-à-dire, les longitudes de Mars sur son orbite, vues du Soleil pour les temps moyens, comme il suit, en appliquant aux trois longitudes sur l'écliptique les réductions $-17''$, $-50''$ $+13''$. On peut voir le détail de ces observations dans les Mémoires de 1755.

Temps moyen des observ.		Longit. dans l'orbite.	Différ. d'anom. moy.
1743. 15 fév.	$19^h\ 17'\ 40''$	$4^s\ 27°\ 16'\ 15''$	$6^s\ 21°\ 30'\ 44''\ 4$
1751. 14 sept.	8 28 0	11 21 34 10	1 26 6 50 6
1753. 16 nov.	10 28 33	1 24 47 37	

Je prends les lieux de l'aphélie dans les tables de Halley dont on se servoit alors, $5^s\ 1°\ 23'\ 37''$, $5^s\ 1°\ 33'\ 37''$, $5^s\ 1°\ 36'\ 9''$; je forme trois anomalies vraies $11^s\ 25°\ 52'\ 38''$, $6^s\ 20°\ 0'\ 33''$, $8^s\ 23°\ 11'\ 28''$; je convertis les deux premieres anomalies vraies en anomalies moyennes, après avoir pris ce qui s'en manque pour aller à 360°, et cela en faisant les deux hypotheses suivantes pour l'excentricité, c'est-à-dire, en la supposant d'abord de 1417 parties, ensuite de 1427, la distance moyenne du Soleil à la Terre étant toujours de 10000.

Premiere Hypothese. Je prends l'excentricité telle qu'elle est dans les tables de Halley 1417, la moyenne distance de Mars au Soleil étant de 15236,9; je la réduis à ce qu'elle seroit si la moyenne distance de Mars étoit l'unité : et prenant aussi l'aphélie tel qu'il est dans ces tables, ce qui forme ma premiere *supposition*, les deux anomalies vraies donnent deux anomalies moyennes (1240, 1241) qui sont $11^s\ 25°\ 3'\ 15''\ 1$, et $6^s\ 16°\ 35'\ 21''\ 6$. La différence $6^s\ 21°\ 32'\ 6''\ 6$ est trop grande de $1'\ 22''\ 2$; car suivant les tables, et à raison du temps écoulé entre les deux observations, la différence doit être de $6^s\ 21°\ 30'\ 44''\ 4$ en prenant dans les tables de Halley, soit le moyen mouvement de Mars, soit celui de son aphélie : or les tables sont exactes à cet égard, sur-tout pour un si petit intervalle.

En continuant la même hypothese d'excentricité, je fais une seconde *supposition* pour l'aphélie ; j'augmente de dix minutes les

lieux de l'aphélie employés dans la premiere supposition; je forme par conséquent deux anomalies vraies moindres de 10' que les précédentes, je les convertis en anomalies moyennes; je trouve 11ˢ 24° 51' 15" 5, et 6ˢ 16° 27' 0" 8, dont la différence est de 6ˢ 21° 35' 45", 3, c'est-à-dire trop grande de 5' 1".

Ainsi pour avoir changé l'aphélie de 10', l'erreur, qui étoit de 1' 22" 2, est devenue 5' 1", c'est-à-dire a augmenté de 3' 38" 8; on dira 3' 38"8 : 10' 0" :: 1' 22"2 : 3' 45". Ainsi pour rendre nulle cette erreur de 1' 22"2, il auroit fallu diminuer de 3' 45" les lieux de l'aphélie, au lieu de les augmenter de 10': par ce calcul nous sommes donc assurés que l'excentricité tirée des tables de Halley, et employée dans cette premiere hypothese, avec le lieu de l'aphélie diminué de 3' 45", satisfera à l'intervalle des deux observations. En effet, calculant les deux premieres observations dans cette hypothese, on a 11ˢ 25° 7' 45"0, et 6ˢ 16° 38' 29"5, dont la différence est 6ˢ 21° 30' 44"5 qui ne differe que d'un dixieme de seconde de celle qui étoit donnée. Il faut actuellement faire la même opération avec une autre excentricité, c'est-à-dire former une seconde hypothese.

Seconde hypothese. Je prends une excentricité 1427, plus grande que celle de Halley de 10 parties, en conservant le grand axe toujours le même, et supposant l'aphélie tel qu'il est dans ses tables; je convertis les deux anomalies vraies en anomalies moyennes, ce qui donne 11ˢ 25° 2' 52" 6, et 6ˢ 16° 34' 0" 2, dont la différence 6ˢ 21° 31' 7" 6, est plus grande de 23"2 que celle qui doit avoir lieu. Je forme donc une seconde supposition en augmentant le lieu de l'aphélie de 10'; il en résulte deux autres anomalies vraies, qui doivent aussi se convertir en anomalies moyennes: le calcul étant fait, on aura 11ˢ 24° 50' 52" 2, et 6ˢ 16° 25' 40" 1, dont la différence est trop grande de 4' 3" 5.

1302. Ainsi en augmentant de 10' le lieu de l'aphélie dans cette seconde hypothése d'excentricité, l'erreur de l'anomalie moyenne, qui étoit de 23"2, est venue à 4' 3" 5, c'est-à-dire a augmenté de 3' 40" 3: donc pour la faire diminuer de 23" 2 et la réduire à rien, on dira 3' 40" 3 : 10' :: 23" 2 : 1' 3" 2, et l'on aura la quantité qu'il falloit ôter de l'aphélie des tables pour concilier les deux premieres observations avec le moyen mouvement des tables, dans l'hypothese de 1427 d'excentricité.

C'est donc l'aphélie des tables de Halley diminué de 3' 45"0 avec 1417 d'excentricité, ou diminué de 1' 3" 2 avec 1427, qui satisfait aux deux premieres observations; il faut, par le moyen de la troisieme observation, choisir entre ces deux hypotheses, ou trouver

trouver une excentricité qui soit plus ou moins grande que celles-là, en y joignant le lieu de l'aphélie corrigé à proportion ; cette troisieme hypothese représentera non seulement les deux premieres, mais encore la troisieme observation.

1303. L'intervalle de temps qu'il y a entre la seconde et la troisieme observation, donne pour différence d'anomalie moyenne 56° 6′ 50″, 6, suivant les tables : l'on convertira en anomalies moyennes les anomalies vraies dans la seconde et dans la troisieme observation avec 1417 d'excentricité, l'aphélie des tables étant diminué de 3′ 45″0, ensuite avec 1427, l'aphélie étant diminué de 1′ 3″2 ; l'anomalie moyenne pour la 3e observation sera dans la premiere hypothese 8^s 12° 46′ 17″8, et dans la seconde 8^s 12° 39′ 17″ 8 : ainsi entre les anomalies moyennes de la 2e et de la 3e observation dans la premiere hypothese, la différence est plus grande de 57″ 7 que 56° 6′ 50″ 6, et pour la seconde hypothese la différence est trop petite de 2′ 25″8 ; ajoutant ces deux différences qui sont en sens contraires, on voit que le changement de 10 parties dans l'excentricité produit 3′ 23″5 de variation dans le mouvement d'anomalie moyenne pour cet intervalle de temps ; on trouvera par une proportion que 57″7 qui est l'erreur de la premiere hypothese, donnera 2, 84 : il faudra donc ajouter 2, 84 à l'excentricité 1417 de la premiere hypothese (1301), et l'on aura 1419, 84, excentricité qui représentera également la troisieme observation, pourvu qu'on y joigne l'aphélie qui doit lui correspondre.

Pour avoir la correction du lieu de l'aphélie, on dira 3′ 23″5 : 2′ 41″,8 :: 57″7 : 45″5. En effet, puisque la premiere hypothese d'excentricité 1417 avec le lieu de l'aphélie diminué de 3′ 45″0 a donné 57″7 de trop, et que la seconde hypothese d'excentricité 1427 avec le lieu de l'aphélie diminué de 1′ 3″2 (c'est-à-dire de 2′ 41″, 8 moins que dans la premiere hypothese), a donné 2′ 25″, 8 de moins qu'il ne falloit pour la différence d'anomalie moyenne, en sorte que l'erreur a changé de 3′ 23″, 5 ; il s'ensuit par la proportion que pour corriger les 57″7 de la premiere hypothese, il faut diminuer l'aphélie de 45″5 de moins que dans la premiere hypothese, où il y avoit 3′ 45″0 de correction ; la différence est 2′ 59″5 ; ainsi l'on ôtera cette quantité de l'aphélie des tables.

On peut encore faire cette proportion d'une autre maniere, et chercher quel est le lieu de l'aphélie qui doit convenir à la nouvelle excentricité 1419, 84 ; car si avec la premiere excentricité 1417, il faut ôter 3′ 45″, 0 de l'aphélie des tables, et si avec la seconde excentricité 1427, il faut ôter 1′ 3″2, c'est-à-dire 2′ 41″8 de moins,

on aura ce qui répond à 1419, 84 en faisant cette proportion, 10 : 2′ 41″8 : : 2, 84 : 45″5, correction de l'aphélie qui répond à 2, 84 de variation dans l'excentricité ; on a donc 3′ 45″0, moins 45″5 ou 2′ 59″5, comme par l'autre proportion, pour la correction de l'aphélie qui doit répondre à l'excentricité 1419, 84, et qui conjointement avec cette excentricité représentera le premier intervalle aussi bien que le second, ou la premiere différence d'anomalie moyenne, aussi bien que la seconde.

1304. Je dis en premier lieu que cette excentricité 1419, 84, avec le lieu de l'aphélie diminué de 2′ 59″5, représentera le premier intervalle. En effet, nous avons trouvé que 1417 d'excentricité avec 3′ 45″ de diminution dans l'aphélie, aussi bien que 1427 avec 1′ 3″ de diminution dans l'aphélie, représentoient également l'intervalle connu, ou la différence d'anomalie moyenne des deux premieres observations; ainsi toute autre excentricité entre ces deux-là, avec une diminution de l'aphélie proportionnée, représentera également cet intervalle; donc l'excentricité 1419, 84, avec 2′ 59″5 de diminution dans l'aphélie, satisfera à la différence des deux premieres observations.

Je dis en second lieu qu'ils satisferont aussi au second intervalle ou à la différence d'anomalie moyenne entre la seconde et la troisieme observation : car dans la premiere hypothese 1417, on trouve 57″7 de plus pour cette différence, et dans la seconde hypothese qui est de 1427, on trouve 2′ 25″8 de moins que l'on ne doit trouver; donc à proportion on trouvera exactement ce qu'il faut trouver, en employant 1419, 84, excentricité à laquelle répond la plus grande équation 10° 41′ 19″ (1258). Tout cela sera plus sensible encore pour ceux qui le liront en faisant les calculs dont nous avons donné la marche et les résultats. Au reste il n'est pas nécessaire de faire ces calculs avec la précision des dixiemes de seconde, comme nous venons de les indiquer, puisqu'il n'est pas possible d'être assuré des longitudes observées, même à 5 secondes près.

On a donc enfin et l'excentricité, et la correction à faire dans le lieu de l'aphélie pour représenter exactement les deux différences d'anomalie moyenne, dans les trois observations données. Si l'on recommence en effet le calcul avec ces élémens, c'est-à-dire avec l'excentricité 1419, 84, qui donne pour logarithmes constans 0,0405872 et 4,2837679, et avec les trois longitudes de l'aphélie $5^s\ 1°\ 20'\ 37''5$, $5^s\ 1°\ 30'\ 37''\ 5$, et $5^s\ 1°\ 33'\ 9''5$; on trouvera pour les anomalies moyennes qui répondent aux temps des trois observations, $11^s\ 25°\ 6'\ 43''6$, $0^s\ 16°\ 37'\ 28''1$, et $8^s\ 12°\ 44'\ 19''0$; elles different entre elles des mêmes quantités que les trois ano-

malies moyennes qu'on avoit formées, avec les élémens tirés des tables (1301), c'est-à-dire de $6^s\ 21^\circ\ 30'\ 44'',4$, et de $1^s\ 26^\circ\ 6'\ 50''6$ à un dixieme près.

De ces trois anomalies, il y en a deux qui ne sont pas loin des apsides, et une qui approche plus des moyennes distances; elles ne sont pas rigoureusement dans les points les plus favorables, mais on n'a pas toujours des observations faites dans des positions choisies, et celles de Mars sont des plus rares, ses oppositions n'ayant lieu que tous les deux ans : on verra du moins par cet exemple que la méthode est générale, et ne suppose que trois observations vers les points principaux de l'orbite, c'est-à-dire les unes plus près des apsides que des moyennes distances, et les autres plus loin.

1305. Lorsqu'on connoît l'excentricité et le lieu de l'aphélie, il ne reste plus à connoître qu'une longitude moyenne, pour avoir les trois élémens qu'on cherchoit; on prendra une des trois anomalies moyennes trouvées ci-devant (1304), par exemple $11^s\ 25^\circ\ 6'\ 43''6$; on y ajoutera le lieu de l'aphélie des tables diminué de $2'\ 59''5$, suivant le dernier résultat, c'est-à-dire $5^s\ 1^\circ 20' 37'',5$, et l'on aura la longitude héliocentrique moyenne de Mars dans son orbite au temps de la premiere observation $4^s\ 26^\circ\ 27'\ 21''$, plus grande de $9''$ que par les tables de Halley; d'où l'on peut conclure toutes les autres longitudes moyennes, (857). Nous parlerons bientôt plus au long des époques des longitudes moyennes (1325).

1306. On rend ces calculs bien plus courts en employant deux tables d'équation faites pour deux excentricités différentes, et se servant du mouvement vrai au lieu du mouvement moyen; je vais en donner le procédé appliqué à un exemple, en négligeant les décimales; tout le détail n'exige pas une heure de temps et une page de calcul, et ne demande pas même qu'on ouvre les tables de logarithmes. Ainsi l'on pourra déterminer facilement toutes les orbites autant de fois qu'on aura d'observations prises trois à trois. Ainsi le problême de déterminer une orbite elliptique par trois observations, sur lequel les astronomes et les géometres de tous les temps se sont tant exercés (1294), pour lequel on a donné des méthodes si savantes et si compliquées, qu'on n'osoit presque pas les employer, est enfin réduit à ces opérations simples et familieres que les astronomes font tous les jours; et j'espere que la facilité de ma méthode nous procurera désormais des déterminations fréquentes des élémens planétaires. Voici les trois oppositions dont je me suis servi en expliquant cette méthode, *Mém.* 1775.

	Temps moyen.	Longitude sur l'orbite.	Anomalie moyenne, suivant les tables.	Longitude moyenne, suivant les tables.
1764	1 juin 1h 2′ 10″	8s 11° 23′ 4″	3s 20° 1′ 42″	8s 21° 46′ 12″
1770	14 déc. 11 22 21	2 23 8 1	9 11 5 25	2 12 57 13
1775	23 fév. 9 1 46	5 5 7 14	0 3 50 17	5 5 46 46

Les deux premieres oppositions sont vers les moyennes distances, et la troisieme vers l'aphélie; les données auxquelles il s'agit de satisfaire, sont le mouvement vrai ou la différence des longitudes observées 8s 23° 44′ 10″ entre 1764 et 1775, et 2s 11° 59′ 13″ entre 1770 et 1775.

Premiere hypothese. En employant l'équation de l'orbite de Mars 10° 42′ 13″ telle qu'elle étoit dans mes premieres tables, et les anomalies telles qu'elles sont rapportées ci-dessus, aussi suivant les tables, je trouve, pour les temps de la premiere et de la troisieme observation, des longitudes vraies qui different de 8s 23° 46′ 26″, ou 2′ 16″ de trop. En augmentant de 10′ 0″ les anomalies, c'est-à-dire en ôtant 10′ des lieux de l'aphélie, je trouve 8″ seulement de trop; ainsi l'on voit que 10′ de diminution sur l'aphélie accourcissent de 2′ 8″ le mouvement vrai de 1764 à 1775; d'où il suit qu'en le diminuant de 10′ 37″ on aura la différence exacte 8s 23° 44′ 10″, qui est donnée par observation. Cette quantité de 10′ 37″ se peut même trouver par une seule opération en divisant les 2′ 16″ par 12′ 49″, somme des différences d'équation pour un degré, vers 3s 20° et 0s 4°, et multipliant par 60′.

Seconde hypothese. En employant l'équation de l'orbite 10° 40′ 2″, telle qu'elle est dans les tables de Halley, plus petite que la mienne de 2′ 11″, et l'aphélie de mes tables, on a le mouvement 8s 23° 44′ 24″, ou 14″ de trop; mais 10′ ont produit 2′ 8″; donc en diminuant l'aphélie de 1′ 6″, on aura la différence observée.

Ainsi aux valeurs supposées de l'équation $\left\{\begin{matrix} 10^\circ\ 42'\ 13'' \\ 10\ \ 40\ \ 2 \end{matrix}\right\}$ répondent deux corrections à faire aux lieux de l'aphélie $\left\{\begin{matrix} -10'\ 37'' \\ -\ 1\ \ 6 \end{matrix}\right\}$, et ces deux hypotheses satisfont au mouvement vrai de 1764 à 1775, quoiqu'elles different de

2' 11" pour l'équation, et de 9' 31" pour l'aphélie. Donc toute autre équation intermédiaire, avec la correction de l'aphélie qui lui répondra proportionnellement, y satisfera également. Je calcule donc, dans chacune de ces deux hypotheses, la seconde observation de 1770, et je compare la longitude vraie calculée, avec celle qui avoit été trouvée pour 1775, dans la même hypothese; la différence des deux longitudes vraies qui doit être, suivant l'observation, de 2' 11° 59' 13", se trouve trop petite de 1' 49" dans la premiere hypothese, et trop grande de 1' 22" dans l'autre;

la différence 3' 11" est à la différence {des équations, 2' 11" / des corr. d'aphél. 9 31}

comme 1' 49" sont à {1' 15" / 5 26} à ajouter aux nombres de la seconde hypothese. Donc l'équation 10° 40' 58", avec une correction de 5' 11" à ôter de l'aphélie de mes tables, satisfont tout à la fois aux deux intervalles d'observations.

Calculant en effet les trois longitudes dans cette nouvelle hypothese, en prenant pour chaque équation une partie proportionnelle entre les nombres tirés des deux tables, on a les quantités suivantes, dans lesquelles les longitudes vraies sont calculées avec les longitudes moyennes des tables, mais avec les équations, et les anomalies qui résultent des trois observations.

	Equation observée.	Longitudes vraies calculées.	Long. observées.	Différence.
1764	10ˢ 22' 8"	8ˢ 11° 23' 20"	8ˢ 11° 23' 4"	16"
1770	11 22 21	2 23 8 17	2 23 8 1	16
1775	0 38 22	5 5 7 30	5 5 7 14	16

Ainsi le mouvement vrai calculé est d'accord avec les observations: mais toutes les longitudes calculées sont trop grandes de 16"; ce qui prouve que les époques des longitudes moyennes employées dans ces premieres tables devoient être diminuées de 16", suivant ces trois oppositions. Il est vrai que ce sont ici des longitudes vraies: mais l'erreur sur les longitudes moyennes est la même puisque les équations sont données par les observations; la longitude vraie ne differe qu'à raison de la longitude moyenne.

1307. On peut ainsi, par le moyen de deux tables d'équation, pour deux excentricités différentes, corriger les trois élémens d'une orbite quelconque, avec trois observations d'une planete, réduites au Soleil, et au plan de l'orbite de la planete. Il n'y a que Mercure auquel cette méthode ne sauroit jusqu'ici s'appliquer, parceque ses conjonctions n'ont été observées que vers deux points de son orbite. Mais avec les lunettes achromatiques dont on commence à se servir, on voit Mercure si près de ses conjonctions supérieures, que bientôt peut-être on en aura un assez grand nombre pour pouvoir y appliquer la méthode que je viens d'exposer.

Il est donc utile d'avoir deux tables d'équation pour chaque planete, où l'on puisse voir la différence exacte des équations à chaque degré d'anomalie, différence qui n'est point proportionnelle aux équations elles-mêmes. Mes tables, aussi bien que celles de Halley, étant calculées rigoureusement, suivant l'hypothese de Képler, remplissent suffisamment cet objet; j'avois même déja publié des tables de Mercure dans la *Connoissance des temps de* 1767, et des tables de Saturne dans les *Mém. de l'Ac.* 1768, pour deux excentricités différentes. Enfin M. de Lambre a fait des tables du changement de l'équation de chaque planete pour tous les degrés (*Connoiss. des temps* 1791).

Les oppositions de Mars en 1762, 1766 et 1768, calculées de la même maniere, m'ont donné 10° 40′ 36″ au lieu de 10° 40′ 58″, la correction de l'aphélie + 53″ au lieu de — 5′ 11″, et la correction des époques — 24″ au lieu de — 16″. Par un milieu, la plus grande équation de Mars est 10° 40′ 47″, et ne differe de celle de Halley que de 45″; la correction de l'aphélie pour mes tables de 10″ seulement, soustractive, 3′ 24″ pour celles de Halley; enfin la correction des époques — 42″ pour mes premieres tables, ou 2″ pour celles de Halley.

La distance moyenne de Mars 1,523693, avec l'équation 10° 40′ 40″ que j'ai adoptée dans mes nouvelles tables, donne pour excentricité 141838, la distance moyenne du Soleil étant 1000000; en diminuant l'excentricité de 480 on diminue l'équation de 2′ 11″.

Telle est la quatrieme méthode que j'avois annoncée (1287), pour déterminer l'aphélie d'une planete en même temps que l'équation, et la longitude moyenne; c'est la plus générale de toutes; il n'y a que Mercure pour lequel on emploie la méthode de l'art. 1286: on peut aussi supposer que l'on connoisse l'équation du centre par les moyens de l'art. 1267, et chercher l'aphélie par une méthode analogue à celle que j'ai employée pour trouver l'équation

de Mercure (1268) après m'être assuré du lieu de l'aphélie par une autre méthode, car tous les passages de Mercure se réduisent à deux points de son orbite, et ne peuvent par conséquent déterminer qu'un de ces deux élémens avec la longitude moyenne.

1308. La planete d'Herschel n'ayant pu être observée dans les apsides et les moyennes distances présente un autre problême à résoudre : étant données deux distances au Soleil et l'angle compris, trouver la grandeur et la figure de l'orbite.

Pour avoir la distance au Soleil, je compare des observations faites dans deux quadratures opposées ; si les erreurs des tables ne sont pas égales, il s'ensuit que la distance n'est pas exacte dans les tables. Je la fais varier de maniere que les erreurs, dans les deux quadratures, soient égales ; je m'assure alors de la véritable valeur de la parallaxe annuelle : car comme elle est additive dans l'une des observations, et soustractive dans l'autre, et qu'en corrigeant l'erreur qui reste pour la longitude héliocentrique, il n'en reste plus dans les deux observations, il s'ensuit que les tables deviennent parfaitement d'accord avec l'observation, tant pour la longitude que pour la distance.

Je dégage donc les longitudes observées de l'aberration de la nutation de la parallaxe annuelle, et de la réduction à l'écliptique, et j'ai les longitudes héliocentriques telles qu'il faut les employer, ainsi que les distances au Soleil qui répondent aux observations.

Pour résoudre alors le problême d'une maniere analogue aux méthodes précédentes, je prends d'abord pour premiere hypothese la distance moyenne au Soleil, dans la table que nous avons déja ; et je mets pour premiere supposition l'excentricité et le lieu de l'aphélie qui sont dans ces tables ; je calcule avec ces élémens une des distances au Soleil, qui se trouve plus ou moins grande que celle qui est donnée. Je fais varier l'aphélie pour que cette distance soit la même, et je change les anomalies vraies de la même quantité, je les convertis en anomalies moyennes, et je vois de combien le mouvement d'anomalie moyenne differe de celui qui est donné par les tables ; c'est l'erreur de la premiere supposition.

Je fais une autre supposition pour l'excentricité, et recommençant le même calcul, je trouve une autre erreur pour le moyen mouvement ; alors, par une regle de trois, je trouve quelle est l'excentricité qui rendra l'erreur nulle, et j'ai une supposition qui représente la premiere distance et les deux anomalies. Pour y parvenir je pourrois également employer le mouvement vrai d'anomalie donné par observation, et calculer dans chaque supposition la

seconde anomalie vraie ; car ayant corrigé la premiere anomalie moyenne, on y ajoutera le mouvement moyen connu, on aura la seconde anomalie moyenne ; on cherchera l'équation correspondante, ce qui donnera l'anomalie vraie, qui doit être la même que celle qu'on a eue en la corrigeant par le même changement d'aphélie ; s'il y a une différence, on fera varier l'excentricité jusqu'à ce qu'elle soit nulle.

Je calcule dans cette premiere hypothese la seconde distance au Soleil, et je marque l'erreur qu'elle donne sur la distance.

La seconde hypothese se fait avec une autre distance moyenne qui donne un autre mouvement d'anomalie moyenne; et en faisant varier l'aphélie et l'excentricité, je parviens, comme dans la premiere hypothese, à représenter la premiere distance au Soleil et les deux anomalies : mais la seconde distance ne s'accorde pas avec l'observation, et c'est l'erreur de la seconde hypothese.

Par le progrès des erreurs de ces deux hypotheses, je trouve quelles sont la distance moyenne, l'excentricité et l'aphélie qui formeront une troisieme hypothese représentant également la premiere distance, le moyen mouvement, et la seconde distance. Cette troisieme hypothese donnera les véritables élémens de l'orbite, déterminé par les deux longitudes et les deux distances au Soleil. J'ai donné un exemple de cette méthode dans les mémoires de l'académie pour 1787.

Trouver le mouvement des apsides et la révolution anomalistique, par les observations.

1309. La méthode que nous avons donnée pour déterminer une orbite (1293), étant appliquée aux anciennes observations, fait trouver le lieu de l'aphélie dans les temps plus reculés ; et quoique les observations anciennes ne soient pas fort exactes, elles font cependant connoître que les aphélies des planetes ne sont pas fixes dans le ciel. La théorie de l'attraction (3672) nous servira de même à prouver ce mouvement des apsides, qui est produit par les attractions des planetes, mais qui est très petit.

1310. La révolution d'une planete par rapport à son apside, le temps qu'elle emploie à y revenir, ou l'intervalle d'un passage par son aphélie au passage suivant, s'appelle la RÉVOLUTION ANOMALISTIQUE (1279) parceque l'anomalie recommence à chaque passage dans l'apside : cette révolution anomalistique est toujours un

un peu plus longue que la révolution par rapport aux équinoxes, parceque le mouvement des apsides se fait suivant l'ordre des signes, excepté peut-être pour Vénus. Nous commencerons par la révolution anomalistique du Soleil, ou plutôt de la Terre; c'est une des plus faciles à déterminer.

1311. Si le lieu de l'apside de la Terre étoit exactement fixe dans le ciel, la révolution anomalistique seroit égale à la révolution sidérale (1161): mais l'apogée du Soleil a un petit mouvement selon l'ordre des signes, comme les observations le prouvent, aussi-bien que la théorie de l'attraction; il faut donc, pour connoître sa révolution anomalistique, comparer deux passages du Soleil par son apogée, et non pas deux retours à une même étoile, ni deux passages par l'équinoxe (82, 884).

1312. L'Apogée du Soleil, en 1750, étoit à $3^s\,8^\circ\,38'$, suivant les observations de la Caille. Celles de Waltherus faites à Nuremberg, rapportées et calculées par la Caille (*Mém. acad.* 1749), donnent, pour 1496, $3^s\,3^\circ\,57'\,57''$. Le mouvement de l'apogée du Soleil seroit donc de $4^\circ\,40'$ en 254 ans, ce qui fait $1'\,6''$ par année. (*Mém. acad.* 1757).

Suivant ces observations de Waltherus, le Soleil avoit passé par son périgée le 16 décembre 1487 à $6^h\,5'$ de temps moyen; il y a passé encore le 30 décembre 1751 à $3^h\,9'$, suivant les observations de la Caille; l'intervalle est de $96428^j\,21^h\,4'$, ce qui donne pour chaque révolution anomalistique $365^j\,6^h\,15'\,42''$ (*Leçons d'astr. art.* 708). Cet auteur a comparé les observations de Waltherus, et celles de Co-cheou-king faites à la Chine en 1278 et 1279 (381), que le P. Gaubil a rapportées dans son histoire de l'Astronomie Chinoise, tome II, pag. 107, et dont M. de l'Isle avoit une copie manuscrite encore plus détaillée; il en conclut l'apogée au commencement de 1279, $3^s\,0^\circ\,8'$; il en déduit la révolution anomalistique, ou la différence entre deux passages consécutifs du Soleil par son apogée, $365^j\,6^h\,15'\,24''$, plus grande que la durée de l'année tropique (885) de $26'\,35''$; et le mouvement de l'apogée $1^\circ\,49'\,10''$ par siecle, ou $65''\frac{1}{2}$ par année relativement à l'équinoxe (*Mém.* 1757). On trouve la révolution anomalistique de $365^j\,6^h\,15'\,23''$ quand on suppose le mouvement séculaire du Soleil de $46'\,0''$ au lieu de $45'\,55''6$ que supposoit la Caille dans ses tables; et si l'on réduit le mouvement de l'apogée à $62''$, on trouve la révolution anomalistique $365^j\,5^h\,13'\,58''$.

1313. Pour faire voir ce qui résulte de la comparaison des autres observations par rapport au mouvement de l'apogée du Soleil, je

vais rapporter les positions de l'apogée déterminées par différens astronomes avec le mouvement annuel que M. Cassini en a déduit, par comparaison avec le lieu de l'apogée observé en 1738 (Cassini, *pag.* 197). J'ai supprimé quelques positions qui sont visiblement défectueuses, et j'en ai ajouté d'autres.

	Apogée.				Mouv. ann.	
Hipparque, 140 ans avant J. C.	2^s	5°	30′	0″	1′	3″
Albategnius, en 883,	2	22	17		1	7½
Waltherus, en 1503,	3	4	9		1	4
Tycho, en 1588,	3	5	30		1.	6
Képler, en 1588,	3	5	32		1	6½
Par les observations de la Hire, calculées par la Caille, vers 1684,	3	7	28	0	. . . .	
Flamsteed, en 1690 (*Hist. cel. prolegom.* p. 139),	3	7	35	0	. . . .	
Cassini, en 1738,	3	8	19	8	. . . .	
La Caille, en 1750,	3	8	38	4	. . . .	
Mayer, en 1750,	3	8	37	34	. . . .	
M. de Lambre, par les observations de M. Maskelyne, en 1780,	3	9	8	20	1	2,15

Les observations de Waltherus comparées avec celles de Maskelyne donnent 65″4; celles de Co-cheou-king 64″6: mais l'exactitude des observations de Flamsteed et de la Hire doit l'emporter, suivant moi, sur l'ancienneté des autres; ainsi je préfere le mouvement de 62″ que donnent les observations de la Hire et celles de Maskelyne.

M. Cassini supposoit déja dans ses tables ce mouvement de 62″ par siecle, se fondant principalement sur les observations d'Hipparque; M. le Monnier le suppose de 63″ dans ses Institutions astronomiques; Mayer le faisoit de 66″ dans ses tables, et la Caille de 65″: mais la détermination de Flamsteed, comparée avec celle de la Caille, ne donne que 63″, et avec celle de M. de Lambre, 61″6. M. de la Grange trouve 63″6 par sa théorie, en supposant la densité de Vénus plus grande que celle de la Terre (*Mém. de Berlin* 1782, *pag.* 222), et cela se réduiroit à 60″1 en diminuant la masse de Vénus (3565). Tout cela differe peu de la détermination que nous adoptons ici, et de celle que M. de Lambre a suivie dans ses tables, qui est de 62″15.

1314. Les aphélies des autres planetes ont aussi des mouvemens, mais ils ne sont pas connus avec autant d'exactitude, à

cause du peu d'observations anciennes que nous avons sur les planetes ; d'ailleurs ces mouvemens sont si peu sensibles, qu'on ne peut les déterminer avec précision, si ce n'est tout au plus pour Mars ; on en jugera par les différences qu'il y a pour cette partie entre les tables de Cassini, celles de Halley et les nôtres, différence dont on verra la table ci-après (1330).

1315. L'APHÉLIE DE MERCURE, que j'ai déterminé par les passages sur le Soleil, après avoir bien vérifié l'équation de l'orbite, est, pour 1786, 8ˢ 14° 8′ (*Mém. acad.* 1786). Cassini trouvoit par les passages de 1661, 1690, 1697, que le 9 novembre 1690 l'aphélie étoit à 8ˢ 12° 22′ 25″, et qu'en supposant le mouvement de l'aphélie de 1′ 20″ par année, on représentoit assez bien les passages de 1631, 1672, 1723 et 1736. Mais j'ai déja remarqué que tous ces passages arrivent vers les mêmes points de l'orbite : celui de 1661 étoit le seul qu'on eût observé dans la partie opposée, c'est-à-dire dans le nœud descendant qui est vers 10ˢ 20° d'anomalie moyenne ; ainsi l'on ne pouvoit s'assurer que ce mouvement de l'aphélie satisferoit aux observations faites dans d'autres points de l'orbite. Cassini observe lui-même (*pag.* 612), que deux hypotheses qui different entre elles de 1° 30′ pour le lieu de l'aphélie, et de 52′ pour la plus grande équation, ne laissent pas de représenter toutes les deux avec une égale précision les sept passages que l'on avoit alors. Pour tirer parti de ces observations et avoir le mouvement de l'aphélie qui en résulte, j'ai employé une méthode à laquelle on n'avoit pas encore pensé. J'ai pris les passages de Mercure depuis 1661 jusqu'en 1786, deux à deux, toujours un dans le nœud ascendant et un dans le nœud descendant : l'équation étoit bien connue (1270) ; ainsi le mouvement vrai, calculé dans l'intervalle des deux passages, n'étoit plus ou moins grand qu'à raison du lieu de l'aphélie que j'employois. En faisant donc différentes suppositions jusqu'à ce que le mouvement calculé fût d'accord avec le mouvement observé, j'ai trouvé le lieu de l'aphélie qui satisfaisoit à chaque binaire d'observations. J'ai eu ainsi quatre positions de l'aphélie, ce qui m'a fait connoître son mouvement dans trois intervalles ; il s'est trouvé dans chacun de 56″ par an : ce résultat est préférable à tout autre ; car quand même il y auroit quelque erreur sur l'équation, elle influeroit également sur chacune des 4 comparaisons, et le mouvement se trouveroit toujours avec la même exactitude.

Cette méthode m'a donné en même temps le mouvement moyen de Mercure qui ne peut se séparer de celui de l'aphélie, et que j'ai trouvé de 1ˢ 23° 43′ 3″ par année.

1316. J'ai aussi discuté les observations faites dans d'autres points de l'orbite, et sur-tout dans les digressions qui arrivent vers les apsides et les moyennes distances (1267, 1270, 1286).

On trouve d'abord dans Ptolémée quatorze observations de Mercure, faites vers les plus grandes digressions, et qui seront rapportées à la fin de ce VIe liv. Je les ai toutes calculées avec soin; mais il y en a deux qu'on ne peut absolument concilier avec les autres, et quatre qui sont trop près des apsides : les huit autres m'avoient donné, pour le mouvement de l'aphélie, 1′ 10″ par an (*Mém. de l'acad.* 1766); mais ce mouvement de l'aphélie de Mercure déduit des observations anciennes ne s'accorde pas avec les observations du 17e siecle, faites par Hevelius et Halley, et dont j'ai donné le calcul (*Mém.* 1766, *pag.* 503). Ces observations indiquoient que le mouvement de l'aphélie n'étoit pas si considérable.

Les conjonctions de Mercure avec ε des Gemeaux, que j'avois observées le 24 mai 1764 et le 4 juin 1776 dans la plus grande digression et la moyenne distance, s'accordoient assez bien avec mes premieres tables où je supposois l'aphélie, en 1764, de 8^s 13° 50′ (*Mém. de l'ac.* 1777): mais la correction des tables, au lieu de — 10″, étoit devenue + 20′: ainsi plus on avançoit, et plus l'erreur augmentoit; et une observation du 3 juin 1779 me fit voir que le mouvement de l'aphélie étoit certainement trop fort dans mes tables. Enfin la position que j'ai rapportée (1315) avec le mouvement annuel de 56″½ satisfait à peu près à toutes ces observations (*Mém. de l'ac.* 1786).

M. de la Grange a trouvé 57″ par la théorie; mais il suffiroit de diminuer d'un sixieme la masse de Vénus, qui est peu connue, pour trouver par sa formule le même résultat que moi.

1317. L'aphélie de Vénus, suivant les dernieres conjonctions, étoit, en 1780, à 10^s 8° 12′ (*Mém. acad.* 1785); son mouvement est le plus difficile à déterminer par les anciennes observations. Dans les différentes déterminations qu'en donne Cassini, il se trouve des différences de près de 15°; mais ces différences ne sont pas si importantes qu'elles le paroissent; l'excentricité de Vénus étant fort petite, une erreur d'un degré sur l'aphélie ne produit pas une minute sur la longitude héliocentrique; on s'en apperçoit en jetant les yeux sur la table de l'équation de Vénus, qui, pour un degré d'anomalie, n'est que de 49″; en sorte qu'il n'en résulte pas sur le lieu de la planete une différence considérable; cependant ces 49″ font quelquefois 2′ 5″ sur le lieu de Vénus vu de la Terre.

Les observations de Vénus faites dans les années 136, 138, 140, donnent $8^s\ 21^\circ\ 28'$ pour le lieu de son aphélie, que Cassini estime être le résultat le moins défectueux que fournissent les anciennes observations (*Elém. d'astr. pag.* 544, 564). Il trouve le lieu de cet aphélie par les conjonctions inférieures de 1715, 1716 et 1718, à $10^s\ 6^\circ\ 50'$; ainsi dans l'espace de 1578 années le mouvement de l'aphélie auroit été de $45^\circ\ 21'$, à raison de $1'\ 43''$ par année.

En employant de même le lieu de l'aphélie de Vénus déterminé par les observations des années 1592, 1594 et 1601, à $10^s\ 1^\circ\ 54'\ 12''$, comparé avec le précédent, il trouve $1'\ 39''\frac{1}{2}$ par année.

Horoccius, après l'observation du passage de 1639 examinant la théorie de Vénus, fixoit son aphélie à $10^s\ 5^\circ\ 0'$; si l'on compare cette position à celle de 1716, $10^s\ 6^\circ\ 50'$, on trouve par ces 77 années le mouvement annuel de $1'\ 26''$ (*Elém. d'astr. pag:* 564), et c'est ainsi que Cassini l'employoit dans ses tables.

1318. J'ai essayé encore pour cette recherche la même méthode que pour l'aphélie de Mercure (1285). Vénus étant dans sa plus grande digression vers le 7 août 1769, j'ai observé sa longitude plusieurs jours de suite, par exemple, le 7 août à $20^h\ 52'\ 57''$ temps moyen; elle étoit de $3^s\ 0^\circ\ 19'\ 54''$, plus petite de $25''$ que par les tables de Halley. Ces $25''$ d'erreur exigeroient une augmentation de $1^\circ\ 15'$ dans le lieu de l'aphélie de Vénus: ainsi le lieu de cet aphélie pour 1769 seroit par ces observations de $10^s\ 8^\circ\ 51'\ 24''$: cette position de l'aphélie est assez conforme aux observations faites la même année dans le mois d'avril, aux environs de la plus grande digression.

La digression que j'avois observée à la fin de juillet 1767 donne $1^\circ\ 30'$ pour la correction de l'aphélie, ce qui approche beaucoup de celle de $1^\circ\ 15'$ que je trouve par la digression de 1769. Chacune de ces digressions a été déterminée par un milieu entre plusieurs observations: d'après cela je supposois l'aphélie de Vénus au commencement de 1768 à $10^s\ 8^\circ\ 58'$; mais les conjonctions inférieures de Vénus valent bien mieux pour cette détermination. Par les trois conjonctions de 1774, 1775 et 1777, je trouve le lieu de l'aphélie, en 1776, $10^s\ 7^\circ\ 41'$ (*Mém. ac.* 1779, p. 449): par celles de 1780, 82 et 83, je trouve, pour 1780, $10^s\ 8^\circ\ 12'$.

En comparant la position de l'aphélie qui étoit dans mes premieres tables avec celle que Képler donne dans ses tables rudolphines, $10^s\ 1^\circ\ 4'$ pour 1592, on a le mouvement de l'aphélie de Vénus $2'\ 41''\frac{1}{2}$ par année; et c'est ainsi que je l'avois employé: mais on ne trouve que $2'\ 28''$ en partant de la longitude que Cassini

tiroit pour 1596 des observations de Tycho, 10ˢ 1° 54′, et Cassini ne le fait que de 1′ 26″ dans ses tables. En comparant mes observations avec celles du dernier siecle qui ont servi aux tables de Cassini et de Halley, il me sembloit être de 1′ 27″ par an (*Mém.* 1779). En les comparant avec celui qui résultoit des conjonctions de 1715, 1718 et 1719, j'avois 1′ 18″. Halley, dans ses tables, ne donnoit que 56″ ½.

Au milieu de ces incertitudes que nous laissent les observations, on ne peut consulter que la théorie de l'attraction; suivant Euler, le mouvement des apsides est d'autant plus considérable que l'excentricité est plus petite; il deviendroit même infini si l'excentricité étoit infiniment petite (*Prix de* 1756, p. 32 : voyez aussi la piece de 1748, p. 52). Il sembleroit par-là que le mouvement de l'aphélie de Vénus doit être considérable; mais, par une théorie bien plus approfondie, M. de la Grange ne trouve que 48″ ½ (*Mém. de Berlin* 1782): je m'en tiendrai à ce résultat, les observations donnant trop peu de certitude.

Cependant on ne peut dissimuler que Mercure produisant seul 4″3, et la masse de cette planete étant inconnue, il peut y avoir encore de l'incertitude à ce sujet; d'ailleurs on est frappé du défaut d'analogie qui se trouve ici, le mouvement de l'aphélie étant rétrograde par rapport aux étoiles, tandis que tous les autres sont directs, et Mercure se trouvant produire sur Vénus tout le contraire de ce que Vénus produit sur la Terre, quoique les positions soient analogues; mais la situation des aphélies est peut-être la cause de cette différence.

1319. L'APHÉLIE DE MARS est le plus aisé de tous à déterminer, parceque son excentricité est très forte, et que l'effet se multiplie par sa proximité à la Terre; aussi nous voyons que son mouvement est presque le même dans les tables de Cassini et de Halley. Par les oppositions de Mars observées depuis 1762 jusqu'en 1775 j'ai trouvé l'aphélie pour 1770, 5ˢ 1° 51′ (*Mém. de l'ac.* 1775). Les trois oppositions de Mars observées par Ptolémée donnent pour le lieu de l'aphélie, 135 ans après J. C. 3ˢ 29° 24′. Par les observations faites à Greenwich en 1691, 1696 et 1700, qui sont très bien d'accord avec celles qu'on faisoit dans le même temps à Paris, et dont la premiere et la troisieme sont à pareilles distances de l'aphélie, Cassini trouve 5ˢ 0° 31′ 34″ pour 1696; ainsi, dans l'espace de 1561 ans l'aphélie a avancé chaque année de 1′ 11″,8 (*Elém. d'astr. pag.* 478).

1320. Dans mes recherches sur l'orbite de Mars, j'ai trouvé le

lieu de l'aphélie pour 1748 à 5ˢ 1° 26′ 10″, moins avancé de 3′ 24″ que suivant les tables de Halley (1307), ce qui prouve que le mouvement annuel de l'aphélie de Mars est assez conforme à ces tables, ou de 1′ 10″. Cependant la longitude pour 1748, comparée à celle que donne Képler pour 1592, 4ˢ 28° 49′ 50″, donne pour le mouvement annuel 60″ seulement; Cassini le fait de 70″, Halley de 72; M. de la Grange trouve 66″ : ce seroit un peu moins, si l'on diminuoit la densité de Vénus. Je crois donc, en prenant un milieu, qu'on peut le supposer de 1° 51′ 40″ par siécle, ou 1′ 7″ par année.

1321. L'aphélie de Jupiter, calculé par les dernieres oppositions de 1773 à 1784, étoit, en 1778, à 6ˢ 10° 22′; mais il y a 19′ de plus dans Cassini, 29′ de plus dans mes premieres tables, et 45′ dans celles de Halley. Par les observations de Ptolémée on trouve, pour l'an 136, 5ˢ 14° 38′ suivant Cassini; par celles de Tycho en 1588, 1590 et 1592, on a pour 1590, 6ˢ 6° 31′; et Képler le place pour la même année à 6ˢ 6° 44′. Les déterminations de Cassini pour 136 et 1590 donnent 54″ par année. Par les oppositions de 1719, 1721 et 1723, la longitude de l'aphélie pour 1720 est 6ˢ 9° 47′; cette longitude comparée avec celle de Ptolémée donne 57″2 par année. Les observations de Tycho, comparées à celles de ce siecle, donnent le mouvement annuel de 1′ 30″ (*Elém. d'astron. pag.* 429).

Ces différences tenoient aux inégalités de Jupiter qui n'étoient point connues. Cassini adoptoit dans ses tables le mouvement annuel de l'aphélie de 57″,4, d'après les anciennes observations; mais Halley le supposoit de 72″.

M. Jeaurat ayant comparé entre elles les observations de Tycho, et celles qui avoient été faites à Paris en 1750, 1761 et 1765, trouvoit qu'en 1590 l'aphélie étoit à 6ˢ 7° 49′ 19″, et en 1762 6ˢ 10° 36′ 41″, d'où il résulteroit 58″ pour le mouvement (*Mém.* 1765); cependant il le faisoit de 79″ dans ses tables : M. Wargentin trouvoit que 62″ satisfaisoient mieux aux observations.

Euler trouvoit que l'aphélie de Jupiter doit avancer de 55″ (*Prix de* 1752); M. de la Grange 57″ (*Mém. de Turin*, t. 3. *Mém. de Berlin* 1782); M. de la Place 56″ 73 : je crois qu'on peut s'en tenir au dernier résultat.

1322. L'aphélie de Saturne étoit en 1769 à 9ˢ 0° 22′ suivant les recherches multipliées que j'avois faites par les dernieres observations pour la construction de mes tables (*Mém.* 1768). Cassini, au moyen des trois oppositions des années 127, 133 et 136, trouve pour l'an 132, 7ˢ 24° 14′; les oppositions de 1686 et de 1694 donnent pour 1694, 8ˢ 28° 58′, ce qui fait pour le mouvement annuel 1′ 20″. (*Elém. d'astron. pag.* 373.)

Par quatre comparaisons différentes des oppositions de Saturne, observées par Tycho depuis 1582 jusqu'en 1599, il trouve 8ˢ 25° 41′ pour 1591, moins avancé seulement de 5′ que suivant les tables rudolphines de Képler. Ce lieu comparé à celui de 1694, 8ˢ 28° 58′, donne le mouvement annuel de 1′ 55″. Mais ces observations de Tycho, comparées avec celles de Ptolémée, donnent seulement 1′ 18″ (*ibid. pag.* 374), et c'est celui qu'il avoit employé dans ses tables: si l'on compare les observations de Tycho avec ma détermination pour 1769, on trouve 1′ 35″.

Les observations de 1701, 1708 et 1716, donnent le lieu de l'aphélie 2ˢ 28° 25′ pour le 12 décembre 1708; cette position, comparée à celle de 1590, donne le mouvement 1′ 23″ ½.

Il suivroit de tout cela, dit Cassini, *pag.* 374, que le mouvement de l'aphélie auroit été plus prompt dans le dernier siecle; on peut voir d'autres essais sur cette détermination (*Mém.* 1765, p. 361; 1768, p. 432; 1774, p. 82). Mais les irrégularités de Saturne sont si grandes, qu'on ne doit pas être surpris de ces différences, car il suffit de six minutes d'erreur sur le lieu ou sur le mouvement de Saturne pour produire un degré sur le lieu de l'aphélie; ainsi l'on ne pouvoit pas espérer une précision plus grande que celle d'un degré pour le lieu de l'aphélie, et de 5″ sur le mouvement annuel de l'aphélie.

Euler, dans sa premiere piece sur Saturne, *pag.* 108, adoptoit le mouvement de l'aphélie tel qu'il se trouvoit dans les tables de Cassini, c'est-à-dire 1′ 18″ par an, et se contentoit d'ajouter 28′ aux longitudes de l'aphélie. Dans sa seconde piece il trouve que l'aphélie apparent de Saturne doit avancer chaque année de 1′ 8″; M. de la Grange trouve 1′ 6″ 3; et M. de Lambre l'a employé de 1′ 6″ 07, d'après les calculs de M. de la Place.

1323. Herschel a son aphélie, en 1784, à 11ˢ 23° 25′ suivant les tables de D. Nouet, et 11ˢ 17° 32′ suivant celles du P. Fixlmillner; mais les dernieres s'écartent déja d'une minute des observations: pour moi, en tenant compte des perturbations, je trouve l'aphélie à 11ˢ 16° 20′. Le mouvement de cet aphélie ne peut point être déterminé jusqu'ici par les observations; mais, suivant les calculs que M. de la Grange m'a communiqués, cet aphélie avance de 3″17 par les actions de Jupiter et de Saturne, en sorte que le mouvement annuel de l'aphélie est de 53″42.

1324. Après avoir expliqué tout ce que les observations ont pu nous apprendre sur les mouvemens des aphélies, je terminerai cette matiere en rapportant le résultat de la théorie de M. de la Grange,

Grange, qui a calculé le mouvement de l'aphélie de chaque planete par l'action de toutes les autres (*Mém. de Berlin*, 1782). On verra dans la table suivante que le mouvement de l'aphélie de Mercure est de 4″ 14 par l'action de Vénus, et au bas de la colonne, que le total des attractions fait 6″66; et comme la précession est de 50″25, le mouvement total est 56″91 par rapport aux équinoxes. Au reste, tous les effets de Vénus contenus dans la seconde ligne doivent être probablement diminués d'un tiers, parceque M. de la Grange suppose la masse 1,31; celle de la Terre étant prise pour unité, tandis que je ne trouve que 0,95 (2748, 3565).

Mouvemens des aphélies des planetes.

	MERCURE.	VÉNUS.	LA TERRE.	MARS.	JUPITER.	SATURNE.
Par ☿	. . .	— 4″30	— 0″ 42	+ 0″02	0″00	0″ 00
♀	4″ 14	. . . .	+ 5, 20	+ 0, 70	0, 01	0, 00
♁	0, 84	— 5, 06	. . . .	+ 1, 92	0, 01	0, 00
♂	0, 04	+ 1, 18	+ 1, 54	. . . .	0, 00	0, 00
♃	1, 56	+ 6, 38	+ 6, 79	+ 12, 31	. . . .	15, 99
♄	0, 08	+ 0, 08	+ 0, 19	+ 0, 70	6, 56	. . . .
Total.	6″66	— 1″72	+ 13″40	15″65	6″58	15″ 99
Précess.	50, 25	50, 25	50, 25	50, 25	50, 25	50, 25
Mouv.	56, 91	48, 53	63, 65	65, 90	56, 83	66, 24

Trouver les époques de la longitude moyenne des planetes.

1325. AYANT déterminé par les méthodes précédentes (1279, 1285, 1293) le lieu de l'aphélie d'une planete, ou en général celui de l'apside (car cette méthode convient aussi à l'apogée de la lune), on aura par la même une longitude moyenne (1305); d'ailleurs le jour où la planete est dans son aphélie, sa longitude vraie, sa longitude moyenne et la longitude de son aphélie sont

exactement la même chose ; on les connoît donc toutes trois lorsqu'on connoît le lieu de l'aphélie.

Exemple. La première des trois observations de Mars (1301) fut faite le 15 février 1743, à $19^h\ 17'\ 40''$, temps moyen, et la longitude moyenne pour le moment de cette observation a été trouvée (1305) de $4^s\ 26^\circ\ 27'\ 21''$; de ce moment-là jusqu'au premier janvier 1744 à midi moyen, Mars a dû parcourir $5^s\ 17^\circ\ 16'\ 53''$, à raison du mouvement annuel par rapport aux équinoxes (1162): si l'on ajoute ce mouvement à la longitude moyenne déduite de l'observation, l'on aura la longitude moyenne pour le commencement de l'année 1744, $10^s\ 13^\circ\ 44'\ 14''$; c'est ce que nous appellons l'époque des moyens mouvemens de Mars pour 1744, de laquelle on peut déduire toutes les autres ; celle qui est employée dans nos tables est plus grande de $8''$ parcequ'elle est le résultat d'un plus grand nombre d'observations.

1326. Les époques employées dans nos tables astronomiques sont pour le premier janvier a midi de temps moyen, à Paris, lorsqu'il s'agit des années bissextiles ; mais dans les années communes on emploie le midi du jour précédent, qui est celui du 31 décembre : par exemple, on trouve l'époque du Soleil pour 1750, par le moyen de l'observation des équinoxes (884), de $9^s\ 10^\circ\ 0'\ 35''7$; c'est la longitude moyenne du Soleil le 31 décembre 1749 à midi moyen. On a introduit cette méthode dans la vue de simplifier l'usage de la table des moyens mouvemens pour les jours du mois ; car dans cette table, au moyen de la disposition précédente, il suffit de retrancher un jour dans les deux premiers mois des années bissextiles pour s'en servir en tout temps, au lieu qu'il faudroit faire cette correction sur dix mois, si toutes les époques étoient calculées pour le premier janvier. En effet, dans les tables des moyens mouvemens pour chaque jour du mois, on a coutume de mettre au premier janvier le mouvement d'un jour, par exemple ; $59'\ 8''$ si c'est pour le Soleil ; cela suppose que l'époque est fixée pour la veille : si elle est pour le midi même du premier janvier, il n'y a rien à ajouter à l'époque pour avoir la longitude moyenne le premier de janvier ; il faudra donc ôter un jour de la date proposée, ou $59'\ 8''$ du mouvement indiqué par la table ; et ainsi des autres jours, jusqu'au premier de mars. On supplée à ce retranchement dans les tables en mettant, pour les années bissextiles, une colonne où il y a un jour de plus dans les deux premiers mois ; dans les suivans, le jour intercalaire ajouté au mois de février fait que tous les moyens mouvemens

des jours sont devenus plus petits de 59′ 8″, et il n'y a plus aucune correction à y faire ; mais il faudroit ajouter le mouvement d'un jour pendant tout le reste de l'année, si les mouvemens avoient été justes pendant les deux premiers mois.

Quand on a l'époque d'une année commune, il faut y ajouter le mouvement annuel ou le mouvement pour 365 jours (1162), et l'on a l'époque de l'année commune qui la suit : si l'on suppose que l'époque de 1750 étoit de 9ˢ 10° 0′ 35″7, et qu'on y ajoute 11ˢ 29° 45′ 40″5, mouvement du Soleil pour 365 jours, on aura 9ˢ 9° 46′ 16″2 (a), époque pour 1751 ; mais si l'année suivante est bissextile, il faut ajouter un jour de plus, c'est-à-dire, le mouvement pour 366 jours : ainsi à l'époque de 1751 on ajoutera 0ˢ 0° 44′ 48″9, et l'on aura 9ˢ 10° 31′ 5″1 ; c'est l'époque de l'année bissextile 1752 : la raison de cette différence vient de ce que cette derniere époque commence un jour plus tard que celle des années communes. En ajoutant à 1752 le mouvement pour 48 ans, on a l'époque de 1800 ; mais il faut ôter le mouvement d'un jour, parceque l'année 1800 est commune (1547), et que l'époque est pour la veille.

1327. L'époque d'une année séculaire commune, telle que 1800, en y ajoutant le mouvement pour 4 années juliennes (1162), dont une soit bissextile, c'est-à-dire, 1′ 50″4, donne l'époque de 1804. Si vous commencez à compter d'une année bissextile, comme 1704, pour trouver la longitude de 1708, ce sera encore la même chose, parceque, dans les deux cas, il y a un jour de plus que 4 années communes ; mais pour sentir la parité de ces deux cas, il faut deux considérations différentes. Dans le premier cas, l'époque de 1800 est pour le 31 décembre précédent ; celle de 1804 pour le premier janvier : ainsi, quoique les 4 années 1800, 1801, 1802, 1803, aient été communes, il y a cependant un jour de plus entre les époques de 1800 et de 1804, à cause de la différente maniere de les compter (1326). Dans le second cas, l'époque de 1804 et celle de 1808 sont bien toutes deux pour le premier janvier ; mais il y a un jour de plus dans le cours de l'année bissextile 1804 : ainsi l'intervalle des époques augmente aussi d'un jour, et il se trouve le même qu'entre celles de 1800 et de 1804.

En général, quand on prend le mouvement pour 4, 8, 12, etc. ou un nombre d'années divisible par 4 (1162), soit que l'on com-

(a) Si l'on trouve quelquefois une décimale de plus ou de moins dans les tables, cela vient des centiemes de secondes qu'on y a employées.

mence par une année commune, 1800, 1801, 1802, 1803, 1900, ou par une année bissextile, on trouve toujours exactement l'époque demandée ; mais s'il arrivoit que le calendrier eût souffert une ou deux interruptions dans l'intervalle, comme si on alloit de 1800 à 1900, ou de 1799 à 1899, il faudroit diminuer le mouvement de la valeur d'un jour. Dans le cas où l'on va de 1800 à 1900, cette derniere étant une année commune, et son époque étant pour le 31 décembre aussi bien que celle de 1800, tandis que l'année 1800 a été diminuée d'un jour, la différence des deux époques doit être nécessairement plus petite d'un jour; ainsi il faut ôter le mouvement diurne 59′ 8″3 du mouvement séculaire 46′ 0″ au-delà des cent révolutions completes pour cent années juliennes, dont 25 sont bissextiles, ajoutant 12 signes; il reste 11ˢ 29° 46′ 52″ qu'il faut ajouter à la premiere longitude pour avoir la seconde. Ce mouvement séculaire diminué d'un jour est celui qui est marqué ainsi, Com. 100, à la page 7 des tables du Soleil. J'ai négligé de mettre cette centieme année séculaire commune dans les tables des autres planetes, parceque cela est aisé à suppléer en ôtant le mouvement d'un jour du mouvement séculaire marqué pour 100 B, ce qui formera le mouvement 100 C, ou pour cent années, dont 24 seulement sont bissextiles, au lieu de 25.

Dans le cas où l'on iroit de 1799 à 1899, il faudroit donc ôter le mouvement d'un jour, parceque l'année 1800 souffrira une diminution d'un jour, et que les cent ans compris entre 1799 et 1899 n'ont que 24 bissextiles ; et il en est de même de tous les intervalles dans lesquels 1800 sera compris. Ainsi, quoique l'année 1800 soit commune, on aura exactement les longitudes des années suivantes en ajoutant à celle de 1800 le mouvement pour un an, deux ans, etc. pris dans la table qui est immédiatement après les époques, parceque l'époque de 1800 commence un jour plutôt, ce qui compense la diminution d'un jour dans cette année.

Si l'on veut avoir l'époque de 1900 C, c'est-à-dire, année commune, on ajoutera à celle de 1800 C, le mouvement pour 100 C, plus petit d'un jour que celui de 100 B.

Pour avoir 2000 B, on ajoutera le mouvement de 100 B.

Pour 2100 C, on ajoutera 100 C ; car, quoique le siecle soit complet entre 2000 et 2100, l'époque de 2100 étant calculée pour la veille du jour de l'an, ou pour un jour plutôt que celle de 2000, cela diminue d'un jour l'intervalle.

Pour 2200 C, on ajoutera 100 C.

Pour 2300 C, on ajoutera 100 C.

Pour 2400 B, on ajoutera 100 B.

Ainsi, pour aller de 1800 à 2400, il faudroit prendre le mouvement pour 600 B diminué de 4 jours, parcequ'il y a 4 séculaires communes dans l'intervalle, savoir 1900, 2100, 2200 et 2300.

1328. Si l'on veut remonter aux années précédentes, on suivra le même principe : de la longitude pour 1752 trouvée ci-dessus on ôte le mouvement de 52 ans ; on a, pour 1700, 9ˢ 10° 7′ 9″9.

Pour 1600, il ne suffit pas d'ôter le mouvement séculaire 46′ 0″, parceque l'année 1600 étoit bissextile, et l'année 1700 commune (1547) ; en conséquence la longitude ou l'époque de 1700, qui est pour le 31 décembre précédent, se trouve diminuée d'un jour et rapprochée de 1600 (1326) ; il faut donc ajouter le mouvement d'un jour à l'époque de 1600 trouvée par la regle précédente, afin d'avoir cette longitude pour le premier de janvier à midi (et non pour le 31 de décembre précédent) ; on aura par ce moyen l'époque de 1600, 9ˢ 10° 20′ 18″. En général, quand on voudra conclure l'époque d'une année séculaire bissextile plus éloignée, de celle d'une année séculaire commune, il faudra en ôter le mouvement séculaire, et y ajouter le mouvement diurne, ou en ôter le mouvement 100 C.

Pour remonter de l'époque de 1600 à celle de 1500, il ne suffit pas d'ôter le mouvement séculaire ; il faut ensuite ajouter le mouvement de dix jours, parcequ'en 1500 on suivoit le calendrier julien, ou vieux style, et en 1600 on avoit pris le nouveau style. Le calendrier grégorien ayant supprimé dix jours de l'année 1582 (1547), l'intervalle de 1500 à 1600 est moindre de dix jours que celui de cent années juliennes, ou de 36525 jours, auquel répond le mouvement séculaire : on ôte donc dix jours de trop quand on retranche le mouvement séculaire ; ainsi il faut ajouter le mouvement qui répond à ces dix jours : par exemple, l'époque du Soleil pour 1600 est 9ˢ 10° 20′ 18″2 ; si l'on en ôte 46′, mouvement séculaire du Soleil, et qu'on ajoute ensuite 9° 51′ 23″3, mouvement pour 10 jours, on aura 9ˢ 19° 25′ 41″5, époque de 1500.

M. de Lambre préfere de remonter tout de suite à l'année 800, en ôtant de 1780 le mouvement pour 2580 ans et onze jours, il ajoute ensuite le mouvement séculaire.

1329. Lorsqu'on connoît une fois l'époque de 1500, il n'y a plus aucune variété dans le calendrier, parcequ'on n'emploie que le calendrier julien ; il suffit d'en ôter le mouvement séculaire 46′ pour avoir l'époque de 1400 ; et continuant toujours la même

soustraction, on parvient aux époques des années séculaires qui ont précédé. J'ai prolongé les tables du Soleil et de la Lune qui sont dans ce livre, en suivant le même progrès jusqu'à l'an 800 avant J. C. parceque les anciennes observations caldéennes vont jusqu'à ce siecle là (1419), et que les astronomes en font encore quelque usage. Nous n'avons aucun besoin des temps plus éloignés: au-delà de 800 ans avant J. C., l'astronomie ni l'histoire ne fournissent rien, pour ainsi dire, qui soit susceptible d'un calcul astronomique, excepté peut-être l'astronomie indienne (389).

Dans ces temps reculés il n'y avoit aucune forme constante de calendrier (254); ainsi il a bien fallu convenir d'une échelle commune pour mesurer soit les siecles qui ont précédé, soit ceux qui ont suivi l'ere chrétienne. La forme du calendrier julien est simple, uniforme, commode; elle a été suivie pendant près de 1000 ans dans l'histoire de l'Europe; elle a été employée par des chronologistes et des astronomes habiles; elle est suivie dans les tables de Cassini, et je m'en servirai, à son exemple, quand je parlerai des anciennes observations, quoique Ptolémée se soit servi des années de Nabonassar (1598).

1330. En remontant ainsi par une soustraction continuelle du mouvement séculaire, on parvient à l'année 100 de J. C., ensuite à l'année 0, et de là à l'année 100 avant J. C.; ainsi de l'année 100 de notre ere à l'année 100 avant notre ere, il y a 200 ans de distance. Suivant la maniere de compter employée par les chronologistes, il n'y a point d'année zéro; il faudroit retrancher un an de la somme des années avant et après notre ere pour avoir l'intervalle: par exemple, l'équinoxe observé par Hipparque l'an 602 de Nabonassar répond au 24 mars de l'année 146 avant J. C. suivant les chronologistes; si on veut le comparer avec celui de 1765, et qu'on ajoute 1765 avec 146, on aura 1911, et cependant il n'y a réellement que 1910 ans d'intervalle, parceque l'année où est né J. C. doit s'appeller *zéro* (Cassini, *Elém. d'astron: pag.* 216), et non pas l'année 1 avant J. C.; il est donc plus naturel de dire que l'équinoxe dont nous venons de parler se rapporte à l'année 145 avant J. C. et non pas à l'année 146. Cette maniere de compter les années qui précedent l'ere vulgaire, est reçue actuellement de tous les astronomes; mais comme elle ne s'accorde pas avec les livres de chronologie les plus célebres, nous aurons soin d'avertir toutes les fois que nous nous en servirons, en disant que c'est suivant la maniere de compter des astronomes.

Epoques et mouvemens des planetes, suivant différens auteurs.

Epoques de 1750.	Cassini.	Halley.	Différence.	Suiv. nos tables.
Mercure,	8ˢ 13° 19′ 5″	8ˢ 13° 7′ 45″	— 11′ 20″	8ˢ 13° 11′ 15″
Vénus,	1 16 19 21	1 16 19 23	+ 0 2	1 16 20 48
Mars,	0 21 58 43	0 21 58 30	— 0 13	0 21 58 47
Jupiter,	0 4 0 59	0 4 5 17	+ 4 18	0 3 42 29
Saturne,	7 20 41 56	7 20 26 24	— 15 32	7 21 20 22

Mouvement séculaire des planetes.	Cassini.	Halley.	Différence.	Suiv. nos tables.
Mercure,	2ˢ 14° 16′ 54″	2ˢ 14° 2′ 13″	— 14′ 41″	2ˢ 14° 4′ 20″
Vénus,	6 19 11 2	6 19 11 52	+ 0 50	6 19 12 25
Mars,	2 1 41 56	2 1 42 20	+ 0 24	2 1 42 10
Jupiter,	5 6 21 30	5 6 28 11	+ 6 41	5 6 17 33
Saturne,	4 23 29 28	4 23 6 0	— 23 28	4 23 31 36

Aphélies pour 1750.	Cassini.	Halley.	Différence.	Suiv. nos tables.
Mercure,	8ˢ 13° 41′ 18″	8ˢ 13° 27′ 12″	— 14′ 6″	8ˢ 13° 33′ 58″
Vénus,	10 7 38 0	10 7 18 31	— 19 29	10 7 46 42
Mars,	5 1 36 9	5 1 31 38	— 4 31	5 1 28 14
Jupiter,	6 10 14 33	6 10 33 46	+ 19 13	6 10 21 4
Saturne,	8 29 13 31	8 29 39 58	+ 26 27	8 28 9 7

Mouvement séculaire des aphélies.	Cassini.	Halley.	Différence.	Suiv. nos tables.
Mercure,	0ˢ 2° 13′ 20″	0ˢ 1° 27′ 37″	— 45′ 43″	0ˢ 1° 33′ 45″
Vénus,	0 2 23 20	0 1 34 13	— 49 7	0 1 21 0
Mars,	0 1 59 38	0 1 56 40	— 2 58	0 1 51 40
Jupiter,	0 1 35 42	0 2 0 0	+ 24 18	0 1 34 33
Saturne,	0 2 9 44	0 2 13 20	+ 3 36	0 1 50 7

Elémens de la nouvelle planete Herschel.	M. de la Place, 1783.	P. Fixlmillner, 1787.	M. Oriani, 1787.	Selon moi, en 1788.
Longit. en 1784,	3ˢ 15° 2′ 5″	3ˢ 14° 41′ 0″	3ˢ 14° 45′ 44″	3ˢ 14° 49′ 14″
Aphélie,	11 23 24 40	11 17 31 33	11 17 22 7	11 16 19 30
Nœud,	2 12 49 33	2 12 50 50	2 12 53 41	2 12 45 14
Mouvem. sécul.	2 13 16 55	2 9 53 0	2 9 52 37	2 9 11 11

Epoques du Soleil 1750.

	Lieu du Soleil.
Suivant Cassini.	9^s 10° 0′ 35″
Suivant les tables de Flamsteed.	9 10 0 21
Suivant les tables de Halley.	9 10 0 13
Suivant les tables de Mayer.	9 10 0 34, 7
Suivant les tables de la Caille.	9 10 0 43 4
Suivant M. le Monnier, astron. naut. lun. 1771. .	9 10 0 25 8
Suivant M. de la Croix, par les observations de M. le Monnier.	9 10 0 25
Suivant M. de Lambre, par les observations de M. Maskelyne.	9 10 0 35 7

1331. Lorsqu'on connoît les époques de la longitude moyenne par observation (1325), ou par les calculs précédens, on peut avoir la longitude moyenne à tout autre jour de l'année, en y ajoutant le mouvement diurne (1161) autant de fois qu'il y a de jours écoulés depuis l'époque. Supposons qu'on ait trouvé pour 1740 l'époque du Soleil ou sa longitude moyenne le premier janvier à midi moyen 9^s 10° 25′ 34″, et qu'on veuille avoir la longitude moyenne pour le 31 janvier à midi moyen, on ajoutera le mouvement diurne 59′ 8″ 33, pris 30 fois, ou 29° 34′ 10″, avec l'époque de la longitude moyenne, et l'on aura la longitude moyenne le 31 janvier; tel est le fondement de l'usage que nous ferons des moyens mouvemens, en expliquant nos tables.

On pourroit, avec les nombres de la table précédente et les regles du calcul des équations (1244), trouver en tout temps le lieu d'une planete sur son orbite vu du Soleil; mais pour abréger les calculs, on a construit des tables détaillées pour chaque planete, et j'en donne ici de nouvelles, aussi étendues, mais plus exactes, que celles de Cassini et de Halley qui étoient les meilleures avant moi.

Nœuds des planetes.

1332. On a vû dans le livre précédent ce que c'est que les nœuds des planetes (1122, 1136), aussi bien que les inclinaisons de leurs orbites, et l'effet qui en résulte par rapport à nous; il s'agit actuellement d'indiquer les méthodes astronomiques de trouver la situation de ces nœuds et la quantité de ces inclinaisons.

Lorsqu'une planete n'a aucune latitude vue de la Terre, elle n'en sauroit avoir vue du Soleil; elle est alors dans son nœud (1122), puisqu'elle

puisqu'elle est dans le plan de l'écliptique ; il suffit donc d'observer la longitude géocentrique de la planete, au temps où elle n'a point de latitude, et d'en conclure sa longitude vue du Soleil (1147) ; ce sera le lieu du nœud.

1333. EXEMPLE. Le 14 mai 1747, à 10^h 50′ 43″ de temps vrai, Mars étant fort près de son nœud descendant, la Caille observa la longitude de cette planete 7^s 6° 15′ 20″ réduite à l'écliptique, et sa latitude boréale de 25″ ½ (*Astron. fundamenta,* p. 244) : la longitude du Soleil pour le même instant, déduite des observations faites ce jour-là, et qu'on pouvoit se contenter de prendre dans les tables, étoit de 1^s 23° 38′ 10″ ; ainsi l'angle à la Terre, ou l'angle d'élongation LTS (FIG. 56), étoit de 162° 37′ 10″ : la parallaxe de l'orbe annuel, ou l'angle à la planete TLS étoit alors, suivant mes tables, de 11° 16′ 37″ (1147) ; ainsi ajoutant cette quantité à la longitude géocentrique observée, on a la longitude héliocentrique de Mars 7^s 17° 31′ 57″ réduite à l'écliptique. L'angle de commutation, qui est la différence entre cette longitude et celle de la Terre, ou l'angle LST, étoit de 6° 6′ 23″ ; en faisant la proportion de l'art. 1145, on trouvera que 25″ ½ de latitude géocentrique répondoient à 9″ de latitude héliocentrique. On résout ensuite le triangle PAL (TOME I, PL. V, FIG. 54), (ou N *p l* si c'est le nœud descendant), rectangle en L, dont l'angle A est de 1° 51′, égal à l'inclinaison de l'orbite de Mars AP sur l'écliptique AL (1357), et le petit côté PL de 9″ latitude héliocentrique de Mars : on a l'autre côté AL (3903) de 4′ 41″ ; on peut supposer le triangle rectiligne ; c'est la distance de Mars à son nœud, vue du Soleil : donc le nœud descendant de Mars vu du Soleil étoit alors à 7^s 17° 36′ 38″ ; il est peu différent de celui que donne la Caille (*Mém. acad.* 1747,) et ne differe de mes tables que de 1′ 53″.

1334. Il faut remarquer dans le calcul précédent qu'en observant plusieurs jours de suite la latitude de Mars, on en pourroit conclure le temps où il avoit été sans latitude, éviter la résolution du dernier triangle, et ne point supposer la connoissance de l'inclinaison.

1335. On peut aussi employer à la recherche du nœud, des observations faites lorsque la latitude héliocentrique d'une planete s'est trouvée de la même quantité, et par conséquent à égales distances des nœuds, car le milieu entre les longitudes héliocentriques trouvées dans les deux cas sera le lieu du nœud, en le supposant fixe dans l'intervalle des deux observations.

EXEMPLE. Le 13 mars 1693, à 17^h 50′, le vrai lieu de Saturne vu de la Terre étoit à 8^s 22° 56′ 30″, et sa latitude boréale 1° 24′ 50″ ;

le 3 mai 1699, à 15h 50′, sa longitude étoit de 11s 1° 0′ 50″, et sa latitude australe 1° 22′ 20″ (Cassini, p. 389). En réduisant au Soleil ces longitudes et ces latitudes observées (1145), on trouve pour la premiere 8s 17° 16′, et pour la seconde 10s 25° 22′. Les latitudes héliocentriques sont 1° 24′ 12″, et 1° 24′ 28″; la seconde est plus forte de 16″.

1336. Dans l'intervalle de ces deux observations qui est de plus de six années, le lieu du nœud avoit changé d'environ 3′ 35″ (1346); ce qui fait sur la latitude une différence de 8″, dont la latitude étoit plus petite qu'elle n'eût été si le nœud avoit resté immobile, et qu'il faut, pour une plus grande précision, ajouter à la seconde latitude héliocentrique, parcequ'elle eût été plus grande au même point du ciel, si le nœud de Saturne eût été moins avancé de 3′ 35″ dans la seconde observation; au moyen de cette seconde correction, la latitude se seroit trouvée de 1° 24′ 36″ pour le 3 mai 1699, plus grande de 24″ que la premiere latitude: ces 24″ font 10′, dont il faut diminuer la longitude héliocentrique de Saturne; ainsi elle se seroit trouvée, en 1699, de 10s 25° 12′ si Saturne avoit eu la même latitude 1° 24′ 12″ que dans la premiere observation: or la premiere longitude étoit de 8s 17° 16′; la différence est 2s 7° 56′, dont la moitié 33° 58′ est la distance de Saturne à son nœud en 1693, qui, ajoutée à sa longitude 8s 17° 16′, donne celle du nœud 9s 21° 14′ pour 1693, temps de la premiere observation: nous nous en servirons encore pour trouver l'inclinaison (1360).

Après avoir indiqué les méthodes qui servent à trouver le lieu du nœud, nous allons rapporter ce que l'on a de plus exact sur la position des nœuds de chaque planete, et sur le mouvement de ces nœuds; on verra, par la conformité des résultats trouvés dans l'un et l'autre nœud, soit ascendant, soit descendant, que ces nœuds sont en effet directement opposés et situés par conséquent sur une ligne droite qui passe par le centre du Soleil (1118).

1337. Le nœud de Mercure ne sauroit se déterminer par des observations meilleures que celles de ses passages sur le Soleil (2155), dans lesquels sa latitude est presque nulle; et nous en avons un assez grand nombre pour y parvenir avec quelque précision: je les ai discutés (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 259). Je trouve, pour 1753, 1s 15° 23′ ½, et, pour 1723, 1s 15° 1′ 0″; ce qui donne 1° 15′ 0″ pour le mouvement séculaire, ou 45″ par an. Le passage de 1631 laisse une incertitude de 20′, ceux de 1677 et 1690 different de 8′. Les passages de 1782 et de 1786, calculés avec le mouvement de 45″, m'ont donné 1′ 20″ à ôter du lieu du nœud: l'observation de

1677, calculée avec soin, m'a donné une minute et demie de plus pour le nœud; en sorte que je supposerai ce mouvement de 43″ par année. J'ai eu soin dans ces calculs de diminuer le diametre du Soleil de 6″ (2158), et d'employer l'aberration (2886).

Ce mouvement du nœud de Mercure est donc rétrograde par rapport aux étoiles fixes, d'environ 7″ par an ; cela s'accorde assez bien avec celui que m'a donné la théorie de l'attraction (*Mém. de l'acad.* 1758, 1761), par la méthode qui sera expliquée (3684), et dont on trouvera le résultat (1347). M. de la Grange trouve 41″3 (*Mém. de Berlin* 1782). Mais il auroit eu 43″ en diminuant d'un tiers la masse de Vénus, comme je crois qu'on doit le faire (2158, 3564).

1338. Ainsi le mouvement séculaire du nœud de Mercure, que M. Halley a fait de 1° 23′ 20″, et M. Cassini de 1° 24′ 40″, et M. le Gentil 1° 23′ 41″ (*Mém.* 1753), n'est certainement que de 1° 12′ 10″. M. de l'Isle a cru qu'on devoit le réduire à 37″ par an, après avoir calculé avec soin les observations faites par Tycho le 22 et le 23 janvier 1586, qui donnent le nœud à 1^s 13° 5′ 8″; mais les passages sur le Soleil sont plus sûrs.

1339. Le nœud de Vénus, suivant les calculs que j'ai faits avec soin du passage de cette planete, étoit, le 3 juin 1769, à 2^s 14° 36′ 20″ (2156); il n'y a pas une demi-minute d'erreur à craindre dans cette position; les tables de Halley donnoient 2′ 36″ de moins, et celles de Cassini 2′ 25″ de plus. M. Hornsby ayant calculé avec soin le lieu du nœud par l'observation d'Horoccius, faite le 4 décembre 1639 (2044), le trouve à 2^s 13° 27′ 50″; M. Cassini 2^s 13° 28′ 6″: le mouvement seroit donc en 129 ans $\frac{1}{2}$ de 68′ 30″, ou de 31″7 par année. Je trouve 31″6, ou 18″ $\frac{2}{3}$ par rapport aux étoiles : la position de 1639, comparée avec celle de 1761, 2^s 14° 32′ 15″ (2155), donne pour le mouvement annuel du nœud 31″ $\frac{1}{4}$.

1340. Cassini emploie aussi à cette recherche une ancienne observation ; c'est celle de Timocharès, faite le 11 oct. 271 avant J. C. dans laquelle Vénus éclipsa l'étoile η de l'aile australe de la Vierge : il trouve le lieu du nœud de Vénus par cette observation, de 1^s 24° 2′; le comparant avec une du 4 sept. 1698, qui donnoit 2^s 14° 1′ 45″, on a le mouvement de 36″ $\frac{1}{2}$ par année. L'observation de 1639, comparée avec celle de 1698, donne 34″. Les observations de 1705, de 1710 et de 1731, en différoient très peu, en sorte que Cassini s'en est tenu dans ses tables à un mouvement annuel de 34″; mais si l'on avoit égard au changement de latitude de l'étoile (2757), il pourroit en résulter quelque différence dans le lieu du nœud conclu pour le temps de Timocharès.

La Caille rapporte une observation qu'il fit du passage de Vénus par son nœud descendant, le 21 décembre 1746 : il compare cette observation avec celle de la Hire, qui détermina le passage de Vénus par son nœud le 31 oct. 1692 à 0h 12′ ¾, temps moyen, d'où il conclut le mouvement de 38″ (*Mém.* 1746). Mais ces observations sont moins décisives et moins éloignées entre elles que celles de 1639 et de 1769, et je m'en tiendrai à 31″ pour le mouvement annuel du nœud de Vénus. M. de la Grange trouve 30″ 55 par la théorie, et il auroit trouvé 33″4 en diminuant d'un tiers la masse de Vénus.

1341. **Le nœud de Mars** a été trouvé en 1778 1s 17° 52′ d'après les observations de M. Maskelyne calculées par M. de Lambre, et l'opposition de 1779 observée et calculée par M. Méchain. M. Bugge a trouvé le passage de Mars par son nœud le 7 décembre 1783 à 20h 24′, temps moyen, à Copenhague, dans 1s 17° 54′ 24″ (*Mém.* de Stockholm 1785, p. 289). M. de Lambre trouve la même chose ; ainsi on peut supposer l'époque du nœud pour 1784, 1s 17° 54′ 30″.

Les observations de Tycho donnent, pour le 28 oct. 1595, 1s 16° 24′ 33″. Le 13 novem. 1721 Cassini trouve qu'il étoit à 1s 17° 29′ 49″, ce qui donne pour le mouvement annuel du nœud de Mars 31″. (*Elém. d'astron. pag.* 490).

Par la comparaison de la même observation de Tycho avec celles qui furent faites en 1700 à Greenwich et à Paris, on trouve le mouvement de 3[illegible]″ ⅔ et de 38″ ⅔, suivant qu'on emploie les observations de Flamsteed, ou celles de M. Cassini. Par les observations de Paris qui donnent, pour 1700, 1s 17° 13′ ½, comparées avec celles de 1778, on ne trouve que 29″6.

1342. Si l'on compare les observations de 1721 avec la détermination de Ptolémée (*Almag. liv. XIII*), qui place le terme boréal de l'orbite de Mars à la fin du Cancer, ou le nœud ascendant à la fin du Belier, on trouve 40″. Cassini ayant préféré les observations de Tycho, comparées aux siennes et à celles de Flamsteed, s'en est tenu dans ses tables à faire le mouvement annuel du nœud de Mars 34″. Halley le fait de 38″. La Caille (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 146) trouve le nœud de Mars à 1s 17° 37′ 11″, pour le 14 mai. Dans les mémoires de 1754, il rapporte des observations faites à l'Isle de France, par lesquelles il trouva le nœud de Mars à 1s 17° 42′ 5″ le 4 novembre 1753 : ces déterminations, comparées avec le lieu trouvé pour 1784, donnent 27″. J'ai aussi observé Mars au mois de novembre 1768, dans le temps qu'il étoit près de son nœud, et j'en ai conclu l'époque de 1769, 1s 17° 44′ 23″, moins avancée de 24′

que dans les tables de Halley; ce qui prouve qu'il faisoit le mouvement trop fort. Les observations de Cassini en 1721, comparées avec les nôtres, donnent 23″; celles de Flamsteed en 1700, 22″. M. de la Grange trouve 24″.5; mais en diminuant la masse de Vénus d'un tiers, ce seroit 28″ 4.

M. de Lambre a calculé plusieurs observations de Flamsteed; une du 8 décembre 1689, qui donne 27″; une du 26 octobre 1681, 28″; celles des 3 et 10 mai 1700, 28″. Il y en a deux de 1713 qui donnent 34″; deux de 1715, qui donnent 25″: il s'en tient à 28″, ce qui est conforme aux observations de Tycho, Cassini, Flamsteed et la Caille. C'est le résultat que j'ai adopté dans mes tables (*Conn. des temps* 1789).

1343. Le nœud de Jupiter est difficile à déterminer, parceque l'inclinaison est fort petite; l'erreur sur la latitude en produit une quarante-quatre fois plus forte sur le nœud. Les oppositions observées en 1775, 76, 77, 82 et 83, indiquent sa longitude à 3ˢ 8° 14′, pour 1783, d'après les calculs de M. de Lambre.

Suivant Ptolémée, ce nœud étoit de son temps au commencement du Cancer; cela donne le mouvement annuel de 17″. Képler le supposoit, dans ses tables rudolphines, de 4″ seulement. Par la conjonction de Jupiter avec l'étoile du Cancer appellée l'Ane austral, arrivée le 3 septembre 240 ans avant notre ere, Cassini trouve 24″; M. le Gentil 10″ seulement. D'après l'observation du 26 septembre 508, rapportée par Boulliaud, dans laquelle Jupiter se trouve en conjonction avec Régulus, Cassini trouve 15″; mais Boulliaud, en supposant que la latitude boréale de Jupiter étoit plus grande d'un doigt, ou de 2′ 30″, trouve ce mouvement 24″ 6. Cassini s'en tient dans ses tables à 24″, tandis que Halley l'emploie de 50″, c'est-à-dire à la précession des équinoxes; en sorte que suivant Halley le mouvement réel du nœud seroit absolument nul; c'est la conséquence qu'il tiroit déja en 1717 des observations faites en 1633 et 1716: mais il est certain, par la théorie de l'attraction, qu'il doit y avoir un mouvement réel, et que le changement de longitude doit être moindre que 50″. M. le Gentil ayant calculé diverses observations de Gassendi et de Pound, trouve 66″ pour le mouvement annuel du nœud (*Mém. ac.* 1758); mais ce mouvement est beaucoup trop fort.

1344. Cassini donne, pour 1705, 3ˢ 7° 37′ 50″, par un milieu entre plusieurs observations faites à Paris depuis 1692 jusqu'en 1730; cela ne donneroit que 34″ pour le mouvement annuel. L'observation de Pound, calculée par M. de Lambre, donne le lieu du nœud 3ˢ 7° 30′ pour 1717; celle de Gassendi, 3ˢ 6° 42′ pour 1634, et toutes deux

s'accordent à donner 37″ pour le mouvement du nœud. M. de la Grange trouve 31″ par la théorie; mais il eût trouvé 37″ en diminuant la masse de Vénus d'un tiers. Je crois donc que cet élément, sur lequel on a tant varié, est actuellement assez bien établi.

Il est vrai que pour trouver 37″ par l'observation caldéenne, il faudroit supposer 12′ de latitude à Jupiter, et le changement de latitude des étoiles augmente encore cette différence: mais il est possible que l'étoile ait paru cachée à la vue simple, quoique Jupiter fût réellement de 12 minutes au nord; cette étoile peut avoir eu quelque mouvement; enfin le nœud de Jupiter peut avoir eu quelque inégalité. Je supposerai donc sans difficulté le mouvement du nœud de Jupiter, avec M. de Lambre, de 35″ 7 par an.

1345. LE NOEUD DE SATURNE étoit, au commencement de 1769, à 3ˢ 21° 40′ 47″, suivant les observations que j'ai faites avec soin de l'opposition de Saturne; c'est 15′ de plus que dans les tables de Halley.

Par l'opposition de 1755, où la latitude étoit le 18 juillet de 10′ 34″, je trouve 3ˢ 21° 34′. M. Bugge a trouvé le passage au nœud le 21 août 1784, 18ʰ 20′ temps moyen à Copenhague, dans 9ˢ 21° 50′. M. de Lambre, par les observations de M. Maskelyne, trouve pour le 12 juillet 9ˢ 21° 48′ 15″; ainsi on peut supposer le nœud, au commencement de 1784, 3ˢ 21° 48′.

1346. Le mouvement du nœud de Saturne me paroît de 31″ par an, mais on a beaucoup varié à ce sujet. Ce nœud étoit, vers l'an 136, au commencement du Cancer (*Ptolémée*, *liv.* 13). Cassini l'ayant trouvé en 1700, 3ˢ 21° 13′ 30″, en déduisoit le mouvement annuel de 48″ ½ (*Élémens d'astronomie; pag.* 397).

Les Caldéens observerent, le premier mars 228 ans avant J. C. que Saturne étoit deux doigts au-dessous de l'étoile γ de la Vierge: Cassini en déduit le lieu du nœud 2ˢ 21°; ce qui donne le mouvement pour chaque année 56″ 5. Il le suppose en effet de 57″ dans ses tables; mais la grande distance de Saturne à son nœud rend le résultat de cette ancienne observation peu concluant.

Boulliaud (*Astron. philol. p.* 253) rapporte une occultation de Saturne par la Lune, arrivée l'an 503, d'où il conclut que le nœud de Saturne étoit alors à 3ˢ 12° 36′ 21″, et que le mouvement est de 26″.

Tycho-Brahé observa Saturne fort près de son nœud le 29 décembre 1592. Cassini ayant calculé cette observation, trouve le nœud à 3ˢ 20° 21′, et comparant cette position à celle de la fin du dernier siecle, qui donne le nœud de Saturne pour 1700, à 3ˢ 21° 13′ 30″, il en déduit le mouvement de 29″ 5; mais ayant trouvé 1′ 5″ de

différence entre les déclinaisons conclues le 29 décembre 1592, de différentes observations, il en résulte 14″ d'incertitude sur le mouvement annuel. Il faut aussi observer que la position déterminée pour 1700 par Cassini est le milieu de cinq observations, dont une differe de l'autre d'un degré et neuf minutes sur la position du nœud; différence qui produiroit 39″ sur le mouvement annuel du nœud. Aussi la position du nœud de Saturne et son mouvement sont de tous les élémens des planetes ceux sur lesquels Halley differe le plus de Cassini. Il y a, dans les tables de Cassini, 41′ de plus pour le lieu du nœud en 1750, et 65′ 11″ de plus pour le mouvement séculaire, que dans celles de Halley. Pour moi, rejetant la premiere des cinq déterminations de Cassini, et réduisant les quatre autres à l'année 1700, je trouve l'époque du nœud 3ˢ 21° 11′ 20″ pour 1700; comparant cette position avec celle que j'ai observée en 1769, je trouve, pour le mouvement annuel du nœud, 25″ 6.

En comparant l'observation de 1593 avec la mienne, je trouve 27″ par année; les calculs de l'attraction donnent 29″, suivant M. de la Grange; 35″ en diminuant la masse de Vénus. M. de Lambre ayant calculé les conjonctions de Saturne aux étoiles ξ, ο et π du Sagittaire, observées par Flamsteed en 1695, trouve que le nœud au mois de juillet étoit à 3ˢ 21° 3′ 50″, ce qui donne le mouvement annuel 30″. Les observations du mois de juillet 1696 donnent 3ˢ 21° 2′ 55″, et le mouvement 31″; par celles du mois de juillet 1697, on a 3ˢ 21° 7′ 31″, et le mouvement 28″ 2. Le milieu entre les observations de 1710, 1711 et 1712, donne 28″7; la théorie donne 29″ 3, ou 32″, en diminuant la masse de Vénus; M. de Lambre suppose le mouvement de 33″ 35.

1347. Le nœud de Herschel est très bien déterminé par les observations faites depuis 1781, parceque cette planete est peu éloignée de son nœud; M. de la Place trouve, pour 1788, 2ˢ 12° 47′; le P. Fixlmillner 48′ ⅓, et moi 46′ 37″. Supposant que la 34ᵉ étoile du Taureau dans Flamsteed, observée en 1690, est cette planete, M. Wurm trouvoit le mouvement de 42′ par siecle, ou de 25″ par an (*Ephém. de Berlin* 1789); M. de la Grange, par la théorie, 12″ ½: mais en diminuant la masse de Vénus, ce sera 20″ ⅔. Je le supposerai de cette quantité.

1348. Pour rassembler sous un seul point de vue toutes les recherches précédentes sur les nœuds des planetes, j'ai mis dans les tables suivantes les longitudes des nœuds, et leur mouvement suivant les tables de Cassini et de Halley, et suivant les nôtres. Le signe — marque un mouvement rétrograde par rapport aux étoiles fixes;

la derniere colonne contient ce mouvement par rapport aux équinoxes, c'est-à-dire, la somme ou la différence entre 50″¼ et les nombres de la colonne précédente.

Table de la longitude du nœud de chaque planete pour 1750, et de son mouvement séculaire, suivant les tables de Cassini et de Halley, et suivant les nôtres.

	Suivant Cassini.		Suivant Halley.		Selon nos tables.
	Nœud en 1750.	Mouv. séculaire.	Nœud en 1750.	Mouv. séculaire.	Nœud en 1750.
Mercure.	1s 15° 25′ 20″	1° 24′ 40″	1s 15° 21′ 58″	1° 23′ 20″	1 15° 20′ 43″
Vénus.	2 14 27 45	0 56 40	2 14 23 42	0 51 40	2 14 26 18
Mars.	1 17 45 45	0 56 40	1 17 56 21	1 3 20	1 17 38 38
Jupiter.	3 7 49 57	0 40 9	3 8 15 49	1 23 20	3 7 55 32
Saturne.	3 22 1 4	1 35 11	3 21 20 5	0 30 0	3 21 32 22
Herschel.					3 12 33 31

Table du mouvement annuel des nœuds de chaque planete par rapport aux étoiles, suivant les tables de Cassini et de Halley; avec le mouvement par rapport aux équinoxes, suivant nos tables.

	Suivant les tables de Cassini.	Suivant les tables de Halley.	Suivant nos tables.	Mouvement par rapport aux équinoxes.
Mercure,	0″	0″	— 7″0	43″3
Vénus,	— 17	— 19	— 19,2	31,0
Mars,	— 17	— 12	— 22,2	28,0
Jupiter,	— 27	0	— 14,5	35,7
Saturne,	+ 6	— 32	— 16,9	33,3

1349. Le calcul du mouvement des nœuds que j'ai déduit du principe de l'attraction, se trouve détaillé dans les mémoires de l'académie pour 1758 et 1761. M. de la Grange l'a fait avec encore plus de détail dans les mémoires de Berlin pour 1782 : j'en donnerai une idée en parlant de l'attraction (3681). Le mouvement du nœud d'une

d'une planete est le résultat du mouvement que toutes les autres y produisent ; car il n'en est aucune, qui n'influe plus ou moins sur le nœud des autres planetes : mais comme la théorie fait trouver ce mouvement du nœud sur l'orbite de la planete qui le produit, il est nécessaire de réduire à l'écliptique tous ces mouvemens qui se font sur des orbites différentes, pour en composer un seul mouvement sur l'écliptique ; cette réduction rend direct le mouvement du nœud de Jupiter sur l'écliptique supposée fixe, car il est nécessairement rétrograde sur l'orbite de Saturne, qui en est la cause principale.

Soit CB (FIG. 75) l'écliptique, CA l'orbite de Jupiter, BA l'orbite de Saturne ; la longitude du nœud C de Jupiter en 1760 est de 3ˢ 8° 24′, suivant les tables de Halley ; la longitude du nœud B de Saturne est de 3ˢ 21° 29′ ; la différence CB est de 13° 5′. L'inclinaison C de l'orbite de Jupiter est de 1° 19′, et l'inclinaison B de l'orbite de Saturne est de 2° 30′. En résolvant le triangle ABC, on trouve AC de 26° 36′ 21″, et l'angle A ou l'inclinaison de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne 1° 15′ 8″. Par l'effet naturel de l'attraction de Saturne sur Jupiter, le point d'intersection A de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne doit rétrograder dans le sens contraire au mouvement de Jupiter, comme on le verra dans la théorie de l'attraction ; mais l'angle des deux orbites ne change point par le mouvement du nœud (3683) ; ainsi le nœud ira de A en *a*, et l'orbite de Jupiter AC passera dans la situation *ac* sans que l'angle A éprouve aucun changement, les cercles AC et *ac* resteront paralleles dans leurs parties voisines de A*a*, et leur intersection D sera éloignée du point A de 90°. Ainsi le triangle ABC se changera en un triangle *a*B*c*, les angles A et B étant constans, et le nœud C de l'orbite de Jupiter sur l'écliptique passera en *c* ; il aura donc un mouvement direct C*c*, quoique le mouvement A*a* ait été rétrograde : ainsi l'action des planetes les unes sur les autres produit dans les nœuds un mouvement *rétrograde* sur l'orbite de la planete troublante ou de la planete qui par son attraction produit ce mouvement. Cependant le mouvement des nœuds sur l'écliptique devient quelquefois direct ; et tel est le nœud de Jupiter quand on ne considere que l'action de Saturne.

1350. Le mouvement du nœud ascendant C de la planete troublée est direct (FIG. 75), lorsque le nœud est moins avancé que le nœud de la planete troublante, et que l'inclin. B de la planete troublante est la plus grande, pourvu cependant que tang. C soit plus petite que tang. B cos. BC ; mais les nœuds vont du même sens (FIG. 76), si la tang. de l'inclin. C est la plus grande. Si c'est le nœud desc. de la pla-

nete troublée qui est le plus voisin du nœud ascendant de la planete troublante, le mouvement C *c* sera rétrograde comme le mouvement A*a* qui est produit sur l'orbite de la planete troublante, pourvu que tang. B cos. BC, dans le premier cas, soit plus grand que tang. C, et dans le second cas plus petit (*M. Cagnoli*, *p.* 389).

1351. Quand on a trouvé, par le calcul de l'attraction (3684), le mouvement A*a* (FIG. 75 et 76) du nœud A sur l'orbite AB supposée fixe, il faut en conclure le mouvement C*c* sur l'écliptique. Dans un triangle ABC dont les deux angles A et B sont constans (1349), la différentielle C*c* ou la petite variation du côté BC est égale à la différentielle A*a* du côté AB, multipliée par $\frac{\text{sin. A cos. AC}}{\text{sin. C}}$ (4034). On peut aussi employer la formule (4035) $\frac{\text{sin. BC cos. AC}}{\text{sin. AB}}$; car il seroit plus court de chercher les deux côtés AB, AC, par l'analogie de Neper (3985) : on n'auroit pas besoin de l'angle A. On peut même se dispenser de calculer AC, en employant A*a* (cos. B + sin. B cot. C cos. BC) (4035). C'est ainsi qu'il faut réduire à l'écliptique le mouvement du nœud de chaque planete produit par l'attraction de chacune des autres planetes. Ensuite il faut encore avoir égard au déplacement de l'écliptique produit par les autres planetes ; c'est ce que M. de la Grange a fait fort en détail: en voici le résultat.

Mouvement annuel des nœuds vrais, suivant la théorie.

Par l'action de	MERCURE.	VÉNUS.	MARS.	JUPITER.	SATURNE.
Mercure,	— 0″ 10	+ 0″ 16	— 0″32	— 0″31	— 0″ 11
Vénus,	— 5, 57	— 7, 46	—11, 80	—17, 56	— 8, 06
La Terre,	— 0, 87	— 6, 69	— 1, 77	— 0, 01	— 0, 00
Mars,	— 0, 14	— 0, 29	— 0, 43	— 0, 39	— 0, 14
Jupiter,	— 2, 18	— 5, 13	—11, 00	— 6, 95	—12, 28
Saturne,	— 0, 12	— 0, 09	— 0, 47	+ 5, 88	— 0, 34
Total.	— 8, 98	—19, 70	—25, 79	—19, 34	—20, 93
Précess.	50, 25	50, 25	50, 25	50, 25	50, 25
Mouv.	41, 27	30, 55	24, 46	30, 91	29, 32

On peut diminuer d'un tiers tous les nombres de la seconde ligne (3565), et augmenter d'autant le dernier résultat, qui est le mouvement par rapport aux équinoxes.

1352. Quand on voit dans cette table que le nœud de Jupiter est changé de 6″ 95 par l'action de Jupiter, ce n'est pas que Jupiter se déplace lui-même; mais il déplace l'écliptique (2[illegible]8), et ce déplacement change d'autant le vrai lieu du nœud de Jupiter compté sur l'écliptique.

En effet, dans le même temps que l'orbite de Jupiter AC (FIG. 75) est transportée en *ac* par l'action des autres planetes, Jupiter déplace lui-même l'écliptique FB, et la fait rétrograder; elle va de *c* en *f* sur l'orbite de Jupiter *acf*, et il en résulte un mouvement *fg* rapporté sur l'écliptique F*f*, qui est un nouveau mouvement du nœud de Jupiter sur l'écliptique vraie. Ainsi le mouvement du nœud de chaque planete dépend de toutes les autres, même de celle dont on calcule le mouvement: tous ces effets peuvent se calculer par les mêmes formules; mais M. de la Grange en a donné de très générales dans les Mémoires de 1774, et dans ceux de Berlin pour 1782. Nous avons placé ici ces réflexions, parcequ'elles sont nécessaires aux astronomes, indépendamment du calcul de l'attraction. Elles avoient échappé à Bradley, lorsqu'il croyoit que le mouvement direct du nœud du quatrieme satellite de Jupiter étoit contraire aux loix de l'attraction (3015); ce sont ces considérations qui me firent découvrir la cause des changemens singuliers qui ont lieu dans les inclinaisons des satellites (2987).

1353. Le mouvement du nœud d'une planete sur l'orbite d'une autre produira un mouvement de l'axe de l'orbite troublée autour de l'axe de l'orbite de la planete troublante; par exemple, quand on dit que Saturne, par son action sur Jupiter, fait rétrograder les nœuds de l'orbite de Jupiter, cela revient au même que si l'on disoit: L'axe de l'orbite, ou la ligne qui passe par les poles de l'orbite de Jupiter, et qui est perpendiculaire au plan de cette orbite, tourne autour de l'axe de l'orbite de Saturne, et le pole de l'orbite de Jupiter décrit autour de l'orbite de Saturne un petit cercle dont le rayon est de 1° 15′, c'est-à-dire égal à l'inclinaison mutuelle de ces deux orbites.

Pour faire comprendre le rapport ou plutôt l'identité de ces deux choses, soit S (FIG. 77) le centre commun de deux orbites ANB, CND, dont les plans sont inclinés d'un degré l'un sur l'autre; PSO et ESL, les axes de ces mêmes orbites qui leur sont perpendiculaires; P le pole de l'orbite ANB; E le pole de l'orbite CND;

EP la distance de ces poles, égale à l'inclinaison des deux orbites, ou à la quantité dont le point B est éloigné du point D. Si l'on tire par les deux poles P et E un cercle PEBD, il rencontrera les deux orbites à 90° des nœuds N, M, de chacune; l'arc BD égal à l'arc PE marquera la plus grande distance ou l'inclinaison des deux orbites, parceque les arcs PB et ED sont chacun de 90°, aussi bien que les arcs NB, MB, ND, MD. Mais si le nœud N change de position, les points B et D de la plus grande distance changeront de la même quantité, parcequ'ils sont toujours nécessairement à 90° des nœuds N et M; donc le cercle PEBD changera également, et le pole E avancera de la même quantité dans le petit cercle ER. On peut le voir d'une maniere plus sensible en faisant un demi-cercle de carton qui ait à son centre une aiguille perpendiculaire à son plan; on l'inclinera sur un autre cercle tracé sur la table, qui ait aussi une aiguille à son centre; et en faisant tourner le premier sur le second sans changer leur inclinaison et sans que leurs centres se quittent, on verra l'axe du premier décrire un cône autour de l'axe du second, ou le pole du premier décrire un cercle autour du pole du second. *Ainsi le mouvement du nœud d'un cercle sur un autre cercle suppose le mouvement circulaire du pole de l'un autour du pole de l'autre.* Nous ferons plusieurs fois usage de cette considération (2727, 2753, 2896).

1354. Le mouvement du nœud d'une planete sur l'écliptique se réduit donc au mouvement du pole de l'orbite de cette planete autour du pole de l'écliptique; mais ce mouvement ne sera pas uniforme, parcequ'il est l'assemblage des mouvemens particuliers que chacune des autres planetes produit sur le nœud de celle-ci, lesquels mouvemens ont chacun des modifications différentes parcequ'ils dépendent de la situation des nœuds, et de la quantité des inclinaisons. Aussi les mouvemens des nœuds des planetes déduits de l'attraction (1351) ne sont exacts que pour un petit nombre de siecles: mais M. de la Grange a donné des formules générales pour un intervalle quelconque (*Mém. de Berlin* 1782.).

Des inclinaisons des planetes.

1355. L'INCLINAISON d'une planete est l'angle que le plan de son orbite fait avec le plan de l'écliptique (1123); la latitude héliocentrique (1137) de cette planete, lorsqu'elle est à 90° de ses nœuds, est égale à cette inclinaison, parceque la planete est alors aussi éloignée qu'elle puisse être du plan de l'écliptique.

1356. Ainsi pour trouver l'inclinaison d'une orbite, il suffit d'observer la latitude de la planete lorsqu'elle est à 90° des nœuds, et de réduire cette latitude observée, ou géocentrique, à la latitude héliocentrique; mais comme cette derniere réduction suppose connue la parallaxe du grand orbe, on cherche à éviter cette condition par la méthode suivante.

1357. On choisit le temps où le Soleil est dans le nœud de la planete, c'est-à-dire nous paroît à la même longitude, que la planete quand elle est dans son nœud, parcequ'alors la Terre passe en T sur la ligne des nœuds NST (FIG. 78), ce qui rend la détermination de l'inclinaison plus simple. Supposons que la planete se trouve pour lors au point A de son orbite, de maniere qu'ayant abaissé la perpendiculaire AB sur le plan de l'écliptique, ou de l'orbite de la Terre, prolongé jusques vers la planete, la ligne TB qui marque son lieu réduit à l'écliptique soit perpendiculaire à la ligne TSN dans laquelle se trouvent le nœud et le Soleil, l'angle d'élongation BTS étant de 90° : alors les lignes AT et BT sont perpendiculaires à la commune section TN; car le triangle ABT étant dans un plan perpendiculaire à l'écliptique et à la ligne ST, toutes les lignes tirées dans ce plan au point T sont aussi perpendiculaires à ST, l'une dans le plan de l'orbite, et l'autre dans le plan de l'écliptique; elles font donc entre elles le même angle que les deux plans, c'est-à-dire un angle égal à l'inclinaison que l'on cherche (1121) : or l'angle ATB n'est autre chose que la latitude même de la planete vue de la Terre (1123); donc *la latitude observée sera elle-même l'inclinaison de l'orbite*. Au reste il est rare de rencontrer ces deux circonstances ensemble, c'est à-dire le Soleil dans le nœud, et la planete à 90° du Soleil; d'ailleurs cette derniere condition ne se rencontre que dans les planetes supérieures; ainsi nous avons besoin d'une regle plus générale pour la détermination des inclinaisons: voici la méthode de Képler (*De stella Martis, p.* 78).

1358. Je suppose qu'on ait observé la latitude d'une planete, vue de la Terre, quelle qu'elle soit, pourvu que le Soleil soit dans le nœud de la planete ou à-peu-près; soit P la planete en un point quelconque de son orbite, la Terre étant toujours en T dans la ligne des nœuds TSN, l'arc NL étant supposé l'écliptique, et PL la latitude, on a R : sin. NL :: tang. N : tang. PL (3882); donc le sinus de l'élongation est au rayon *comme la tangente de la latitude géocentrique observée est à la tangente de l'*INCLINAISON.

1359. EXEMPLE. Le 12 janvier 1747 à $6^h\,6'\,33''$ du matin, la Caille observa la longitude de Saturne, $6^s\,26°\,12'\,52''$, et sa latitude boréale

2° 29′ 18″; le Soleil étoit alors à 9ˢ 21° 47′, c'est-à-dire dans le nœud de Saturne; ou du moins il n'en étoit éloigné que de 12′, ce qui ne peut produire aucune erreur sensible dans le résultat. En appliquant à cette observation l'analogie précédente, on trouve l'inclinaison de l'orbite de Saturne 2° 29′ 45″ (*Mém. acad.* 1747). Si la Terre étoit plus éloignée de la ligne des nœuds, on réduiroit facilement par les tables le lieu de la planete au temps où la Terre se trouve précisément dans le nœud.

1360. Lorsqu'on détermine le lieu du nœud d'une planete par le moyen de deux latitudes égales (1335), soit que ces latitudes soient prises avant et après le passage de la planete par ses limites, ou qu'elles soient prises avant et après le passage par le nœud, les mêmes observations peuvent déterminer à la fois le nœud et l'inclinaison.

Exemple. Le 13 mars 1693 la longitude héliocentrique de Saturne étoit 8ˢ 17° 16′, en corrigeant les tables par les observations, et la latitude géocentrique 1° 24′ 50″ (1335). Le lieu du Soleil étoit 11ˢ 24° 23′ 18″, et par conséquent l'élongation 91° 27′, et la commutation 9ˢ 7° 7′. En suivant la proportion démontrée (1145), on trouve que la latitude héliocentrique de Saturne étoit de 1° 24′ 12″. Cette observation comparée avec celle du 3 mai 1699 donne 9ˢ 21° 14′ pour le lieu du nœud descendant le 13 mars 1693 (1336); on en retranche celui de Saturne vu du Soleil 8ˢ 17° 16′; on a la distance de Saturne à son nœud descendant 33° 58′, vue du Soleil; c'est l'arc N *l*, égal à l'arc LA de l'écliptique (fig. 54): ainsi dans le triangle sphérique PAL rectangle en L, on connoît les côtés LA et PL. On fera cette proportion: le sinus de la distance au nœud est au sinus total, comme la tangente de la latitude est à la tangente de l'angle A. L'on aura l'inclinaison de l'orbite 2° 30′ 38″.

1361. Cette méthode qui détermine à la fois l'inclinaison et le nœud d'une planete par deux observations de latitudes égales, est moins exacte que celle où l'on détermine les deux choses séparément, en employant une observation faite dans le nœud pour déterminer le nœud, et une observation faite dans une des limites pour avoir l'inclinaison de l'orbite. En effet si les deux observations correspondantes sont près du nœud, elles déterminent mal l'inclinaison de l'orbite, puisqu'alors la latitude est petite et qu'on ne doit pas déterminer une quantité par le moyen de celle qui est beaucoup moindre; au contraire si ces deux observations sont trop près des limites, elles sont peu propres à déterminer le lieu du nœud. Par exemple, à 30° du nœud la latitude d'une planete n'est

que la moitié de son inclinaison; si l'on se trompe de 10″ dans la latitude observée, on sera en erreur de 20″ sur l'inclinaison cherchée; ainsi cette observation sera moins favorable de moitié que si l'on avoit observé la planete dans ses limites. D'un autre côté, le changement de latitude d'un jour à l'autre n'étant alors que les $\frac{87}{100}$ de celui qu'elle éprouve dans les nœuds, on aura un huitieme moins d'exactitude pour le lieu du nœud que si l'on eût observé la planete dans son nœud. Si l'on prend les deux latitudes correspondantes et égales à 45° des nœuds, la latitude n'étant alors que les $\frac{7}{10}$ de l'inclinaison, une erreur de 7″ sur l'observation des latitudes que l'on compare, en produira 10 sur l'inclinaison que l'on veut en conclure; en même temps l'erreur que l'on commettra sur le lieu du nœud sera plus grande dans le rapport de 10 à 7, que celle qu'on auroit pu commettre en observant la planete dans le nœud, comme on pourra le conclure de l'article suivant.

1362. Pour bien sentir la loi de ces différens avantages, il faut considérer que la latitude augmente comme le sinus de la distance au nœud; mais le changement d'un sinus est comme le cosinus (3446) : ainsi la petite augmentation qu'éprouve la latitude d'un degré à l'autre sera aussi proportionnelle au cosinus de l'argument de latitude; et comme l'on observe la position du nœud par le moyen de la latitude avec d'autant plus de précision que la latitude augmente alors plus rapidement, l'avantage ou la précision que l'on trouve à déterminer le lieu du nœud par le moyen de la latitude, est aussi proportionnel au cosinus de l'argument de latitude; ainsi à 60° du nœud l'avantage est réduit à la moitié, tandis qu'à 30° il n'y avoit de perdu que les $\frac{13}{100}$ ou le demi-quart de l'avantage qu'on avoit eu dans le nœud.

1363. A l'égard de l'avantage qu'on trouve à déterminer l'inclinaison par le moyen d'une latitude observée, il est proportionnel au sinus même de la distance aux nœuds parceque la latitude observée suit le même rapport.

1364. J'ai dit que plus la latitude augmentoit rapidement, plus il y avoit de précision et d'avantage à déterminer le lieu du nœud par son moyen; l'on peut s'en assurer par le même raisonnement qui a servi à prouver que l'équinoxe se déterminoit avec plus d'exactitude quand la déclinaison du Soleil augmentoit avec vîtesse d'un jour à l'autre (883).

1365. Dans le choix des oppositions ou des conjonctions, on

prend, pour déterminer l'inclinaison d'une planete, celles où la latitude géocentrique est la plus grande, afin que l'erreur commise sur cette inclinaison devienne la plus petite. L'inclinaison de l'orbite de Vénus, quoiqu'elle ne soit que de 3° 23′, produit dans certains cas pour nous une latitude géocentrique de 8° ⅔, comme cela arriva dans la conjonction inférieure de Vénus observée le 2 sept. 1700; si l'on a 9″ d'erreur à craindre dans une latitude observée d'environ 9°, il vaut mieux que ce soit dans cette circonstance, où il n'en résulte que 3″ d'erreur sur l'inclinaison de 3°. Il faut convenir cependant que si l'on s'étoit trompé de 9″ dans cette observation d'une latitude de 9°, quoiqu'il n'en résultât que 3″ sur l'inclinaison, il n'en seroit pas moins vrai qu'en se servant de cette inclinaison pour calculer la latitude géocentrique, on auroit encore 9″ d'erreur à craindre une autre fois sur la latitude dans une pareille situation.

1366. L'inclinaison de Mercure a été déterminée par Cassini de 7° 0′ 0″; Halley l'a faite de 6° 59′ 20″. M. Gentil, par une observation du 5 octobre 1750, trouve 7° 1′, et par une du 6 mai 1751, 6° 59′ 30″ (*Mém.* 1753).

1367. Je suppose cette inclinaison en nombres ronds de 7° 0′ 0″, et toutes les observations faites depuis quelques années sur la latitude de Mercure s'accordent assez bien avec mes tables pour qu'il n'y ait rien à changer (*Mém.* 1786, pag. 299).

Dix observations faites par M. d'Agelet avec son grand mural, et calculées par M. de Lambre, pour les temps où les latitudes de Mercure ont paru les plus fortes, ne donnent pas plus de 5″ d'erreur; on ne peut rien espérer de plus satisfaisant.

1368. L'inclinaison de Vénus sur l'écliptique est facile à déterminer exactement, lorsqu'on observe ses conjonctions inférieures dans le temps de ses plus grandes latitudes, c'est-à-dire, quand elle est presque à 90° de ses nœuds; car alors on n'a aucun besoin de connoître la position exacte du nœud; et sa distance à la Terre étant trois fois plus petite que sa distance au Soleil, les erreurs qu'on peut commettre sur sa latitude deviennent trois fois moindres sur l'inclinaison (1365). Le 2 septembre 1700 la latitude de Vénus fut observée à Paris de 8° 40′ 15″ australe, et l'inclinaison de son orbite 3° 23′ 5″. Le 28 août 1716, la latitude de Vénus fut observée de 8° 35′ 24″, Vénus étant alors à 82° 8′ de son nœud; d'où il résulte que l'inclinaison de son orbite étoit 3° 23′ 10″ (*Elém. d'astron. pag.* 574); la Hire la supposoit de 3° 23′ 5″.

1369. Cassini et Halley sont d'accord à supposer cette inclinaison de

de 3° 23′ 20″, dans leurs tables; cependant les conjonctions de 1766, 1774, 1780 et 1782, me paroissent indiquer une augmentation d'environ 15″. Le 5 août 1780 à 0ʰ 26′ temps moyen, la latitude géocentrique de Vénus étoit de 7° 1′ 0″ A; le 15 mars 1782, à 0ʰ 28′, elle étoit de 8° 31′ 43″ B, ce qui donne pour l'inclinaison 3° 23′ 35″ (*Mém.* 1785).

1370. L'inclinaison de Mars a été déterminée par une observation de Flamsteed du 3 mars 1694, calculée par Cassini (*Elém. d'astron. pag.* 492); Mars étant à 89° de son nœud, et sa latitude observée 3° 30′ 0″, l'inclinaison fut trouvée 1° 50′ 52″. M. le Gentil dans les *mémoires de* 1757 a calculé un grand nombre d'observations pour déterminer cette inclinaison, et il trouve par un milieu 1° 51′ 4″. Halley la suppose dans ses tables de 1° 51′ 0″, et M. Cassini 1° 50′ 54″.

1371. Cet élément est un de ceux qui sont le mieux établis. Il a été confirmé d'abord par l'opposition du 23 février 1775. Depuis ce temps-là M. Méchain ayant observé la conjonction de Mars avec χ du Lion le 18 oct. 1778, a trouvé l'inclinaison 1° 51′ 8″. Par la conjonction avec λ ≈ le 9 et le 10 oct. 1779 il trouve 1° 50′ 55″: le milieu 1° 51′ 1″ ne differe pas de la quantité que nous avons adoptée, 1° 51′ 0″. Nous parlerons bientôt de la diminution qu'elle éprouve (1377).

1372. L'inclinaison de Jupiter, suivant l'observation faite le 21 déc. 1690, par Flamsteed, à 86° du nœud, calculée par Cassini (*pag.* 444), est de 1° 19′ 23″. Après avoir calculé plusieurs autres observations, il se détermine pour 1° 19′ 38″.

M. le Gentil trouve 1° 18′ 28″ et 1° 19′ 2″ (*Mém.* 1758).

J'ai observé avec soin l'opposition de Jupiter le 6 avril 1768, dans sa plus grande latitude, et j'en ai conclu l'inclinaison 1° 19′ 4″, plus petite seulement de 6″ que dans les tables de Halley (*Mém.* 1768). Mais dans l'opposition de 1785 je n'ai trouvé que 1° 18′ 44″, le milieu est 1° 18′ 54″.

Elle est dans les tables de la Hire 1° 19′ 20″; dans celles de Cassini, 1° 19′ 30″; et dans celles de Halley, 1° 19′ 10″. Je l'avois employée de même dans mes tables: mais les observations de 1785 me l'ont fait diminuer, et je la réduisois à 1° 18′ 50″. M. de Lambre la trouve de 1° 19′ 2″ pour 1750.

1373. L'inclinaison de Saturne est déterminée dans M. Cassini (*pag.* 394) par une observation du 20 avril 1688, qui donne 2° 30′ 50″ et par trois autres qui donnent un peu moins.

La Caille, en 1747 (1359), la trouva de 2° 29′ 45″.

Le milieu entre ces cinq déterminations est de 2° 30′ 24″.

Halley la suppose de 2° 30′ 10″ ; je l'avois supposée de 2° 30′ 20″ dans mes premieres tables : mais les observations de 1775, 76, 77, par M. Maskelyne, m'ont fait trouver environ 20″ de moins (*Mém.* 1787). M. de Lambre trouve 2° 29′ 55″ pour 1750, et c'est ainsi qu'il l'a employée dans ses tables.

1374. L'INCLINAISON DE HERSCHEL est fort bien déterminée par l'observation faite en 1756, puisqu'elle est à 85° du nœud : aussi differe-t-on très peu à cet égard. M. de la Place la fait de 46′ 13″; M. Oriani 46′ 25″; le pere Fixlmillner 46′ 20″; M. Wurm 46′ 20″ ou 22″ (*Eph. de Berlin* 1789, pag. 173). Je trouve 46′ 19″ ½, par les observations de M. Maskelyne. Suivant les calculs de M. de la Grange, elle doit diminuer de 4″ par siecle, par l'attraction de Saturne, et de 1″ par celle de Jupiter.

1375. Pour rassembler sous un même point de vue les résultats précédents, et faire juger de la différence ou de l'incertitude qu'il peut y avoir dans les inclinaisons des orbites planétaires, nous allons rapporter celles qui sont établies dans les tables de Képler, Cassini et Halley, et celles que nous avons adoptées dans nos tables; on verra que la plus grande différence est pour l'inclinaison de Mercure, et cependant elle n'est que de 40″ entre Cassini et Halley. Nous avons mis dans la même table la plus grande réduction, égale à la moitié du sinus verse de l'inclinaison (3988); du moins l'erreur est insensible, si ce n'est pour Mercure.

Table de l'inclinaison des orbites, et de la plus grande réduction à l'écliptique.

	KÉPLER.	HALLEY.		CASSINI.		Suivant nos tables, pour 1780.
	Inclinaison.	Inclinaison.	Réduct.	Inclinaison.	Réduct.	Inclinaison.
Mercure,	6° 54′ 0″	6° 59′ 20″	12′ 49″	7° 00′ 00″	12′ 52″	7 0 0
Vénus,	3 22 0	3. 23 20	3 0	3 23 20	3 0	3 23 35
Mars,	1 50 30	1 51 0	0 54	1 50 54	0 54	1 51 0
Jupiter,	1 19 20	1 19 10	0 27	1 19 30	0 29	1 18 56
Saturne,	2 32 0	2 30 10	1 38	2 30 36	1 39	2 29 50
Herschel,	. . . .	. . . .	. . .	. . . . .	. . .	0 46 20

1376. Les inclinaisons des orbites n'ont pas de variations périodiques: l'action de Jupiter sur Saturne produit à peine des différences de 5″ dans le cours d'une révolution, suivant M. Euler (*Prix de* 1748, pag. 77). J'ai trouvé qu'il en est de même pour les autres planetes. Mais, d'un siecle à l'autre, il y a des variations que je vais expliquer.

1377. Les calculs de l'attraction, par lesquels j'ai recherché les mouvemens des nœuds des planetes produits par leurs attractions réciproques, me firent appercevoir le 30 mars 1761 une chose qu'on n'avoit pas encore soupçonnée; c'est que leurs inclinaisons sur l'écliptique ne sauroient être constantes: j'ai trouvé, par exemple, que l'action de Jupiter diminue de 3″ l'inclinaison de Mercure, de 4″ celle de Vénus, de 25″ celle de Mars, et augmente de 9″ celle de Saturne, en supposant l'écliptique immobile (*Mém. de l'ac.* 1783). On verra bientôt ce qui arrive en tenant compte du changement de l'écliptique.

1378. L'attraction de chaque planete fait rétrograder sur son orbite les nœuds de toutes les autres (1349, 3684); l'effet de ce mouvement est de déplacer toutes les orbites, et il ne peut manquer d'en résulter un changement dans leurs inclinaisons sur l'écliptique. Le triangle ABC (FIG. 75) se change en un triangle *a*B*c* (1349): les angles A et B demeurent constans; mais l'angle C ne l'est pas, et l'angle *c* est plus ou moins grand que l'angle C. Suivant les formules différentielles (4041), la variation de l'angle C est égale à celle du côté AB multipliée par le sinus de l'angle B, et par le sinus du côté BC, c'est-à-dire que $dC = d$AB. sin. B. sin. BC: par exemple, le mouvement du nœud de Mars par l'action de Jupiter étant de 14″ 2 par année sur l'orbite de Jupiter (*Mém.* 1758, *pag.* 261; 1761, *pag.* 404), l'angle B inclinaison de Jupiter 1° 19′ 10″, et la distance BC de leurs nœuds 50° 22′, on trouvera, pour le changement de l'angle C, 0″ 2528, ou 25″ 3 par siecle; il se réduit à 13″, en tenant compte du changement de l'écliptique, suivant M. de la Grange.

1379. L'action de Vénus produit au contraire une augmentation de 18″ dans l'inclinaison de l'orbite de Mars; en sorte que cet angle augmente de 3″. L'inclinaison de Jupiter diminue de 27″ par siecle suivant M. de la Grange: ainsi, depuis le temps de Tycho-Brahé, il doit y avoir près d'une minute de diminution dans l'inclinaison de l'orbite de Jupiter. Si les observations anciennes étoient assez exactes, on verroit cette différence dans la table que j'ai donnée ci-devant des inclinaisons des planetes (1375); mais une minute de

différence est peu sensible dans les observations de Tycho. Cet effet, qui se continue long-temps, apportera dans quelques siecles une grande différence dans les inclinaisons des orbites, et il y a déja plus de 8 minutes depuis le temps de Ptolémée, quantité qu'on ne doit pas négliger dans la comparaison des différentes observations, mais que les calculs de l'attraction pouvoient seuls indiquer, du moins quant à présent.

1380. Pour savoir si l'inclinaison d'une planete doit augmenter ou diminuer, c'est la situation des nœuds qu'il faut considérer. Soit AB (FIG. 75) l'orbite de la planete troublante, et AC l'orbite de la planete troublée, dont le nœud passe de A en *a;* puisque l'inclinaison mutuelle des deux orbites n'est point changée, l'angle A et l'angle *a* sont égaux, et vers ce point-là les cercles AC, *ac*, sont paralleles: de là il suit qu'ils vont se rencontrer en un point D, éloigné de 90° du point A; car deux grands cercles de la sphere, pris à 90° de leur intersection commune, deviennent sensiblement paralleles, du moins sur un petit espace: or dans le triangle DC*c* on voit que l'angle D*c*C est plus petit que l'angle DCE, c'est-à-dire que dans ce cas-là l'inclinaison diminue, d'où il est aisé de déduire la regle suivante.

1381. *Lorsque le nœud de la planete troublante est plus avancé que celui de la planete troublée, l'inclinaison de celle-ci est diminuée par la rétrogradation du nœud, pourvu que l'excès ne soit pas de* 180°. Cette regle se voit en figurant les positions de différentes orbites les unes par rapport aux autres: mais elle suppose l'écliptique immobile. Voici une table du changement séculaire en tenant compte du déplacement de l'écliptique (M. de la Grange, *Mém. de Berlin* 1782).

Changemens des inclinaisons vraies en un siecle.

Par l'action de	MERCURE.	VÉNUS.	MARS.	JUPITER.	SATURNE.
☿	. . . .	+ 1″94	— 0″05	— 0″95	— 1″10
♀	+ 9″46	. . . .	+17,95	—17,67	—26,65
♂	+ 0,06	— 0,42	. . . .	— 1,06	— 1,25
♃	+ 9,87	+ 2,60	—13,20	. . . .	+ 5,89
♄	+ 1,04	+ 0,35	— 1,25	— 7,51	. . . .
Total.	+20,43	+ 4,47	+ 3,45	—27,19	—23,11

Suivant moi, il faudroit diminuer d'un tiers l'effet de Vénus, contenu dans la seconde ligne de cette table (1277, 3565), et par conséquent changer d'autant le résultat total qui est au bas de la table.

1382. Après avoir rapporté les élémens de chaque planete, suivant Cassini et Halley, et d'après de nouvelles déterminations, il ne sera pas inutile de mettre tout à la fois sous les yeux du lecteur la comparaison et la différence de ces trois différens recueils de tables, pour faire juger de l'incertitude qu'il peut y avoir dans les divers élémens des tables astronomiques. Si je veux savoir, par exemple, de combien l'équation de Mercure est différente dans les tables de Halley et dans les nôtres, je trouve que dans la colonne de Mercure, et à côté du mot *Équation*, il y a — 2' 36"; cela signifie qu'il faut ôter 2' 36" de la plus grande équation prise dans les tables de Halley, pour avoir celle de nos tables. C'est ainsi que les huit lignes de la table suivante renferment la comparaison des tables de Halley avec les nôtres; et l'on y trouve ce qu'il faut appliquer aux élémens pris dans les tables de Halley pour avoir ceux auxquels nous nous sommes arrêtés dans les articles précédens.

Table de ce qu'il faut ôter des nombres contenus dans les tables de Halley, ou y ajouter, pour avoir ceux de nos nouvelles tables pour 1750.

Elémens des tables.	Mercure.	Vénus.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Longitude moyenne, 1750.	+ 3' 34"	+ 1' 25"	+ 3' 17"	— 22' 48"	+ 53' 58"
Long. de l'aphélie 1750.	+ 6 46	+ 28 11	— 3 14	— 12 42	— 90 51
Long. du nœud 1750.	— 1 15	— 2 36	— 17 43	— 21 27	+ 10 17
Mouv. sécul. de la planete.	+ 2 7	+ 0 33	— 0 10	— 10 38	+ 25 36
Mouv. sécul. de l'aphélie.	+ 10 25	— 13 13	— 5 0	— 25 27	— 23 13
Mouv. sécul. du nœud.	— 11 10	0 0	— 16 40	— 23 50	+ 22 35
Equation en 1750.	— 2 36	— 0 40	+ 0 38	— 0 58	— 5 22
Inclinaison de l'orbite.	+ 0 40	+ 0 15	0 0	— 0 8	— 0 15

Des diametres apparens des planetes.

1383. LE DIAMETRE apparent d'une planete est l'angle sous lequel il nous paroît, exprimé en minutes et en secondes; c'est l'angle dont le diametre de la planete est la corde ou la sous-tendante, en

prenant pour rayon la distance de la planete à la Terre. Soit T la Terre (FIG. 79), où est situé l'observateur, AB le diametre d'une planete, TA et TB les rayons visuels menés de la Terre aux deux bords, ou aux deux limbes opposés du disque de la planete; l'angle ATB est le diametre apparent de la planete.

Les diametres des planetes se déterminent et s'observent avec des micrometres (2519); mais on y peut aussi employer le temps ou la durée de leur passage. En effet, si l'on observe dans une lunette le moment où le premier bord du Soleil se trouve dans le méridien, ou sur un fil perpendiculaire à la direction de son mouvement, et qu'ensuite le second bord y arrive deux minutes plus tard; ces deux minutes de temps indiqueront que le diametre du Soleil est de 30', en supposant qu'il soit dans l'équateur; si le Soleil n'est pas dans l'équateur, il faut diminuer ce diametre (1008, 3877).

1384. *Les diametres apparens d'une planete sont en raison inverse de sa distance.* Si la planete AB étoit située en CD, de maniere que la distance TD fût la moitié de la premiere distance TB, l'angle CTD sous lequel elle paroîtroit, seroit double de l'angle ATB ou ETD sous lequel elle paroissoit auparavant. Prenons AB ou CD pour rayon; alors, suivant les regles de la trigonométrie ordinaire, TB sera la cotangente de l'angle ATB, et TD sera la cotangente de l'angle CTD: or les cotangentes sont en raison inverse des tangentes; donc TB : TD :: tang. CTD : tang. ATB ou ETD. Mais les petits angles sont proportionnels à leurs tangentes; donc CTD : ETD :: TB : TD; c'est-à-dire que le diametre apparent dans le second cas est au diametre apparent dans le premier, comme la premiere distance est à la seconde.

1385. Les diametres apparens des planetes servent à trouver leurs véritables diametres ou leurs grandeurs réelles, quand on connoît leurs distances: dans le triangle TAB qui est rectangle en B, on a cette proportion : R : sin. ATB :: TA : AB; ainsi l'on trouvera le véritable diametre AB en multipliant la distance TA par le sinus de l'angle ATB, qui est le diametre apparent de la planete.

On a vu ci-dessus (1215) la maniere de trouver les distances des planetes; on verra encore (1634) la maniere de les évaluer en lieues par le moyen de la parallaxe: nous n'avons à parler ici que des diametres apparens des différentes planetes, tels qu'on les a trouvés par les observations les plus récentes et les plus exactes.

1386. Avant la découverte des lunettes d'approche, trouvées en

1609, on avoit une idée fort défectueuse des diametres apparens des planetes : la lumiere dont elles sont environnées faisoit juger leurs diametres apparens beaucoup plus grands qu'ils ne sont, et sur-tout ceux des étoiles fixes. Il n'y a que le diametre du Soleil sur lequel on ne s'étoit pas trompé de beaucoup : Aristarque et Archimede supposoient déja le diametre apparent du Soleil de 30′ en tout temps. Du temps de Ptolémée, on n'avoit encore remarqué aucune différence entre l'hiver et l'été ; cet auteur faisoit le diametre du Soleil et celui de la Lune apogée de 31′ 20″ (*Almag. V*, 14). On peut voir dans Riccioli (*Almag. nov. tom. I*, *pag.* 119. et *Ast. ref. pag.* 38) une table des résultats de différens auteurs sur cette matiere. Il nous suffit de dire que Copernic supposoit les diametres du Soleil de 31′ 48″, et 33′ 54″. Tycho avoit trouvé un peu moins de 30′ dans l'apogée, 32′ et quelques secondes dans le périgée (*Progymn. pag.* 471). Képler regardoit comme une chose certaine que ces diametres étoient de 30′ et 31′ (*Astron. pars optica*, 1604, *pag.* 343; *Epit. Astr. Cop. pag.* 476 et 827). Il y avoit 1′ d'erreur malgré la découverte des lunettes d'approche qui devoient donner une grande facilité pour avoir exactement ces mesures. Hévélius, dans une dissertation *de Saturni facie*, imprimée en 1656, supposoit le diametre de 31′ 12″ dans l'apogée, et de 32′ 36″ dans le périgée. Voici le demi-diametre du Soleil pour le 3 mai 1661 suivant les auteurs les plus estimés de ce temps-là (*Hévélius, Merc. in Sole visus, pag.* 74).

Reinhold,	16′	2″
Longomont.	15	13
Képler,	15	2
Boulliaud,	16	15
Lansberge,	15	49
Hévélius,	15	44
Suivant nous,	15	52

Le pere Scheiner en 1625 et quelques autres astronomes crurent avoir le diametre avec beaucoup d'exactitude en recevant l'image du Soleil par un trou imperceptible, et la mesurant à une très grande distance ; mais ils trouverent le diametre du Soleil beaucoup trop grand ; quelquefois même il parut de 55 à 56′ (*Astr. ref. pag.* 39) : c'étoit un effet de la *diffraction*, ou *inflexion* de la lumiere observée par Grimaldi, et ensuite par Newton (*Opt. part.* 3), qui rendoit dans ces cas-là l'image très grande et très mal terminée. Riccioli fit voir alors qu'on devoit se servir d'un trou plus large, et retrancher le diametre du trou de la largeur de l'image solaire ; c'est ainsi qu'il trouva par le gnomon de St. Pétrone, les diametres du Soleil de 31′ 0″ et 32′ 4″. Cassini, dans le même temps, les trouvoit de 31′ 8″ et 32′ 10″ (*Astr. ref. pag.* 38).

1387. Depuis la découverte des micrometres (2346) il n'y a eu

qu'une incertitude de peu de secondes dans la mesure du diametre solaire, comme on le verra dans la table suivante; mais ce petit nombre de secondes étoit devenu une chose importante à constater. Voici les différens sentimens en commençant par ceux qui faisoient le diametre le plus grand.

Flamsteed en 1673 (*Horoccii op. pag.* 488) faisoit le diametre apogée de	31′ 40″
Cassini en 1684, à la fin de ses observations astronomiques, *page* 48,	31 40
Halley, dans ses tables astron. en 1719,	31 38
Auzout et Picard, en 1666 (*Hist. cél. page* 10, *Philos. Trans. n°.* 21), 31′ 37″ *ou*	31 38
Cassini, dans ses tables astronomiques, 1740,	31 36
La Caille, dans ses tables du Soleil, 1758,	31 34$\frac{2}{5}$
Le chev. de Louville, Mém. de l'acad. 1724,	31 33
Cassini, Elémens d'astron. 1740, *page* 127,	31 32$\frac{1}{2}$
Mouton (*Observat. Diametrorum, Lugd.* 1670, *Mém. acad.* 1752, *page* 445),	31 31$\frac{1}{2}$
Par mes observations (*Mém. acad.* 1760, *page* 48),	31 30$\frac{1}{2}$
Suivant Short, avec un très bon télescope,	31 28
Suivant M. Maskelyne, avec la lunette acromatique de 8 pieds,	31 29,2

Quoiqu'on ait trouvé le diametre du Soleil de plus en plus petit depuis un siecle, je ne crois pas qu'il ait réellement diminué : peut-être l'émission continuelle de matiere lumineuse devroit produire cet effet; mais on verroit probablement plus de taches qu'on n'en voyoit dans le dernier siecle, si le Soleil avoit diminué de volume dans sa partie lumineuse.

Le diametre périgée surpasse de 64″ 8 le diametre apogée; et comme il n'y a point d'incertitude là-dessus, je me suis contenté de rapporter dans la table précédente le plus petit des diametres du Soleil, celui qui s'observe le 30 juin jour de l'apogée du Soleil, d'où il est aisé de conclure le diametre périgée en ajoutant 1′ 5″ au premier.

Le diametre du Soleil étant en raison inverse de sa distance, et sa distance apogée étant de 10168 parties dont la moyenne est 10000,

10000; si l'on connoît sa distance ou son rayon vecteur pour un temps quelconque par la méthode des articles 1246 ou 1249, on aura aussi son diametre en faisant cette proportion : La distance actuelle du Soleil est à sa distance apogée 10168, comme le diametre apogée 31′ 30″ ½ est au diametre apparent pour un temps quelconque.

1388. Les différences que l'on vient de voir entre les différens auteurs me paroissoient exiger une nouvelle discussion : cet élément est un des plus importans de l'astronomie, puisque c'est le diametre du Soleil qu'on emploie ordinairement pour évaluer les parties des micrometres et les mesures des petits arcs célestes ; j'y ai donc employé la plus grande lunette qui eût encore servi à cette recherche, un héliometre de 18 pieds ; et j'ai trouvé, par des mesures répétées une multitude de fois, que le diametre du Soleil apogée est de 31′ 30″ ½ (2529).

M. Short m'a dit depuis, en Angleterre, qu'il n'avoit trouvé ce diametre que de 31′ 28″, avec un micrometre objectif et acromatique d'une très grande perfection, appliqué à un télescope de deux pieds ; il pourroit se faire que le cercle d'aberration et de couleur qui environne toujours l'image des objets au foyer d'une lunette se fût trouvé encore plus grand de 3″ dans mon héliometre, quoique très bon : Newton supposoit qu'il y avoit une aberration sensible dans les meilleures lunettes, et les durées des passages de Vénus en fournissent encore un indice (2158). Cependant, comme les lunettes de l'espece de la mienne sont plus ordinaires dans nos observatoires, je supposerai le diametre du Soleil de 31′ 31″ dans son apogée ; mais pour réduire des observations faites avec de petites lunettes ou des lunettes qui ne sont pas absolument parfaites, il seroit bon de supposer le diametre de 5″ plus grand ; c'est-à-dire, comme dans les tables de Cassini.

Au contraire, dans les éclipses, il faut supposer 6″ de moins, à cause de l'irradiation (1395) ; cette diminution doit aussi avoir lieu quand on veut calculer la grosseur et la densité du Soleil (3562).

Ce diametre paroît aussi un peu plus grand du nord au sud que de l'orient à l'occident : mais c'est peut-être à cause de la différente réfrangibilité des rayons colorés (*Mém.* 1748, *pag.* 30). J'ai trouvé 2″ de plus, avec un héliometre de 18 pieds (*Mém.* 1760).

1389. Le diametre de la Lune varie depuis 29′ 22″ jusqu'à 33′ 34″ environ ; ainsi son diametre moyen est de 31′ 28″ ; c'est-à-dire qu'il égale seulement le plus petit diametre du Soleil, ou celui qu'il paroît avoir dans sa plus grande distance : mais le diametre moyen

de la Lune est vu à une distance 398 fois plus petite que la distance moyenne du Soleil, et il ne seroit pas de 5″ s'il étoit vu à la distance du Soleil. Nous parlerons plus au long du diametre de la Lune (1505).

1390. Avant la découverte des lunettes, Tycho donnoit 3′ $\frac{3}{4}$ au diametre de Vénus dans sa moyenne distance à la Terre, ce qui feroit 12′ $\frac{1}{3}$ dans le temps de ses conjonctions inférieures; suivant les tables de Képler, on auroit 6′ 51″ pour ces conjonctions, au lieu de 58″ que nous trouvons actuellement (*Horoc. Venus in Sole, c. 16*). On trouvera la table de tous les sentimens des anciens astronomes à ce sujet dans Riccioli (*Astr. ref. pag. 359*).

La découverte des lunettes fut seule suffisante pour donner une plus juste idée des diametres apparens, même avant l'usage des micrometres : le P. Riccioli et le P. Grimaldi trouverent les diametres des planetes vers 1650 de la maniere suivante : Mercure dans ses moyennes distances 13″ 48‴, Vénus 1′ 4″ 12‴, Mars 22″, Jupiter 49″ 46‴, Saturne sans son anneau 26″ 40‴ et l'anneau 57″ (*Astr. ref. pag. 356*): tous ces diametres sont pour les moyennes distances à la Terre.

Riccioli avoit déterminé les diametres de Jupiter et de Saturne par leurs appulses ou conjonctions aux étoiles fixes (*Astr. ref. pag. 355*), et il trouvoit seulement 4″ de plus que Huygens ne trouva ensuite par le moyen de son micrometre (*Systema saturnium 1659, in fine*). Mais Riccioli s'étoit trompé sur le diametre de Vénus, qu'il trouvoit beaucoup trop grand, parceque ses lunettes ne dépouilloient pas assez cette planete de son excès de lumiere. Hévélius avoit trouvé le diametre de Vénus et celui de Jupiter, à peu près tels que Huygens les trouva ensuite avec son micrometre : il les comparoit avec les taches de la Lune, dont il avoit examiné la proportion avec le diametre entier de cet astre (*Selenog. pag. 449, 477, 547*). Ces diametres étoient encore un peu trop grands; l'usage des micrometres plus parfaits (2360) a mis dans cette matiere une bien plus grande exactitude.

1391. Le diametre de Mercure dans son passage sur le Soleil que j'observai à Meudon en 1753, mesuré plusieurs fois avec un héliometre de 18 pieds, me parut de 11″ 8, c'est-à-dire, 11 secondes et 8 dixiemes (*Mém. acad. 1754*); la distance de Mercure à la Terre étoit alors à la distance moyenne du Soleil à la Terre, comme 55674 est à 101007 : ainsi l'on fera cette proportion, 1010 : 557 :: 11″ 8 : 6″ 5, et l'on aura 6″ 5 pour le diametre de Mercure au temps où sa distance est égale à la distance moyenne du Soleil.

En 1723, lorsque Mercure passa sur le Soleil, Bradley, avec une lunette de 120 pieds, trouva que ce diametre étoit 10″ ½; ce qui fait 7″ 34 pour la distance moyenne (*Inst. astron. pag. 556*; *Philos. Trans.* 1723, n°. 386): ainsi par un milieu je le supposerai de 6″ 9. On verra la maniere dont on s'y prend pour le déterminer par la durée de son entrée sur le Soleil ou de sa sortie (2157).

Le diametre de Vénus sur le Soleil, observé le 6 juin 1761, m'a paru être de 57″8, et, en 1769, de 57″ 2 (2157); la distance de Vénus à la Terre en 1761 étoit à la distance moyenne du Soleil, comme 2890 est à 10000: ainsi le diametre de Vénus à la distance moyenne du Soleil paroît de 16″7.

J'ai conclu exactement le même diametre de quatre observations de Short, faites dans d'autres temps, avec un micrometre objectif, appliqué à un télescope de deux pieds (*Mém. acad.* 1762).

1392. Le diametre de Mars, mesuré par Picard le 8 septembre 1672, parut de 30″; c'est ainsi qu'il le raconte lui-même dans les observations faites en divers endroits du royaume imprimées à la suite du voyage d'Uranibourg, en 1680, *pag.* 34. M. le Monnier dit 27″ 2 (*Inst. astr. pag. 556*). La distance de Mars à la Terre étoit alors de 0,3815: ainsi le diametre réduit à la distance du Soleil à la Terre seroit 11″4; suivant M. le Monnier ce seroit 9″ 9, d'après ses anciennes observations; ce diametre se trouve de 10″2, suivant l'observation de M. l'abbé Rochon faite en 1777 avec son nouveau micrometre prismatique de crystal de roche mobile le long de l'axe d'une lunette (*Recueil de mémoires, page* vj). Enfin M. Herschel ayant fait en 1783 des observations exactes avec ses excellens télescopes, a trouvé le diametre moyen de Mars 8″ 94, et une différence d'un seizieme entre le diametre de l'équateur et celui qui va du nord au sud (*Philos. Trans.* 1784).

1393. Le diametre de Jupiter, observé en 1719 par Pound avec la lunette de 123 pieds de Huygens, parut toujours plus petit que 40″, jamais au-dessous de 38, et plus souvent 39″ (*Newton. Princip. mathem. l. III, Phaenom.* 1). Par les durées des passages du premier et du troisieme satellite et par le passage de l'ombre du premier sur le disque de Jupiter, qui furent observés avec la même lunette, Newton conclut ce diametre de 37″ ¼ pour la distance moyenne de Jupiter au Soleil ou à la Terre. Si nous prenons avec lui 37″ ¼ et que nous fassions cette proportion, 1000 : 5201 : : 37 ¼ : 193,74, nous aurons 3′ 13″ ¾ pour le diametre que Jupiter auroit s'il étoit aussi près de nous que le Soleil; mais il s'agit ici du diametre de l'équateur, car on verra que Jupiter est applati vers les poles d'environ une quatorzieme partie (3345).

M. l'abbé Rochon a trouvé, le 5 avril 1777, les diametres de 35″ 3 et 37″7, ce qui donneroit 3′ 2″ 4, et 3′ 14″ 8 pour les diametres dans les deux sens.

Le diametre de Saturne, observé par Pound en 1719, parut de 18″, et le diametre de l'anneau (3353) parut de 42″, en les réduisant à la distance moyenne de Saturne au Soleil et à la Terre (*Newton. Princip. l. III, Phaenom.* 2). Newton réduisoit à 16″ le diametre de Saturne à cause de l'irradiation; mais je ne crois pas devoir ici en tenir compte. La distance moyenne de Saturne au Soleil est à celle du Soleil à la Terre, comme 1000 est à 9541 (1222): ainsi le diametre de Saturne est 2′ 51″71, à la distance moyenne du Soleil, et celui de l'anneau seroit de 6′ 40″ 65, réduit à la moyenne distance du Soleil à la Terre. M. l'abbé Rochon, le 5 avril 1777, a trouvé le diametre de Saturne 16″9, et celui de l'anneau 40″6; ce qui donne 2′ 28″8, et 5′ 57″5.

Le diametre d'Herschel est fort difficile à mesurer; il a paru quelquefois de 4″ et quelquefois de 5; je le supposerai de 3″9 (*Philos. Trans.* 1783, 1788). M. Herschel l'a mesuré avec son télescope de 7 pieds; il ne croit pas qu'il y ait plus d'un quart de seconde d'erreur dans ce dernier résultat.

1394. Le diametre de la Terre vu du Soleil, égal au double de la parallaxe horizontale de cet astre, est d'environ 17″ 2 (1725). A l'égard du diametre réel de la Terre en lieues, il sera déterminé quand nous parlerons de la grandeur de la Terre: on verra qu'il est de 2864 lieues (2662).

1395. J'ai dit que, suivant Newton, les diametres des planetes observés avec les plus grandes lunettes sont encore affectés d'une *irradiation*, ou dilatation de lumiere, qui les environne comme une frange, et les fait paroître trop grands; en conséquence plusieurs astronomes ont cru que, pour avoir les vrais diametres, il falloit ôter 2″ de celui de Saturne, 5″ de celui de Mars, tandis qu'il falloit ajouter 1″ ou 2″ aux diametres de Mercure et de Vénus observés sur le Soleil, à cause d'un semblable débordement de la lumiere solaire qui devoit faire paroître ces planetes plus petites (*Instit. astr. p.* 554).

Pour moi, ayant comparé le diametre de Vénus déterminé en 1761 par la durée de sa sortie du Soleil, et ce diametre observé dans sa plus grande lumiere avant et après le passage de Vénus sur le Soleil, je les ai rapportés tous à une même distance (*Mém. acad.* 1762), et je n'y ai trouvé aucune différence: ainsi l'augmentation est insensible pour les planetes, parceque leur lumiere n'est pas assez forte pour produire ce phénomene: je pense donc qu'il est

inutile d'en tenir compte, si ce n'est quand on mesure le diametre d'une planete sur le Soleil, où elle est diminuée par l'irradiation solaire; mais cet effet n'a pas lieu sur la durée de la sortie (2159).

On croit avec quelque fondement que le diametre du Soleil, avec de grandes lunettes, paroît plus petit qu'avec les petites lunettes par une suite de cette irradiation : ainsi la Caille a toujours pensé que le diametre apogée du Soleil étoit de 31′ 34″ mesuré avec des lunettes de 6 pieds, tandis que je l'ai trouvé de 31′ 30″ $\frac{1}{2}$ avec un héliometre de 18 pieds (1388). Peut-être cette différence provient-elle de la difficulté qu'il y a de mesurer exactement ce diametre avec un micrometre ordinaire comme étoit celui de la Caille, et avec une lunette qui n'avoit que 6 pieds; mais si cette différence est réelle, il faudra l'attribuer à une couronne lumineuse formée par l'aberration des rayons qui, dans les lunettes, ne se réunissent pas exactement au même point (2291). Au reste, cette différence étant toujours la même pour le Soleil, vu dans la même lunette, il est inutile d'y avoir égard; [a] si ce n'est dans les passages de Vénus et de Mercure, et dans les éclipses de Soleil (1508, 2159). Aussi M. du Séjour, dans le calcul des éclipses de Soleil, diminue de 3″ $\frac{1}{2}$ le diametre du Soleil. (*Mém.* 1770, *pag.* 273; 1775, *pag.* 365; 1781, *pag.* 326; *Traité analyt.*, *pag.* 264, 394). J'ai trouvé aussi le même résultat pour le Soleil par les passages de Vénus (2158).

Quand une planete paroît sur le Soleil, l'irradiation du Soleil qui l'environne de tout côté doit rétrécir en apparence la partie obscure ou le diametre de la planete; et ce diametre, mesuré avec un micrometre, doit paroître plus petit de la même quantité que celui du Soleil paroît trop grand; aussi le diametre de la Lune, mesuré en 1748 sur le disque même du Soleil, a paru plus petit que quand la Lune est éclairée, et cela d'environ 6″, par un effet de l'irradiation du Soleil (1508).

1396. Les diametres apparens de toutes les planetes, réduits à une même distance, nous donnent le moyen de trouver les diametres absolus et de les comparer tous ou au diametre du Soleil ou à celui de la Terre. Pour faire cette comparaison, il faut supposer qu'on connoisse la parallaxe du Soleil, c'est-à-dire l'angle sous lequel paroît, vu du Soleil, le demi-diametre de la Terre; mais cet angle est connu par les observations du passage de Vénus : elles

(a) Si l'on se sert du diametre du Soleil pour évaluer les parties d'un micrometre (2536), il faudroit pouvoir ajouter à ce diametre la quantité dont la lunette le fait paroître trop grand.

nous ont fait voir avec assez de précision que ce diametre est de $17''2$ (1725); ainsi comme on aime assez à rapporter tout à la Terre, nous donnerons les diametres des planetes par rapport à la Terre, en supposant que son demi-diametre vu du Soleil paroît de $8''6$.

Pour trouver les volumes ou les grosseurs des planetes par rapport à la Terre, quand on connoît le rapport de leurs diametres, il suffit de prendre le cube du diametre, ou de tripler son logarithme, parceque les spheres sont comme les cubes de leurs diametres. Par exemple, le diametre de la Terre est de $17''2$; celui de Mercure est de $6''9$ à la même distance (1391). Si l'on divise $6''9$ par $17''2$, l'on aura 0,4012; c'est le diametre de Mercure, en supposant que celui de la Terre est 1. Le cube de cette fraction décimale donnera 0,06456, qui vaut à peu près $\frac{1}{15}$; ce qui nous apprend que la grosseur de Mercure est la quinzieme partie de celle de la Terre.

1397. Le volume ou la grosseur d'une planete n'est pas la même chose que sa masse ou la quantité de matiere qu'elle renferme; celle-ci dépend de la densité (3557), qu'en attendant j'ai mise dans la table suivante. La densité multipliée par le volume donne la masse, le poids, la quantité de matiere, ou la force attractive; c'est ce que j'ai renfermé de même dans la table suivante. J'y ai ajouté les logarithmes des masses en parties de celle du Soleil, telles que M. de la Grange les a employées dans ses savantes et utiles recherches (*Mém. de Berlin* 1782, *p.* 190), quoique je sois persuadé qu'il faut diminuer les masses de Vénus et de Mars.

On observera, au sujet de cette table, que les densités qui ne sont pas marquées par des (*d*), sont les seules qu'on puisse déterminer par un calcul immédiat; celles qui sont marquées douteuses sont établies par une espece de conjecture; celle de Vénus par l'effet qu'elle produit sur les planetes (3565).

1398. Les distances en lieues ne sont certaines qu'à un cinquantieme près, parcequ'elles dépendent de la parallaxe du Soleil sur laquelle on a peut-être un cinquieme de seconde d'incertitude (1725).

J'ai supposé la masse de la Lune $\frac{1}{66}$ de celle de la Terre (3567): Bernoulli la jugeoit $\frac{1}{70}$, par son effet sur le flux et le reflux de la mer, au lieu de $\frac{1}{40}$ que Newton avoit trouvé. La masse du Soleil est plus grande que ne supposoit Newton (liv. 3, pr. 8) qui la faisoit de 169282; parceque j'ai fait la parallaxe plus petite que Newton, qui la supposoit de $10''\frac{1}{2}$, et que j'ai employé d'autres élémens plus exacts que ceux qu'on avoit de son temps.

Je parlerai du diametre de la Lune (1506), et de ceux des étoiles fixes, dans le XVI[e] livre (2808).

Les distances des planetes à la Terre en lieues, qui sont dans les dernieres colonnes de la table, ne sont autre chose que la somme et la différence de la distance moyenne de la Terre, et de la distance de chaque planete au Soleil (1222), réduites en lieues à raison de 2864 pour le diametre de la Terre; j'ai négligé les valeurs des derniers chiffres, qui, dans ces sortes de calculs, sont tout-à-fait inappréciables, excepté pour la Lune (1704).

Des distances au Soleil et des périodes des planetes, il est aisé de conclure les vîtesses, qui sont d'ailleurs en raison inverse des racines des distances (3574). Ces vîtesses sont aussi dans la table. Par exemple, la circonférence de l'orbite terrestre supposée circulaire doit avoir 215874450 lieues; ainsi la vîtesse de la Terre dans son orbite est de 591022 lieues par jour, 24626 par heure, 410 par minute, et 7 par seconde. A l'égard de la vîtesse diurne de la Terre, elle n'est que de 238 toises par seconde sous l'équateur, à peu-près comme celle d'un boulet de canon de 24 livres de balle, qu'on estime de 250 toises dans la premiere seconde: il emploîroit dix ans à venir du Soleil à la Terre par un mouvement uniforme.

J'ajouterai ici les vîtesses que les corps pesans doivent avoir dans la premiere seconde, à la surface de chaque planete, en pieds et en décimales de pieds, en supposant que les corps décrivent sur la Terre 15 pieds 2 pouces 2 lignes, ou 15,1037 en une seconde sous l'équateur (3543), la Terre étant supposée immobile; cette vîtesse est la mesure de la pesanteur dans chaque planete; elle est proportionnelle à la masse divisée par le rayon (3566).

Soleil,	427 pi.	88
Terre,	15	1037
Lune,	3	060
Mercure,	15	654 d.
Vénus,	15	421 d.
Mars,	5	154 d.
Jupiter,	42	344
Saturne,	15	714
Herschel,	14	373

J'ai négligé la masse de l'anneau de Saturne, parceque nous n'avons aucun moyen de l'évaluer, et qu'elle doit être fort petite; j'ai supposé qu'elle n'ôtoit rien de la pesanteur des graves à la surface de Saturne, et que l'effet de l'anneau sur les satellites étoit confondu avec celui de la planete.

Table des grandeurs et des distances des planetes, où l'on voit leurs diametres apparens, ces diametres réduits à la distance moyenne du Soleil à la Terre, leurs diametres vrais, en supposant la parallaxe du Soleil de 8″ 6; avec leurs volumes, leurs densités, leurs masses, leurs vîtesses, et leurs distances à la Terre.

Planetes.	Diametres les plus grands qu'on observe.	Diamet. à la dist. du Soleil.	Diamet. en lieues.	Diametres par rapport à la Terre.	
Le Soleil.	32′ 36″	31′ 57″0	319314	111, 45	111 f. le diam. de la Terre.
La Terre.	. . . .	17, 2	2864	1,	. . . .
La Lune.	33. 37	4, 696	782	0, 2731	3 onz. du diam. de la Terre.
Mercure.	12	6, 9	1166	0, 4012	Deux cinquiemes.
Vénus.	57	16, 547	2748	0, 9593	Plus petit d'un vingt-cinq.
Mars.	27	8, 943	1490	0, 5199	La moit. du diam. de la Terre
Jupiter.	40	3 6, 82	31111	10, 862	Onze fois aussi grand.
Saturne.	18	2 51, 71	28594	9, 9830	Dix fois aussi grand.
Anneau de S.	42	6 40, 65	66719	23, 294	Vingt-trois fois.
Herschel.	4	1 14, 52	12410	4, 332	Quatre fois et un tiers.

	Grosseurs par rapport à la Terre.		Densités par rapport à la Terre.	Masses par rapport à la Terre.	Log. des masses, par rapport au S. suiv. M. de la G.
Le Soleil.	1384462	14 cens mille f. plus gros que la Terre.	0, 25484	351886 1	. . . . . 4, 43728
La Lune.	0, 02036	Un quarante-neuv. de la Terre.	0, 74200	0, 015107	. . . . .
Mercure.	0, 064558	La 15e partie.	2, 583 d.	0, 1668 d.	5, 69340
Vénus.	0, 89025	Plus petite d'un neuvieme.	1, 0379 d.	0, 9500 d.	4, 55474
Mars.	0, 1406	Un septieme.	0, 656 d.	0, 1025 d.	3, 73375
Jupiter.	1281	Treize cens fois plus gros.	0, 25800	330, 60	6, 97176
Saturne.	995	Mille fois plus gros.	0, 10422	103, 69	6, 47387
Herschel.	80,49	Quatre-vingts fois.	0, 2204	17, 74	. . . . .

	Vîtesses par minute en lieues.	Distances à la Terre en lieues.		
		La plus petite.	La moyenne.	La plus grande.
Le Soleil.	. .	33780210	34357480	34934726
La Terre.	415	. . . .	. . . . .	. . . . .
La Lune.	14	80187	86324	91397
Mercure.	667	21057738	34357480	47657222
Vénus.	488	9505595	34357480	59209365
Mars.	337	17992760	32350240	86707720
Jupiter.	182	144335070	178692550	213050030
Saturne.	134	293391240	327748720	362106200
Herschel.	95	621245120	655602600	689960080

Observations

Observations astronomiques, anciennes et modernes, du Soleil et des six planetes principales.

1399. Les observations sont le fondement de toutes les théories, elles en font la vérification et la preuve; ainsi je ne puis terminer mieux ce VI.e livre qu'en y rassemblant une collection des meilleures observations anciennes et modernes, extraites des auteurs qui en ont fait le calcul et l'application; j'y ai ajouté les observations les plus récentes et les plus décisives pour chaque planete, comme un point fixe d'où l'on pourra partir pour établir des théories, et construire de nouvelles tables.

Les anciennes observations se trouvent rassemblées et discutées dans les ouvrages suivans: Longomontani, *Astronomia Danica*, 1640, Bulliadi; *Astronomia Philolaïca*, 1645; Riccioli, *Astronomia Reformata*, 1665; Wing, *Astronomia Britannica*, 1669; *Historia Cœlestis Tychonis Brahe*, 1672; M. Cassini, *Elémens d'Astronomie*, 1740. J'en ai moi-même examiné et calculé un grand nombre; mais il sera toujours bon de remonter aux sources, quand on voudra fonder des théories sur les observations.

A l'égard des observations modernes, on pourra consulter le grand ouvrage d'Hévélius intitulé *Machina Cœlestis* (livre très rare); celui de Flamsteed, *Historia Cœlestis Britannica;* les mémoires des académies de Paris, de Londres, de Berlin, de Pétersbourg, de Toulouse. On doit desirer de voir publier toutes celles de Halley, de Bradley, celles qui sont dans les registres de l'observatoire royal de Paris, et celles que M. de l'Isle a rassemblées dans ses manuscrits, et qui sont au dépôt de la marine, rue St. Antoine à Paris: c'est une des plus grandes collections d'observations astronomiques qui aient jamais existé. M. Messier en a fait aussi une grande quantité, comme on peut en juger par la notice qu'il a donnée dans le 5.e volume des mémoires présentés à l'académie, en y joignant le détail de celles de 1762. M. d'Agelet en a fait beaucoup à l'école militaire depuis 1778 (*V. les Mém. de l'acad.* 1784, *pag.* 74). Mais le plus grand inconvénient des grands recueils, c'est que la plupart de ces observations ne peuvent se réduire que par de longs calculs.

Le recueil le plus moderne et le plus précieux de tous est celui de M. Maskelyne, astronome royal d'Angleterre, qui commence à 1765, et qui forme déja deux volumes in-folio jusqu'à 1786. La précision de ces observations est si grande, qu'on trouve souvent la

même seconde pour l'ascension droite d'une planete déduite de différentes étoiles, quoiqu'on y emploie la mesure du temps.

Les observations de M. le Monnier, imprimées au Louvre in-folio, de 1751 à 1773, commencent à 1733: l'impression a été suspendue à 1746.

M. Cassini a commencé en 1765 à publier l'abrégé et les résultats des observations qui sont faites sans interruption à l'observatoire royal par lui et par les trois adjoints qu'on y a établis; il y ajoute les observations plus anciennes en remontant; et il espere donner les observations elles-mêmes dans un ouvrage plus étendu.

M. Darquier, à Toulouse, a publié deux volumes d'observations en 1777 et 1782; les suivantes sont dans les mémoires de l'académie de Toulouse.

Le P. Fixlmillner, le P. Weiss, le P. Poczobut, MM. Tofino et Varela, M. Slop, M. Bugge, ont publié aussi des recueils d'observations, auxquels j'ai eu recours plusieurs fois.

Enfin, on trouve beaucoup d'observations dans les éphémérides de Vienne, de Berlin, de Milan. Pour les observations de la Lune, *voyez* 1524.

On trouvera sur-tout ici beaucoup d'observations de Mercure, parcequ'elles sont rares et difficiles à faire sur-tout à Paris. Copernic éprouvoit la même difficulté dans le nord; il ne put jamais faire une seule observation de Mercure, ce qu'il attribuoit aux vapeurs de la Vistule et à la longueur des crépuscules en été. On trouve dans l'Astronomie réformée, dans Hévélius et Flamsteed, beaucoup d'observations de Mercure qui n'ont jamais été calculées, et dont on pourroit se servir pour la théorie de cette planete; j'en ai employé quelques unes pour mes tables de Mercure; j'en ai aussi calculé de Halley (*Mém. de* 1766).

J'ai trouvé dans les manuscrits de Joseph de l'Isle la notice de beaucoup d'observations de la Hire et de plusieurs autres astronomes, observations qui n'ont point été publiées: on y trouve celles que Joseph de l'Isle fit à Pétersbourg pendant 20 ans; mais j'y ai suppléé par celles de M. Maskelyne, de M. d'Agelet, et par les miennes, qui m'ont donné très bien les élémens actuels de l'orbite de Mercure (*Mém. acad.* 1786). J'en ai rapporté plusieurs de M. Pigott et du P. Fixlmillner dans le 8ᵉ volume des éphémérides; d'autres de M. Hornsby, de M. Poczobut, de M. Vidal et de M. de Beauchamp dans les Mém. de l'acad. pour 1786.

Les longitudes que je vais rapporter sont corrigées par la réfraction et la parallaxe autant qu'il a été possible, et à cet égard ce sont

des longitudes vraies: mais elles sont affectées de l'aberration; elles le sont aussi de la nutation, c'est-à-dire qu'elles sont comptées de l'équinoxe apparent, suivant l'usage que les astronomes ont suivi jusqu'à présent, mais que l'on commence à changer, parcequ'il est plus naturel de compter de l'équinoxe moyen. Lorsque j'ai pris ce parti, j'en ai averti, par exemple, pour les dernieres conjonctions de Vénus.

OBSERVATIONS DU SOLEIL.

Av. notre ere. Temps moy. à Paris.

161	27 sept.	4h	1'	Equinoxes observés par Hipparque. Voy. *Ptolémée, Almag. liv. III, c. 1.* *Mém. de l'Acad.* 1757, *p.* 423; 1782, *p.* 242. *Cassini, El. d'Astron. p.* 211.
158	26 sept.	16	1	
157	26 sept.	22	1	
146	26 sept.	10	1	
145	23 mars	22	10	
145	26 sept.	16	1	
142	26 sept.	4	1	
134	22 mars	10	15	
127	23 mars	4	15	

1278	13 déc.	18h	7'	sols. d'hiv.	*Hist. de l'Astron. chin. pag.* 107. *Mém. Ac.* 1757, *pag.* 140, 141.
1279	14 juin	8	46½	sols. d'été.	
1279	13 déc.	23	52	sols. d'hiv.	
1280	12 déc.	5	50	sols. d'hiv.	

1487	12 déc.	12	1	sols. d'hiv.	*Mém. Acad.* 1749, *p.* 53; 1757, *p.* 139.
1488	11 juin	20	40½	sols. d'été.	
1488	12 déc.	11	47½	sols. d'hiv.	
1503	12 juin	12	8	sols. d'été.	
1503	12 déc.	9	45½	sols. d'hiv.	

OBSERVATIONS de Waltherus. (La Caille, *Mém. Acad.* 1749.)

Années.	Temps moyen	à Paris.		Longitude	du	Soleil.	
1475	15 sept.	23h	17'	6s	1°	51'	24"
1476	15 mars	23	33	0	5	4	55
1476	12 sept.	23	18	5	29	40	6
1477	10 mars	23	33	11	29	54	0

Années.	Temps moyen à Paris.			Longitude du Soleil.			
1477	16 sept.	23h	17'	6s	3°	16'	48"
1478	11 mars	23	33	0	0	35	37
1478	12 sept.	23	18	5	29	6	54
1487	17 sept.	23	17	6	2	54	24
1488	16 mars	23	31	0	6	7	48
1488	13 sept.	23	17	6	0	43	31
1488	14 sept.	23	17	6	1	42	52
1488	17 sept.	23	16	6	4	38	37
1489	12 mars	23	32	0	1	58	30
1489	14 mars	23	31	0	3	57	46
1489	18 mars	23	30	0	7	54	20
1491	12 mars	23	32	0	1	28	26
1491	14 sept.	23	17	6	0	59	12
1498	17 sept.	23	16	6	4	13	24
1498	18 sept.	23	16	6	5	13	8
1499	13 mars	23	32	0	2	32	37
1501	16 mars	23	31	0	5	58	20
1501	14 sept.	23	17	6	1	34	15
1501	18 sept.	23	15	6	5	28	50

Equinoxes observés par Tycho. (*Mém. Acad.* 1757, 1782, *pag.* 257; *Cassini*, *pag.* 228.)

Vieux style; temps moyen à Paris.

1584	10 mars	0h	47'	1589	12 sept.	16h	50'
1584	12 sept.	11	12	1590	10 mars	11	15
1585	10 mars	6	52	1590	12 sept.	22	53
1585	12 sept.	17	4	1591	13 sept.	4	57
1586	10 mars	12	42	1592	12 sept.	10	30
1586	12 sept.	23	7	1593	10 mars	4	44
1587	10 mars	17	56	1593	12 sept.	16	6
1587	13 sept.	5	38	1594	10 mars	11	25
1588	10 mars	0	17	1594	12 sept.	22	27
1588	12 sept.	10	36	1595	13 sept.	13	34
1589	10 mars	5	6	1597	10 mars	4	14

Ces équinoxes sont quelquefois en erreur d'une heure, ou de 2' ½ sur la longitude.

Observations du Soleil, faites par M. Maskelyne, et calculées par M. de Lambre.

Ces observations sont de la plus grande exactitude, et ont été calculées avec un soin extrême, pour servir à former les nouvelles tables du Soleil ; je n'en rapporte ici qu'une partie. (*Voyez les Mémoires de Berlin*, 1784 *et* 1785.)

Année.	Temps moyen à Paris.				Longitude apparente observée.			
1775	13 mai	0h	5′	16″	1s	22°	27′	17″7
	31	0	6	27	2	9	44	30,2
	6 juin	0	7	24	2	15	29	0,4
	16	0	9	23	2	25	1	50,4
	21	0	10	27	2	29	48	8,9
	26	0	11	31	3	4	34	16,3
	1 juillet	0	12	32	3	9	20	24,4
	11	0	14	12	3	18	52	35,5
	19	0	15	2	3	26	30	28,8
	23	0	15	18	4	0	19	39,0
	29	0	15	16	4	6	3	59,0
	4 août	0	14	56	4	11	48	49,2
	7	0	14	37	4	14	41	27,1
	23	0	11	36	5	0	4	54,0
	26	0	10	48	5	2	58	48,7
	4 sept.	0	8	5	5	11	41	46,8
	11	0	5	45	5	18	30	6,6
	17	0	3	39	5	24	21	15,0
	24	0	1	14	6	1	12	41,2
	4 octob.	23	57	42	6	12	2	32,5
	15	23	54	56	6	22	56	13,7
	26	23	53	19	7	3	54	21,5
	1 novem.	23	53	3	7	9	54	56,5
	18	23	54	58	7	27	2	3,7
	10 décem.	0	2	29	8	18	20	33,1
	13	0	3	54	8	21	23	44,5
	25	0	9	51	9	3	37	37,9
	30	0	12	18	9	8	43	34,1

Années	Temps moyen à Paris.					Longitude apparente observée.			
1776	31	mars	0^h	13′	18″	0^s	11°	20′	30″1
	2	avril	0	12	41	0	13	18	28,5
	29	juin	0	12	18	3	8	9	16,9
	30		0	12	29	3	9	6	25,2
	29	sept.	23	59	0	3	7	51	5,6
	1	octobr.	23	58	22	6	9	49	20,4
	28	décem.	0	11	42	9	7	27	8,9
1777	31	mars	0	13	23	0	11	5	54,0
	1	avril	0	13	4	0	12	4	54,9
	28	juin	0	12	3	3	6	57	54,8
	28	sept.	23	59	24	6	6	37	43,2
	1	octobr.	23	58	27	6	9	35	11,2
	28	décem.	0	11	35	9	7	12	31,4
1778	27	mars	0	14	41	0	6	54	56,4
	26	juin	0	11	35	3	4	49	32,3
	28	sept.	23	59	28	6	6	23	31,1
	26	décem.	0	10	28	9	4	55	19,4
1779	31	mars	0	13	32	0	10	37	24,5
	1	juillet	0	12	33	3	9	22	6,2
	31	décem.	0	12	47	3	9	46	13,9
1780	30	mars	0	13	36	0	10	23	3,7
	30	juin	0	12	30	3	9	8	14,5
	26	sept.	0	0	17	6	3	56	50,3
	30	décem.	0	12	40	9	9	31	45,3
1781	3	janvier	0	14	33	9	13	36	40,1
	30	mars	0	13	40	0	10	9	14,0
	30	juin	0	12	12	3	8	54	36,7
	28	sept.	23	59	23	6	6	39	30,6
	30	décem.	0	12	33	9	9	16	49,1
1782	31	mars	0	13	26	0	10	53	52,5
	28	juin	0	12	1	3	6	46	28,5
	29	sept.	23	59	47	6	5	26	31,6
	29	décem.	0	11	57	9	8	0	46,7
1783	29	mars	0	14	8	0	8	41	18,3
	4	avril	0	12	18	0	14	35	50,7
	1	juillet	0	12	34	3	9	24	25,9
	29	sept.	23	59	13	6	7	10	30,9
	30		23	58	54	6	8	9	37,0

Années.	Temps moyen à Paris.					Longitude apparente observée.			
1783	24	décem.	0h	9′	21″	9s	2°	39′	59″4
1784	5	janvier	0	15	8	9	14	54	26,0
	17		0	19	50	9	27	7	57,3
	28		0	22	41	10	8	19	18,7
	31		0	23	10	10	11	21	57,4
	3	février	0	23	33	10	14	24	26,9
	10		0	23	56	10	21	29	24,2
	23		0	23	1	11	4	35	51,9
	25		0	22	43	11	6	36	16,1
	3	mars	0	21	21	11	13	37	15,5
	7		0	20	24	11	17	36	57,2
	12		0	19	3	11	22	36	1,7
	20		0	16	42	0	0	32	39,0
	31		0	13	17	0	11	24	42,1
	10	avril	0	10	22	0	21	13	42,8
	17		0	8	35	0	28	4	0,4
	27		0	6	36	1	7	47	51,8
	30		0	6	10	1	10	42	25,0
	5	mai	0	5	38	1	15	32	38,5
	10		0	5	20	1	20	22	15,3
	28		0	6	10	2	7	40	13,0
	5	juin	0	7	23	2	15	19	35,7
	3	juillet	0	13	4	3	12	2	32,3
	16		0	14	52	3	24	26	20,3
	9	août	0	14	16	4	17	24	7,0
	31		0	9	7	5	8	36	58,1
	15	sept.	0	4	5	5	23	12	31,9
	30		23	58	40	6	8	54	15,9
	7	octobr.	23	56	38	6	15	49	5,8
	15		23	54	46	6	23	45	9,4
	26		23	53	15	7	4	43	33,6
	18	novem.	23	55	9	7	27	51	54,4
	30		23	58	59	8	10	1	23,2
	12	décem.	0	3	47	8	21	12	30,0
	22		0	8	43	9	1	23	52,0
	28		0	11	42	9	7	31	0,2

Les observations de la Caille sont dans le livre intitulé, *Astronomiae fundamenta*, et dans la Connoissance des temps de 1783. Celles de Mayer sont dans la seconde édition de cette Astronomie. t. IV, 1781.

OBSERVATIONS DE MERCURE.

Années.	Temps moyen à Paris.	Longit. observ.
264 avant J. C.	14 nov. 16ʰ 16′	7ˢ 2° 47′
261	11 févr. 15 38	9 21 48
261	25 avr. 4 31	1 23 8
261	23 août 4 42	5 18 58
256	28 mai 4 56	2 28 49
244	18 nov. 15 20	7 1 52
236	29 oct. 15 0	6 13 44
130 après J. C.	4 juil. 6 21	4 7 22
132	2 févr. 4 6	11 2 2
134	3 juin 13 55	1 19 48
134	2 oct. 15 28	5 21 15
135	5 avr. 5 13	1 5 23
138	4 juin 6 10	3 8 4
139	17 mai 5 54	2 18 34
139	4 juil. 13 57	2 21 9
141	1 févr. 16 46	9 14 34

Ces observations sont rapportées dans Ptolémée ; mais je les ai réduites et corrigées (705). (Voyez les Mémoires de l'acad. 1766, page 498.) Il y en a quelques unes qu'on ne peut accorder avec les autres.

Observ. calculées avec soin pour la théorie de Mercure.

Ces longitudes sont corrigées par la réfraction et la parallaxe, mais non par l'aberration, et elles sont comptées de l'équinoxe apparent.

Années.	Temps moyen à Paris.	Longit. observ.	
1672 21 mai	8ʰ 9′ 18″	2ˢ 24° 9′ 45″	*Mém.* 1766 *et* 1767.
1673 4 mai	7 53 25	2 5 52 5	
1683 13 déc.	19 39 15	8 3 48 23	
1701 20 sept.	22 57 28	5 12 23 55	
1731 15 juil.	22 38 12	3 3 2 35	M. Cassini.
1744 29 mai	8 51 52	3 2 0 0	
1750 16 avr.	22 49 52	0 6 53 1	Latitudes.
1750 5 oct.	1 19 42	7 7 18 19	2° 50′ 23″ A *Mém.* 1753.
1751 6 mai	0 57 7	2 0 50 36	1 51 15 B
1753 25 sept.	22 47 51	5 15 41 35	
1758 9 mai	1 22 54	2 10 1 46	
1759 19 août	1 41 34	5 22 58 35	
1763 17 nov.	18 30 8	7 6 13 34	
1763 3 juin	9 28 28	3 5 23 21	
1763 13 nov.	18 0 49	7 2 41 28	2 22 21 B
1764 24 mai	8 7 50	2 26 50 35	1 51 11 B
1764 17 juil.	15 58 4	3 6 59 6	1 7 9 A

Observations de Mercure par M. d'Agelet.

Années.	Temps moy. à l'Observ. royal.				Longitude observée.				Latitude observée.			
1778	23 août	1h	30'	9"	5s	24°	8'	44"	0°	31'	39"	A
	1 sept.	1	34	30	6	5	35	3	1	51	43	A
	12 oct.	22	44	56	6	2	56	13	1	17	44	B
	26 déc.	1	23	26	9	23	44	53	1	41	44	A
1779	13 avril	1	6	9	1	11	10	52	2	0	22	B
	14	1	8	20	1	12	43	41	2	8	56	B
	15	1	10	7	1	14	12	9	2	17	2	B
	3 juin	22	26	26	1	20	40	9	3	49	6	A
	1 sept.	1	14	46	6	0	50	53	3	58	50	A
	29	22	46	22	5	19	13	11	1	13	2	B
	1 oct.	22	46	43	5	21	19	8	1	31	40	B
	13	23	7	20	6	9	41	30	1	50	38	B
	17	23	16	24	6	16	32	35	1	34	38	B
	18	23	18	41	6	18	15	12	1	29	36	B
	6 déc.	1	13	47	9	3	13	2	2	18	40	A
1780	13 janv.	22	31	32	9	1	14	59	2	26	37	A
	21	22	27	10	9	7	31	30	1	7	35	A
	27 mai	22	26	6	1	14	21	59	2	53	48	A
	28	22	26	32	1	15	46	11	2	47	8	A
	29	22	28	11	1	17	13	15	2	39	56	A
	2 juin	22	36	45	1	23	27	54	2	5	59	A
	8	22	56	0	2	4	8	36	1	3	49	A
	9	23	0	0	2	6	4	11	0	52	43	A
	29 juil.	1	51	20	5	4	5	6	1	1	54	A
	30	1	51	0	5	5	6	55	1	13	7	A
	12 sept.	22	49	53	5	3	18	5	0	33	45	B
	8 nov.	0	49	55	8	2	11	42	2	0	50	A
1781	7 mars	1	3	46	0	1	46	14	0	17	36	B
	10	1	9	28	0	6	49	9	0	55	48	B
	13	1	12	49	0	11	13	3	1	35	12	B
	14	1	13	19	0	12	30	31	1	47	49	B
	15	1	13	24	0	13	41	11	2	0	31	B
	16	1	13	9	0	14	45	49	2	12	24	B
	17	1	12	28	0	15	43	9	2	23	53	B
	18	1	11	21	0	16	33	19	2	34	30	B
	5 juil.	1	50	35	4	8	51	13	0	48	4	B
	25 août	22	51	0	4	15	28	47	0	40	50	A
1783	26 sept.	1	32	44	6	27	34	51	2	3	52	A

Années.	Temps moy. à l'Observ. roy.				Longitude observée.				Latitude observ.			
1786	10 août	1h	50'	28"	5s	15°	19'	24"	1°	37'	35"	A
	20 sept.	22	58	19	5	11	2	37	0	32	9	B
	26	22	59	56	5	17	24	9	1	35	19	B

Des quatre dernieres l'une est de M. Hornsby, l'autre de M. Darquier, les deux dernieres de M. Maskelyne.

Observations de Mercure faites par différens astronomes aux environs des apsides, et des plus grandes digressions par lesquelles j'ai déterminé son excentricité. *Mém. acad.* 1786.

Années.	Temps moyen à Paris.				Longitude observée.				Latitude.			
1747	4 août	1h	43'	10"	5s	8°	57'	4"	1°	42'	1"	A
1767	30 juil.	1	50	36	5	4	15	34	1	29	34	A
	2 août	1	56	32	5	6	45	25				
1773	19 sept.	18	26	12	5	9	43	14				
	20	16	18	54	5	10	35	49				
1774	24 juil.	7	16	10	4	28	35	24				
1775	27 févr.	1	18	3	0	23	55	32	0	8	10	B
	3 mars	1	14	35	0	0	10	48	1	1	18	
	6	7	1	43	0	4	14	16				
	23 août	23	0	27	4	14	6	9				
	27	23	11	40	4	20	41	2				
1776	22 sept.	6	1	21	6	20	5	17	0	57	4	A
	23	6	21	9	6	21	32	50	1	4	25	A
1777	18 juil.	14	50	27	3	7	5	39	1	27	5	A
1778	1 sept.	1	34	30	6	15	35	3	1	51	43	A
	4	1	56	33	6	8	50	20				
	5	1	56	[illegible]	6	9	50	20				
	12 oct.	22	44	56	6	2	56	13	1	17	44	B
	. . . .	23	7	9	6	2	57	6				
1779	14 août	1	16	31	5	18	20	21	1	14	0	A
	. . . .	1	47	34	5	18	21	47				
	15	1	16	30	5	19	28	47	1	23	3	A
	. . . .	1	43	27	5	19	30	13				
	. . . .	2	6	40	5	19	30	52				
	16	1	16	17	5	20	34	17	1	33	7	A
	29 sept.	22	46	22	5	19	13	11	1	13	2	B
	1 oct.	22	46	43	5	21	19	8	1	31	40	
	2	23	9	51	5	22	32	11	1	39	4	B

Années.	Temps moyen à Paris.					Longitude observée.				Latitude.			
1779	3	oct.	23h	10′	48s	5s	23°	51′	33″				
	4		23	12	15	5	25	14	0				
1780	29	juil.	2	0	28	5	4	5	11				
	30	juil.	1	51	0	5	5	6	55	1°	1′	44″	A
	31		1	23	2	5	6	4	46	1	24	4	A
	12	sept.	22	53	18	5	3	18	3				
	. . . .		22	49	53	5	3	18	5				
	13		16	20	40	5	4	1	38	0	42	58	B
	15		22	55	13	5	6	41	56				
	16		16	25	19	5	7	39	43	1	15	53	B
1781	7	mars	1	3	46	0	1	46	14	0	17	30	B
	10		1	9	28	0	6	49	9	0	55	48	B
	13		1	12	49	0	11	13	3	1	35	12	B
	14		1	13	19	0	12	30	31	1	47	49	B
	15		1	13	24	0	13	41	11	2	0	31	B
	16		1	13	9	0	14	45	49	2	12	24	B
	17	juil.	2	4	40	4	21	32	14				
	31	août	23	8	50	4	22	6	21				
	12	oct.	0	49	57	7	2	56	43				
1783	26	sept.	1	32	[illegible]	6	27	34	51				
1785	28	août	1	41	[illegible]5	6	2	38	28	2	14	2	A
1786	28	juil.	1	40	14	5	29	6	55				
	5	août	2	1	31	5	9	48	54	0	45	41	A
	7		1	46	9	5	12	7	45	1	6	14	A
	8		1	32	9	5	13	13	36				
	. . . .		1	51	5	5	13	14	11	1	16	53	A
	9		1	30	28	5	14	17	6	1	27	6	
	10		2	25	34	5	15	21	1	1	37	43	
	11		1	41	59	5	16	17	46	1	48	44	
	. . . .		2	0	21	5	16	18	28	1	48	33	
	12		1	40	26	5	17	13	26	1	59	25	
	18	sept.	22	40	3	5	9	58	38				
	20		22	49	8	5	11	2	20	0	31	46	B
	21		22	48	19	5	11	47	35	0	45	40	B
	21		23	2	30	5	11	47	55	0	45	54	B
	22		23	2	12	5	12	41	20	0	58	21	B
	. . . .		22	33	19	5	12	40	22				
	. . . .		22	36	50	5	12	40	40				

Passages de Mercure sur le Soleil observés jusqu'à présent.

	Temps moyen à Paris.		Long. réd. à l'écl.	Lat. géoc. vraie.		
1631	6 nov.	19h 36′ 20″	7s 14° 41′ 35″	3′ 22″	B	*M. Cassini, p. 592.* *Phil. Trans. n. 386.*
	6 nov.	18 50 0	. . . . . .	4 28	B	*Mss. de M. de l'Isle.*
1651	2 nov.	13 2 30	7 10 26 29	12 0	A	*Astr. Br. p.* 312. dout.
1661	3 mai	4 48 28	1 13 33 27	4 30	B	*M. Cassini, p.* 587, 608.
1677	7 nov.	0 23 0	7 15 44 20	4 3	B	*M. Cassini, p.* 591.
1690	9 nov.	18 6 0	7 18 20 46	12 20	B	*M. Cassini, p.* 595, 608.
1697	2 nov.	17 42 0	7 11 33 50	10 42	A	*M. Cassini, p.* 598.
1723	9 nov.	5 16 0	7 16 47 20	6 0	B	*M. Cassini, p.* 601. *Phil. Trans. n.* 386.
1736	10 nov.	22 59 23	7 19 23 38	14 7	B	*Mém. Ac.* 1736.
1740	2 mai	10 36 37	1 12 43 19	14 59	B	*Phil. Trans. n.* 471.
1743	4 nov.	22 26 8	7 12 37 32	9 7	A	*Mém. Ac.* 1736.
1753	5 mai	18 29 50	1 15 48 0	2 25	A	*Mém.* 1754, *p.* 599.
1756	6 nov.	16 17 28	7 15 13 41	0 58,8	A	*Mém.* 1758, *p.* 154.
1769	9 nov.	10 7 7	7 17 50 49	7 39	B	*Mém.* 1772.
1782	12 nov.	3 48 43	7 20 26 41	15 53	B	*Mém.* 1782.
1786	3 mai	17 8 47	1 13 49 45	11 42	B	*Mém.* 1786.

Pour avoir égard aux deux aberrations du Soleil et de Mercure, il faut ôter des temps observés 6′ 34″ en novembre, et 6′ 43″ en mai, et ajouter 3″ aux longitudes; ou ajouter 1′ 43″ aux longitudes héliocentriques pour les passages du mois de novembre, et 53″ pour les passages du mois de mai, en conservant le temps de la conjonction observée, tel qu'il est ci-dessus. Pour les latitudes, il faut ajouter 4″6 dans les premiers, et ôter 3″ 3 pour les seconds, en supposant la latitude boréale; c'est le contraire, quand elle est australe, parcequ'elle est décroissante dans le nœud ascendant. Il n'y a que le passage de 1786 où les corrections soient faites.

OBSERVATIONS DE VÉNUS.

Anciennes observations, *Mém. de l'Acad.* 1785, *pag.* 250; *Cassini, pag.* 534, 539. Je les ai corrigées (705).

Années.		Temps moyen à Paris.		Long. observ.	
271 av. J. C.	11 oct.	16h 8′		5s 3° 36′	Dout.
127 de J. C.	11 oct.	14 50		5 1 18	
129	19 mai	14 15		0 11 37	D. lat. 1° 30′ A

Années.	Temps moyen à Paris.			Long. observ.	
132 de J. C.	8 mars	6^h	$0'$	$1^s\ 2^\circ 32''$	
134	17 fév.	14	30	9 12 58	D.
136	18 nov.	5	20	9 13 53	D.
	25 déc.	5	10	10 20 39	
138	15 déc.	14	50	7 7 34	
140	18 fév.	5	40	0 14 54	
	29 juil.	13	20	2 19 34	D.

De ces dix observations, il y en a cinq qui different entre elles de plus d'un degré; ainsi il est difficile de pouvoir les faire servir à la théorie de Vénus.

Conjonctions de Vénus au Soleil, rapportées par Cassini, pag. 561, mais dont plusieurs longitudes sont rectifiées; auxquelles j'ai ajouté celles de 1639, 1691, 1751.

Années.	T. vr. de la conjonction.				Longit. de Vénus.	Latit. géocent.
1639	4 déc.	6	$18'\frac{1}{3}$	inf.	$8^s\ 12^\circ 32'\ 15''$	$0^h\ 9'\ 5''$ A
1689	25 juin	13	46	inf.	3 4 54 24	3 1 40 B
1691	15 nov.	11	4	sup.	*par la Hire.*	*Anc. Mém. t. X, p. 25.*
1692	3 sept.	19	7	inf.	5 12 33 0	
1693	25 juin	17	38	sup.	3 5 5 35	$17^h\ 30'\frac{1}{2}$ *suiv. la Hire.*
1696	1 sept.	0	58	sup.	5 9 52 55	1 21 20 B
1698	15 avr.	22	2	sup.	0 26 50 40	
1699	30 janv.	7	6	inf.	10 11 17 18	7 36 0 B
1699	13 nov.	12	0	sup.	7 21 24 0	0 32 20 B
1700	2 sept.	11	20	inf.	5 10 20 47	8 40 15 A
1705	21 juin	22	0	inf.	3 0 35 26	2 25 10 A
1706	14 avr.	9	45	sup.	0 24 26 30	1 3 10 A
1707	28 janv.	18	20	inf.	10 8 46 17	
1708	31 août	0	30	inf.	5 8 1 56	
1709	22 juin	6	0	sup.	3 0 56 30	
1710	10 avr.	18	7	inf.	0 20 54 6	
1711	27 janv.	12	52	sup.	10 7 33 51	
1712	28 août	14	53	sup.	5 5 43 34	
1713	19 juin	15	15	inf.	2 28 29 16	
1714	12 avr.	2	0	sup.	0 22 15 38	
1715	26 janv.	8	19	inf.	10 6 22 47	7 10 33 A
1716	28 août	16	36	inf.	5 5 50 48	8 34 9 A

Années.	Temps vr. de la conjonc.				Longit. de Vénus.				Latit. géocent.			
1718	8 avr.	10^h	13′	inf.	0ˢ	18°	40′	42″	6°	57′	22″	B
1719	10 nov.	9	17	inf.	7	17	55	31	4	6	18	B
1729	14 juin	23	56	inf.	2	24	11	16	1	26	53	A
1737	12 juin	15	43	inf.	2	22	0	30	1	8	12	A
1751	31 oct.	11	$47\frac{2}{3}$	inf.	7	8	13	0	5	23	1	A

Conjonctions inférieures que j'ai calculées avec soin pour la théorie de Vénus, *Mém. de l'Ac.* 1785, *p.* 264.

Années.	Temps moyen de la conjonc. vraie.				Longit. vraie en conj. comptée de l'équin. moyen.				Latitude observée.			
1761	5 juin	17^h	44′	34″	2ˢ	15°	36′	31″	0°	9′	30″	A
1766	25 mars	6	13	12	0	5	6	32				
1769	3 juin	10	7	54	2	13	27	8	0	10	16, 4	B
1774	22 mars	21	11	58	0	2	49	18	8	16	24	B
1775	24 oct.	2	25	13	7	1	1	20	6	14	25	A
1777	1 juin	2	32	53	2	11	17	13	0	30	16	B
1779	6 janv.	14	5	53	9	16	44	8	4	52	36	B
1780	9 août	20	39	54	4	18	11	33				
1782	20 mars	12	21	9	6	0	32	16	8	23	30	B
1783	21 oct.	15	34	15	6	28	37	57	6	30	28	A
1785	29 mai	19	2	6	8	9	9	9				
1787	4 janv.	2	26	50	9	14	15	39	4	31	40	B
1788	7 août	12	34	4	4	16	0	51	7	31	23	A

Pour les conjonctions inférieures, jusqu'à 1751, il faut ajouter 29″ aux longitudes, si l'on veut tenir compte des deux aberrations du Soleil et de Vénus, et l'on aura le lieu vrai pour le temps de la conjonction apparente. Dans les conjonctions supérieures, il faut ajouter 1′16″. Les 12 dernieres sont des conjonctions vraies, c'est-à-dire, dégagées de l'aberration et de la nutation. On trouvera un grand nombre d'observations de Vénus par M. d'Agelet, dans les supplémens à la seconde édition de cette Astronomie. Mais je ne rapporte ici que les conjonctions inférieures, qui sont les observations les plus importantes. (*Mém. acad.* 1779, *pag.* 452.)

OBSERVATIONS DE MARS.

Années.	Temps moyen à Paris.			Long. géoc. obs.				Latitude.
271 av. J. C.	17 janv.	15h	0'	7s	1°	41'		
130 apr. J.C.	14 déc.	11	8	2	22	1		(Ces longitudes sont corrigées (765).)
135	21 fév.	7	8	4	29	53		
139	27 mai	8	8	8	3	38		
139	30 mai	7	8	8	2	40		
1580	28 nov.	0	49	2	6	28	35"	1° 40' B *Kepler de S. M.*, *p.* 90.
1583	7 janv.	3	16	3	16	55	30	4 6 B
1585	9 fév.	18	32	4	21	36	10	4 32 10 B
1587	16 mars	6	41	5	25	43	0	3 41 B
Suivant M. de Lambre.		9	27¼	5	25	42	27	
1589	24 avr.	5	41	7	4	23	0	1 12 45 B
1591	18 juin	7	1	8	26	43	0	4 0 A
1593	4 sept.	16	45	11	12	16	0	6 2 30 A
Selon mon calcul,		14	32	11	12	17	56	
1595	9 nov.	23	57	1	17	31	40	0 8 B
Suivant M. Cassini,		22	8	1	17	32	48	*El. d'Ast p.* 489.
1597	23 déc.	15	12	3	2	28	0	3 33 B
1600	28 janv.	13	20	4	8	38	0	4 30 50 B
1602	2 mars	13	31	6	12	27	0	4 10 B
1604	7 avr.	15	41	6	18	37	10	2 26 B
1608	3 août	1	18	10	11	10	0	*Ast. Dan. p.* 342.
1610	18 oct.	16	8	0	25	30	0	*Ibid.*

Voyez Képler, *de stella Martis*, *p.* 90; Longomontanus, *Astr. Danica*, *p.* 342; Boulliaud, *Astr. Phil.*, *p.* 287; Riccioli, *Astr. reform.*, *p.* 316; Cassini, *pag.* 467.

Oppositions de Mars rapportées dans les tables de Halley.

Dans l'espace de 32 ans on a quinze oppositions dans toutes les parties de l'orbite.

Années.	Temps moy. à Paris.			Long. hélioc. réd. à l'écliptique.				Anom. moyenne de Mars.	
1659	1 déc.	11h	42'	2s	9°	51'	2"	8s	29°
1662	9 janv.	6	9	3	19	52	14	10	13
1666	18 mars	12	15	5	28	39	49	1	4

Années.	Temps moy. à Paris.				Long. hélioc. réd. à l'écliptique.				Anom. moyenne de Mars.	
1670	21	juin	15^h	47′	9^s	0°	46′	42″	4^s	10°
1672	8	sept.	11	33	11	16	56	4	6	14
1674	12	nov.	17	1	1	21	11	32	8	11
1676	25	déc.	19	14	3	5	29	55	9	26
1679	30	janv.	14	59	4	11	27	59	11	8
1681	4	mars	16	27	5	15	16	16	0	18
1683	10	avr.	23	40	6	21	39	18	2	0
1685	28	mai	1	9	8	7	38	15	3	18
1687	8	août	1	9	10	15	56	5	5	18
1689	21	oct.	17	29	0	29	28	52	7	20
1691	11	déc.	3	15	2	19	53	50	9	9
1694	17	janv.	4	56	3	28	11	52	10	22
1696	20	fév.	9	9	5	2	18	4	0	3
1698	26	mars	18	29	6	7	4	17	1	13
1700	8	mai	7	49	7	18	5	16	2	28
1702	8	juil.	12	59	9	16	10	10	4	23
1704	26	sept.	10	3	0	3	45	46	6	28
1711	8	fév.	5	31	4	19	24	6	11	16
1713	13	mars	13	3	5	23	20	30	0	27
1717	11	juin	9	29	8	20	38	46	4	0

Oppositions observées à Paris, rapportées par Cassini.

Années.	Temps moy. à Paris.				Long. hélioc. réd. à l'écliptique.				
1683	11	avr.	0^h	11′	6^s	21°	41′	30″	Cassini, *p.* 465.
1687	8	août	0	0	10	15	54	0	6° 50′ 40″ A. *p.* 449.
1691	11	déc.	3	8	2	19	54	28	*Ibid. p.* 472.
1694	17	janv.	4	31	3	28	12	0	*Ibid. p.* 474.
1696	20	fév.	9	15	5	2	18	8	*Ibid. p.* 472.
1698	26	mars	18	0	6	7	4	18	*Ibid. p.* 474.
1700	8	mai	7	38	7	18	5	0	*Ibid. p.* 472.
1702	8	juil.	13	2½	9	16	10	23	*Ibid. p.* 474.
1709	4	janv.	5	54	3	14	18	25	*Ibid. p.* 469.
1713	13	mars	16	49½	5	23	30	30	*Ibid. p.* 470.
1715	21	avr.	10	58½	7	1	9	30	*Ibid. p.* 464.
1717	11	juin	9	10	8	20	37	15	*Ibid. p.* 465.
1730	5	avr.	7	7	6	15	43	36	*Ibid. p.* 465.

Oppositions

Oppositions observées à Paris depuis quelques années.

Années.		Temps moyen à Paris.	Longitude observ.	Latitude de Mars.
1741	12 janv.	8h 14′ 23″	3s 22° 49′ 16″	
1743	15 fév.	19 17 40	4 27 16 32	*Mém. acad.* 1755,
1745	21 mars	14 19 17	6 1 34 44	*pag.* 218.
1747	1 mai	7 3 0	7 10 55 59	
1749	26 juin	2 6 12	9 4 55 41	
1751	14 sept.	8 28 0	11 21 35 0	
1753	16 nov.	10 28 33	1 24 47 24	
1755	30 déc.	0 0 32	3 8 34 11	3° 42′ 58″ B
1758	2 fév.			
1760	7 mars	17 44 7	5 18 9 8	3 58 57 ½ B
1762	14 avril	7 40 56	6 24 46 43	1 56 8 B
1764	1 juin	1 2 10	8 11 22 24	2 20 8 A
1766	13 août	1 40 26	10 20 41 11	6 52 23 A
1768	25 oct.	19 35 44	1 3 25 35	1 27 29 A
1770	14 déc.	11 22 21	2 23 7 11	2 53 7 B
1773	20 janv.	6 12 45	4 1 7 4	4 25 20 B
1775	23 fév.	9 1 46	5 5 7 44	4 21 15 B
1777	29 mars	21 27 58	6 10 0 7	2 56 0 B
1779	11 mai	22 15 51	7 21 27 9	0 20 10 A
1781	12 juil.	6 53 10	9 20 37 21	5 52 2 A
1783	1 oct.	0 6 11	0 8 10 10	4 6 5 A
1785	27 nov.	6 10 0	2 5 59 17	1 38 5 B
1788	7 janv.	7 59 17	3 17 18 10	4 4 1 B

Depuis 1755, j'ai observé la plupart des oppositions de Mars, et je les ai calculées avec soin pour servir à la construction de mes Tables. Il n'y a que l'opposition du 2 février 1758 que le mauvais temps n'a pas permis d'observer à Paris.

Observations de Mars hors de ses oppositions.

Les trois premieres sont de la Caille, *Astr. fundam.* La derniere est de moi, et c'est le milieu entre plusieurs jours d'observations.

Années.		Temps vrai à Paris.	Longitude observ.	Latitude géocent.
1747	14 mai	10h 50′ 43″	7s 6° 15′ 20″	0° 0′ 25″ ½ B
1751	13 sept.	11 8 38	11 21 48 6	5 33 16 A
1753	3 nov.	9 31 46	1 29 29 38 ½	0 0 27 ½ A
1768	3 déc.	8 47 24	0 27 11 47	0 33 57 B
1786	24 fév.	6 21 58	2 12 5 27	*Mém. acad.* 1786.

OBSERVATIONS DE JUPITER.

Années.	Temps moy. à Paris.	Longit. observ.	
240 av. J. C.	3 sept. 13h 45′	3s 7° 6′	Ces observations rapportées dans Ptolémée sont corrigées (705).
133 apr. J. C.	17 mai 9 8	7 24 13	
136	31 août 8 8	11 8 57	
137	7 oct. 15 8	0 15 26	
139	10 juil. 15 8	2 16 49	

Oppositions calculées par M. de Lambre pour la construction de ses tables. *Mém. présentés, etc.* t. XII.

Années.	Temps moy. à Paris.	Long. hél. vr. comptée de l'équin. moyen.		Latit. hélioc.	Observateurs.
1690	26 sept. 8h 27′ 33″	0s 4° 5′ 51″		1° 19′ 22″ A	Flamsteed.
1691	2 nov. 13 30 50	1 10 52 6		1 5 40 A	Idem.
1692	déc. 22 49 6	2 16 24 53	::	0 27 47 A	
1694	9 janv. 3 47 42	3 20 0 13		0 17 42 B	
1695	9 févr. 15 8 54	4 21 42 10		0 55 46 B	
1696	11 mars 4 4 35	5 21 5 23		1 16 47 B	
1697	10 avril 17 38 45	6 21 59 48		1 17 5 B	
1698	12 mai 5 25 52	7 22 18 37	::	0 56 37 B	
1699	14 juin 9 21 0	8 23 50 35		0 18 48 B	
1700	19 juil. 15 49 30	9 27 15 7	:	0 26 31 A	
1701	25 août 19 54 43	11 2 42 26		1 5 1 A	
1702	2 oct. 16 44 39	0 9 27 51		1 18 58 A	
1704	12 déc. 18 54 19	2 21 25 26		0 21 46 A	
1706	14 janv. 15 26 52	3 24 39 41	:	0 23 9 B	
1707	14 févr. 21 31 29	4 26 5 57		0 59 33 B	
1708	16 mars 9 23 31	5 26 22 16		1 17 45 B	
1709	16 avril 0 38 30	6 26 17 13	::	1 14 30: B	
1710	17 mai 17 59 7	7 26 45 16	.	0 51 38 B	
1711	20 juin 5 47 32	8 28 34 12		0 12 12 B	
1712	24 juil. 21 40 22	10 2 21 21	::	0 33 26 B	
1713	31 août 5 35 0	11 8 2 26		1 9 19 A	
1714	8 oct. 1 41 38	0 14 51 51		1 18 31 A	
1715	13 nov. 19 47 47	1 21 22 22		0 57 4 A	
1716	17 déc. 12 35 37	2 26 20 28		0 15 1 A	
1718	19 janv. 3 2 41	3 29 18 32		0 29 30 B	
1719	19 févr. 4 41 26	5 0 31 4		1 3 21 B	Flamsteed.

Années.	Temps moy. à Paris.	Long. hél. vr. comptée de l'équin. moyen.	Latit. hélioc.	Observateurs.
1734	27 mai 0h 1′ 0″	8s 5° 49′ 33″	0° 42′ 12″ B	M. le Monnier.
1735	30 juin 2 16 29	9 8 9 24	0 0 32 A	
1737	10 sept. 19 19 42	11 18 30 16	1 14 41 A	
1738	18 oct. 10 16 38	0 25 20 5 ::	1 15 5 A	
1739	23 nov. 15 39 33	2 1 29 5	0 46 35 A	
1745	29 avril 4 44 31	7 9 22 26	1 7 33 B	
1746	31 mai 12 42 0	8 10 15 42	0 36 52 B	
1749	15 sept. 20 49 47	11 23 32 30	1 16 23 A	La Caille.
1761	21 sept. 5 26 40	11 28 52 49	1 18 2 A	
1762	28 oct. 16 24 27	1 5 45 22	1 9 45 A	M. Darquier.
1763	3 déc. 10 34 10	2 11 35 31	0 35 19 A	
1765	4 janv. 23 24 59	3 15 30 7	0 10 2 B	
1766	5 févr. 15 49 2	4 17 27 30	0 50 6 B	M. Maskelyne.
1767	8 mars 6 29 55	5 17 59 45	1 14 12 B	
1768	6 avril 18 7 9	6 17 55 6	1 17 49 B	
1769	8 mai 0 43 0	7 18 6 29	1 0 34 B	M. Maskelyne.
1770	9 juin 21 46 56	8 19 25 7	0 25 31 B	
1771	14 juil. 20 40 17	9 22 31 46	0 19 35 A	
1772	19 août 18 46 35	10 27 40 28	1 0 0 A	
1773	26 sept. 15 13 24	0 4 17 1	1 18 44 A	
1774	2 nov. 21 17 52	1 11 3 45	1 6 16 A	
1775	8 déc. 7 11 27	2 16 37 11	0 28 53 A	
1777	9 janv. 12 19 51	3 20 12 45	0 16 30 A	
1778	9 févr. 23 19 16	4 21 54 44	0 54 34 A	
1779	12 mars 12 20 48	5 22 18 57	1 15 59 B	
1780	11 avril 1 30 40	6 22 14 7	1 16 29 B	
1782	14 juin 17 12 16	8 24 6 40	0 19 15 B	
1783	19 juil. 23 52 30	9 27 31 13	0 26 14 A	
1784	25 août 2 3 38	11 2 53 34	1 4 16 A	
1785	1 oct. 21 45 10	0 9 34 3	1 18 47 A	
1786	7 nov. 21 50 28	1 16 11 53	1 2 12 A	M. de Lambre.
1787	12 déc. 23 30 32	2 21 28 16	0 22 44 A	

Les longitudes suivantes ne sont pas des oppositions, mais peu s'en faut, et elles ne méritent pas moins de confiance.

1749	2 oct. 10 44 0	11 25 3 34		La Caille.
1751	30 nov. 11 40 0	2 6 13 34	0 40 56 A	M. le Monnier.
1753	17 janv. 10 47 0 ::	3 8 30 48 } 31 3 }		Idem.

Années.	Temps moyen à Paris.	Long. hél. vr. comptée de l'équin. moyen.	Lat. hélioc.	Observateurs.
1754	7 févr. 11ʰ 48′ 0″ :	4ˢ 13° 29′ 34″		M. le Monnier.
1755	25 févr. 12 43 0	5 13 12 54	1° 11′ 38″ B	
1756	2 avril 12 12 0	6 13 40 39	1 18 54 B	
1757	29 avril 12 14 0	7 13 26 43	1 4 19 B	
1757	4 mai 11 59 0	7 13 44 54	1 4 10 B	
1759	9 juil. 12 6 0	9 17 38 57	0 13 6 A	

Quadratures de Jupiter tirées des observations de M. Maskelyne et calculées par M. de Lambre.

Années.	Temps moyen à Paris.	Anomalie moyenne.	Latit. géocent. vraie.
1768	22 janv. 17ʰ 26′ 12″	0ˢ 1° 47′ 46″	6ˢ 22° 28′ 36″
1774	9 août 17 46 16	6 20 27 27	1 15 5 8
1776	15 oct. 18 12 0	8 26 45 43	3 24 9 25
1776	17 oct. 18 5 12	8 26 55 40	3 24 19 21
1780	11 juil. 5 58 7	0 20 7 59	6 18 22 47
1782	10 sept. 6 7 0	2 25 51 17	8 20 10 40
1783	18 avril 18 33 6	3 14 10 35	10 0 54 20
1785	28 déc. 6 3 35	6 5 58 23	0 6 7 31

On trouve des suites d'oppositions dans les Elémens de Cassini et dans les Tables de Halley; dans les Mémoires de l'Académie, 1754 et 1763 : mais il y en avoit beaucoup de défectueuses, et je n'ai rapporté ici que celles dont M. de Lambre a pu refaire les calculs. Il a tenu compte par-tout de l'aberration du Soleil, de celle de la planete et de l'inégalité de la précession : il a marqué de deux points celles où il peut y avoir 30″ d'incertitude, et de quatre points celles où l'incertitude est encore plus forte.

OBSERVATIONS DE SATURNE.

Années.	Temps moyen à Paris.	Long. obs.	Lieu du soleil.	Latit.
228 av. J. C.	1 mars 4ʰ 23′	5ˢ 9° 6′	11ˢ 7° 26′	2° 45′ B
127 apr. J. C.	26 mars 4 14	6 2 14	0 3 53	
133	3 juin 2 8	8 10 42	2 10 33	
136	7 juil. 22 9	9 15 17	3 14 5	
138	22 déc. 6 11	10 10 19	9 0 20	

Ces longitudes tirées de l'Almageste sont corrigées (705)

Oppositions calculées par M. de Lambre pour la construction de ses Tables.

Années.	Temps moyen à Paris.	Long. hél. vr. comptée de l'équin. moyen.	Latit. hélioc.	Observateurs.
1690	5 mai 6h 28′ 6″	7s 15° 32′ 17″	2 16′ 29″ B	Flamsteed.
1691	17 mai 13 6 0	7 27 7 48	2 1 25 B	
1692	28 mai 16 55 46	8 8 33 42	1 41 14 B	
1693	9 juin 19 10 46	8 19 53 33	1 17 36 B	
1694	21 juin 20 51 10	9 1 10 21	0 51 12 B	
1695	3 juil. 22 46 8	9 12 27 34 :	0 22 28 B	
1696	15 juil. 2 43 39	9 23 49 55	0 7 18 A	
1697	27 juil. 9 2 20	10 5 19 17	0 36 43 A	
1698	8 août 18 22 6	10 16 57 47	1 5 13 A	
1699	21 août 8 7 14	10 28 50 14	1 31 30 A	
1700	3 sept. 2 41 29	11 10 58 10	1 54 47 A	
1701	16 sept. 2 27 42	11 23 23 39	2 12 32 A	
1702	29 sept. 7 49 9	0 6 8 8	2 24 40 A	
1703	12 oct. 18 38 55	0 19 12 1	2 29 52 A	
1704	25 oct. 11 51 45	1 2 37 21 :	2 26 55 A	
1705	8 nov. 9 0 0	1 16 18 45	2 15 42 A	
1706	22 nov. 10 42 25	2 0 16 28	1 56 29 A	
1707	[illegible] déc. 14 34 50	2 14 24 1	1 29 57 A	
1708	9 déc. 19 6 0	2 28 35 57	0 57 32 A	
1710	2 janv. 23 37 16	3 12 48 37	0 21 35 A	
1711	17 janv. 1 27 35	3 26 54 8 ::	0 14 44 B	
1712	31 janv. 0 37 40	4 10 50 40	0 50 42 B	
1713	12 févr. 19 5 50	4 24 31 34	1 22 32 B	
1714	26 févr. 8 15 55	5 7 54 55	1 49 8 B	
1715	11 mars 16 32 27	5 21 0 26	2 9 48 B	
1716	23 mars 19 5 40	6 3 46 4	2 22 55 B	
1717	5 avril 16 30 15	6 16 13 39 :	2 29 23 B	
1718	18 avril 8 47 0	6 28 23 17 :	2 28 50 B	
1719	30 avril 20 23 21	7 10 16 56	2 21 33 B	
1736	29 nov. 14 11 56	2 8 14 32	1 42 53 A	M. Le Monnier.
1737	13 déc. 19 2 10	2 22 26 12	1 12 28 A	
1738	28 déc. 0 28 20	3 6 41 11	0 38 31 A	
1740	11 janv. 4 18 7	3 20 52 18	0 1 20 A	
1741	24 janv. 5 13 31	4 4 54 49 :	0 35 4 B	M. Le Monnier.

Années.	Temps moyen à Paris.		Long. hél. vr. comptée de l'équin. moyen.	Latitude héliocent.		Observateurs.
1744	5 mars	5h 6′ 32″	5s 15° 30′ 54″	2° 1′ 38″	B	
1745	18 mars	10 24 41	5 28 26 14	2 18 14	B	
1746	31 mars	10 35 7	6 11 3 17	2 27 41	B	
1747	13 avril	5 33 19	6 23 21 57	2 29 48	B	La Caille.
1748	24 avril	19 53 26	7 5 24 7	2 25 34	B	
1749	7 mai	6 6 0	7 17 11 57	2 15 15	B	
1751	31 mai	17 13 35	8 10 14 43	. . . .		
1752	11 juin	19 50 0	8 21 35 15	1 14 59	B	
1753	23 juin	22 10 38	9 2 53 31	0 48 3	B	
1755	18 juil.	5 4 31	9 25 35 46	0 10 40	A	
1756	29 juil.	11 49 3	10 7 6 3	0 40 5	A	Cassini.
1757	10 août	22 6	10 18 46 55	1 8 28	A	
1759	5 sept.	7 23 39	11 12 50 34	1 57 2	A	Jeaurat.
1760	17 sept.	7 55 17	11 25 18 9	2 14 28	A	La Caille.
1761	30 sept.	13 48 57	0 8 4 28	2 25 41	A	
1762	14 oct.	1 16 55	0 21 9 53	2 29 26	A	Darquier.
1764	9 nov.	15 36 32	1 18 17 23	2 13 35	A	
1765	23 nov.	16 44 28	2 2 14 7	1 53 42	A	M. Maskelyne.
1766	7 déc.	20 11 38	2 16 20 50	1 26 37	A	
1767	22 déc.	0 37 29	3 0 32 24	0 54 2	A	
1769	4 janv.	4 26 10	3 14 43 23	0 18 14	A	
1770	18 janv.	5 59 20	3 28 48 10	0 18 31	B	
1771	1 févr.	4 12 13	4 12 42 3	0 53 40	B	
1772	14 févr.	22 3 56	4 26 21 22	1 25 15	B	
1773	27 févr.	10 49 21	5 9 43 23	1 51 26	B	
1774	12 mars	18 22 40	5 22 46 37	2 11 14	B	
1775	25 mars	20 35 20	6 5 31 0	2 23 48	B	
1776	6 avril	17 25 38	6 17 57 3	2 29 37	B	
1777	19 avril	9 28 50	7 0 6 4	2 28 21	B	
1778	1 mai	21 23 51	7 12 0 6	2 20 37	B	
1779	14 mai	5 38 36	7 23 41 9	2 7 19	B	
1780	25 mai	11 13 59	8 5 12 18	1 48 48	B	
1781	6 juin	14 47 21	8 16 36 12	1 26 48 : / 33 :	B	Bugge.
1782	18 juin	17 21 3	8 27 56 0	1 0 41	B	M. Maskelyne.
1783	30 juin	20 4 50	9 9 15 4	0 32 40	B	
1784	11 juil.	23 41 56	9 20 36 21	0 3 20	B	
1785	24 juil.	5 38 24	10 2 3 59	0 26 18 :	A	
1786	5 août	14 25 35	10 13 40 23	0 55 26 :	A	De Lambre.
1787	18 août	2 43 47	10 25 28 15	1 22 57	A	

Quadratures observées par M. Maskelyne.

Années.		Temps moyen à Paris.			Anomal. moyen.				Longit. géocentr.			
1767	29 sept.	17^h	50′	48″	5ˢ	29°	11′	11″	3ˢ	3°	47′	4″
1768	17 mars	6	14	56	6	4	51	21	2	27	25	23
1774	29 déc.	18	9	37	8	27	45	11	6	8	33	58
1777	17 juil.	6	9	32	9	28	52	30	6	26	58	29
1783	27 sept.	6	10	36	0	14	33	58	9	6	12	0

On trouve, dans les tables de Halley et dans les élémens de Cassini, des suites d'oppositions de Saturne. M. le Gentil avoit calculé les suivantes (Mém. 1754.), M. le Monnier et moi en avions calculé plusieurs : mais je n'ai conservé ici que celles dont M. de Lambre a discuté les observations en 1788; le travail de cet habile astronome étant de beaucoup supérieur à tout ce qu'on avoit fait auparavant.

OBSERVATIONS DE HERSCHEL,

Planete découverte en 1781 (1160).

Oppositions avec le lieu apparent du Soleil, compté de l'équinoxe moyen.

Années.		Temps m. à Paris.		Longitude.				Latitude géocentr.			Observateurs.
1781	20 déc.	18^h	3′	3ˢ	0°	52′	17″	0°	15′	10″	M. Méchain.
1782	26 déc.	9	19	3	5	20	30	0	18	20	M. Méchain.
1783	31 déc.	0	35	3	9	50	36	0	22	6	
1785	3 janv.	17	59	3	14	23	0	0	25	34	M. Méchain.
		17	46	3	14	22	32	0	25	57	M. Mallet.
1786	8 janv.	10	50	3	18	56	34	0	29	2	M. Mallet.
		11	43	3	18	56	34	0	28	51	P. Fixlmillner.
1787	13 janv.	5	10	3	23	32	37	0	31	54	La Lande.
1788	17 janv.	23	57	3	28	16	57	0	33	35	M. Darquier.
	18	0	2	3	28	10	24				M. Triesnecker.

Cette planete fut observée en 1756 comme une étoile par Mayer, et placée au n°. 964 de son catalogue, avec 348° d'ascension droite, et 6° 2′ de déclinaison. La longitude calculée pour le 25 septembre $10^h 31'$, temps moyen de Paris, se trouve 11ˢ 16° 37′ 44″; la latitude 48′ 23″ A.

Observations vers les quadratures propres à vérifier la distance au Soleil (1215).

Elles sont de M. Maskelyne, et par conséquent de la plus grande exactitude.

Années.	Temps moy. à Paris.				Longitude observée.				Latitudes.	
1781	25 avril	9h	47′	0″	2s	25°	39′	17″	11′	36″
	28 sept.	17	48	31	3	2	50	39	13	31
	8 oct.	17	9	23	3	2	54	44	13	56
1782	7 mars	7	1	47	2	28	49	37	15	6
	16 mars	6	26	36	2	28	52	16	15	2
	26 mars	10	9		2	29	0	29	15	5
	23 sept.	15	48		3	7	13	39	16	47
	30 sept.	18	1		3	7	19	26	16	52
1783	10 mars	7	10	24	4	3	17	43	18	31
	11 oct.	17	38	25	3	11	52	37	20	22
1784	23 mars	6	36	1	3	7	49	22	21	45
	15 oct.	17	39	18	3	16	24	55	23	45
1785	28 mars	6	36	59	3	12	21	21	25	7
	26 oct.	17	26	38	3	20	59	46	27	3
1788	8 mars	8	54	33	3	26	22	24	34	28
	21	8	2	34	3	26	9	58	34	11
	2 nov.	17	36	53	4	4	52	3	35	15

La derniere observation est de moi, et tient le milieu entre plusieurs jours d'observations.

M. Fixlmillner, M. Zach, M. Bode, M. Wurm, M. Oriani, M. de Caluso croient que la trente-quatrieme étoile du Taureau, dans Flamsteed, est aussi la même planete; le 23 décembre 1690, à 9h 41′, temps vrai à Paris, longitude 1s 28° 2′ 50″, latitude 10′ 34″ A. (*Eph. de Berlin*, 1788.); mais il y a du doute sur cette identité (*Mém. de l'Ac.* 1787).

LIVRE VII.

LIVRE SEPTIEME.

De la Lune.

1400. LA LUNE est après le Soleil le plus remarquable de tous les astres : nous n'avons parlé dans le premier livre que des apparences les plus simples de son mouvement (55); nous allons en suivre les circonstances, et en donner l'explication détaillée.

Les premiers phénomenes que les hommes apperçurent dans le mouvement de la Lune, furent les changemens de figure que nous appelons ses *Phases*, et dont nous avons déja donné quelque idée (56). Après avoir disparu pendant quelques jours, la Lune commence à se montrer le soir du côté de l'occident, peu après le coucher du Soleil, sous la forme d'un filet de lumiere en forme d'arc, et qu'on appelle *Croissant* parcequ'en effet il croît d'un jour à l'autre. Sa lumiere est foible, parcequ'elle est diminuée par l'éclat du crépuscule. Hévélius n'a jamais observé la Lune plutôt que 40^h après sa conjonction, ou plus tard que 27^h avant (*Selenog. p.* 276, 408). Il ajoute que si la Lune dans le premier cas avoit eu une déclinaison plus septentrionale, étant au nord de l'écliptique, et qu'elle eût été en même temps périgée et dans les signes ascendans, on auroit pu la voir 24^h après la conjonction : mais l'assemblage de ces trois circonstances est rare; on n'apperçoit guere la Lune que le deuxieme jour après sa conjonction, quoique Képler ait dit qu'on pouvoit voir la Lune, même en conjonction, lorsque sa latitude est de 5° (*Astr. Pars Opt. cap.* 6, *pag.* 257).

Les pointes du croissant sont élevées et tournées à l'opposite du Soleil, c'est-à-dire à l'orient si le Soleil est à l'occident; il est un peu plus fort le lendemain, et dans l'espace de cinq à six jours il prend la forme d'un demi-cercle : la partie lumineuse est alors terminée par une ligne droite, et nous disons que la Lune est *dichotome* [a] ou qu'elle est en quadrature, c'est son PREMIER QUARTIER.

Après avoir paru sous la forme d'un demi-cercle lumineux, la Lune continue de s'éloigner du Soleil; elle devient une espece d'ovale et augmente en lumiere pendant 7 à 8 jours; elle paroît alors

(a) Διχότομος, *dimidiatus; δίχα, bis; τέμνω, seco.* Copernic se sert du mot *Luna dividua.*

tout-à-fait circulaire; son disque entier et lumineux brille pendant toute la nuit, et c'est le jour de la PLEINE LUNE, ou de l'opposition: on la voit passer au méridien à minuit, et se coucher dès que le Soleil se leve; tout annonce alors qu'elle est directement opposée au Soleil par rapport à nous, et qu'elle brille parceque le Soleil l'éclaire en face et non pas de côté.

Après la pleine Lune, arrive le décours, qui donne les mêmes phases et les mêmes figures que nous venons d'indiquer en parlant de l'accroissement de la Lune; elle est d'abord ovale, puis *dichotome* ou sous la forme d'un demi-cercle, et c'est le DERNIER QUARTIER.

Le demi-cercle de lumiere diminue ensuite, et prend la forme d'un croissant qui devient chaque jour plus étroit, et dont les cornes sont toujours élevées, et du côté le plus éloigné du Soleil; la Lune alors se trouve avoir fait le tour du ciel; on la voit se lever le matin un peu avant le Soleil, dans la même forme qu'elle avoit le premier jour de l'observation; elle se rapproche du Soleil et se perd enfin dans ses rayons; c'est ce qu'on appelle la NOUVELLE LUNE, ou la conjonction, autrefois la néoménie. (a)

1401. La mesure la plus naturelle du temps fut celle que présentoient ces phases de la Lune; cet astre, en changeant tous les jours d'une maniere sensible le lieu de son lever et de son coucher, en variant sans cesse sa figure, et recommençant ensuite un nouvel ordre de changemens tous semblables, offroit une regle publique et des nombres faciles, sans le secours de l'écriture, des calculs, des dates, des almanacs; les peuples trouvoient dans le ciel un avertissement perpétuel de ce qu'ils avoient à faire; les familles nouvellement formées, et dispersées dans les campagnes, se réunissoient sans méprise au terme convenu de quelque phase de la Lune.

LA NÉOMÉNIE servit à régler les assemblées, les sacrifices, les exercices publics; ce culte et ces fêtes n'avoient pas la Lune pour objet, mais pour indication. On comptoit la Lune du jour qu'on commençoit à l'appercevoir. Pour la découvrir aisément, on s'assembloit le soir sur les hauteurs; quand le croissant avoit été vu, on célébroit la néoménie, ou le sacrifice du nouveau mois, qui étoit suivi de fêtes et de repas. Les nouvelles Lunes qui concouroient avec le renouvellement des quatre saisons, étoient les plus solemnelles; il semble qu'on y trouve l'origine de nos quatre temps, comme on

(a) Νέος, *novus*; Μήνη, *Luna*; μὴν, *mensis*; d'où l'on a tiré ménisque, dans l'optique (2304.).

trouve celle de la plupart de nos fêtes dans les cérémonies des anciens (*Casali, de comparatione rituum Christ. et Pagan.*).

1402. On retrouve dans les histoires de tous les peuples du monde cette coutume de se réunir sur les hauts lieux ou dans les déserts, d'observer la nouvelle phase, de célébrer la néoménie par des sacrifices ou des prieres ; la solemnité particuliere de la nouvelle Lune qui concouroit avec les semailles, et celle qui suivoit l'entiere récolte des productions de la terre, se trouvent dans toutes les histoires ; les fêtes et les sacrifices de la nouvelle Lune et du commencement de chaque mois sont rappellés en plusieurs endroits de l'Ecriture, comme un ancien usage (*Isaiae I*, 13. *Num. X*, 10. XXVIII, 11. *Reg. I*, 9, *v.* 12, et 20, *v.* 5). Spencer a fait une dissertation pour prouver que les Juifs avoient reçu des Païens cet ancien usage ; il cite à ce sujet un grand nombre d'auteurs. (Jo. Spencer, *de legibus Hebraeorum ritualibus. Lipsiae* 1605, *in*-4°, *l. III*, *c.* 1, *dissert.* 4, *pag.* 1043. Voy. l'Encyclopédie au mot *Néoménie*).

La nouvelle Lune étoit annoncée par le bruit des trompettes. (Judith VIII, 6. *Psalm.* 80, *v.* 4. Scaliger, *de emendatione temporum*, *l. III*, *pag.* 223, édit. de 1629). Horace fait mention de ces fêtes sous le nom de *tricesima sabbata, l. I, sat.* 9, *v.* 69, *Cœlo supinas si tuleris manus nascente lunâ*, *l. III*, *ode* 23. Les Juifs observent encore la Lune quand elle est nouvelle, et ils en font l'objet d'une cérémonie religieuse (*Buxtorfi Synagoga judaïca, Basileae*, *in*-8°, 1641, *c.* 17, *pag.* 336). De là l'usage de sacrifier sur les montagnes où on alloit pour observer la nouvelle Lune. Cet usage étoit déja dans l'Egypte (*Maimonid*, ou *Mossei*, *Dux dubitantium*, *l. III*, *c.* 46), aussi bien que celui de sacrifier dans les nouvelles Lunes (*ibid. c.* 47).

La fête de la nouvelle Lune avoit lieu chez les Ethiopiens d'Afrique (*Itinerarium Alexandri Geraldini, Romae* 1631, *l. IX, pag.* 150) ; chez les Sabéens de l'Arabie heureuse (*Hottinger, historia orientalis*, *l. I*, *c.* 8, *pag.* 279, *ed. in*-4°, 1660) ; chez les Perses (*Halcuit's Voyages*, *tom. II*, *pag.* 399) ; chez les Grecs, comme le prouve fort au long Jean Meursius, *Graecia feriata*, *Lugd. Batav.* 1619, *in*-4°, *pag.* 210, au mot Νεομηνία. Les Olympiades établies par Iphitus commençoient à la nouvelle Lune (Samuël Petit, *Leges Atticae, in-fol.* 1635, *pag.* 59). Les Romains avoient aussi cette fête (Macrobe, *Saturn. l. I*, 15, *pag.* 181, *ed. de* 1694. Pline, *l. XVI*, à la fin). La cérémonie du gui chez les Gaulois se faisoit à la nouvelle Lune, et le Druide portoit un croissant comme on le voit dans les figures anciennes (Pelloutier, Hist. des Celtes). On a trouvé cet usage chez les Chinois (Scaliger, *pag.* 118) ; parmi les Caraïbes de

l'Amérique (*Huetii Demonstratio evangelica*, 1679, *in-fol. pag.* 84); chez les Péruviens (Garcilasso de la Vega, *Commentarios réales de los incas*, *VII*, 5 et 7. Goguet, I, 219, *in*-4°); dans l'isle de Taïti (Voyage de Cook en 1773). Il étoit également chez les Turcs (*Geuffraus de Turcarum religione*, *l.* 2, *pag.* 53).

1403. Il se passe 29 jours et demi d'une nouvelle Lune à l'autre; c'est une observation facile, et les premiers pasteurs ne manquerent pas de la faire; c'est ce qu'on appelle *mois lunaire*, Lunaison, ou révolution synodique de la Lune: nous en verrons bientôt une détermination rigoureuse (1422). Cette lunaison fut la plus ancienne mesure du temps (58, 253). On en composa des années lunaires (253, 1534, 1602).

1404. En observant avec attention les phases de la Lune, on dut remarquer naturellement que les éclipses de Soleil qui paroissent au moins tous les 2 à 3 ans, arrivent entre le dernier croissant d'un cours de Lune fini et la premiere phase d'une nouvelle Lune, c'est-à-dire, entre le temps où la Lune s'approche le plus du Soleil, et celui où elle commence à s'en éloigner par le côté opposé : on apperçoit alors sur le Soleil un corps rond et parfaitement noir; on le voit se glisser peu à peu devant le disque du Soleil et en intercepter la lumiere, du moins en partie; quelquefois se placer dans le milieu de son disque, et y paroître environné d'une couronne de lumiere; d'autres fois enfin le couvrir en entier et nous plonger dans les ténebres, comme on l'a vu à Paris en 1724 (art. 1775).

Les premiers observateurs comprirent bientôt que ce corps obscur ne pouvoit être autre chose que celui de la Lune, qu'on avoit vu les jours précédens s'avancer de plus en plus vers le Soleil, et qu'on voyoit ensuite un ou deux jours après de l'autre côté ou à l'orient du Soleil, s'en éloignant avec la même vîtesse.

La Lune, après avoir intercepté la lumiere du Soleil en plein jour, paroissoit absolument noire et opaque : on comprit par-là qu'elle ne brilloit qu'autant qu'elle étoit éclairée, et que le côté qu'elle tournoit vers nous dans le temps d'une éclipse du Soleil ne pouvant recevoir aucune lumiere du Soleil, ne nous en rendoit aucune. C'est ainsi que les premiers observateurs virent que la Lune étoit un globe opaque et massif qui n'avoit pas de lumiere par lui-même, et qui n'étoit lumineux que dans la partie éclairée par le Soleil; on voyoit d'ailleurs que la Lune n'étoit jamais plus lumineuse que quand elle étoit opposée au Soleil, de maniere à être vue de face, et à nous réfléchir toute la lumiere que le Soleil envoyoit sur sa surface ou sur

son disque; preuve qu'elle ne renvoyoit vers nous qu'une lumiere empruntée.

1405. Quatorze ou quinze jours après une éclipse de Soleil, il arrive quelquefois une éclipse de Lune. Avant qu'elle commence on voit la Lune pleine, ronde, lumineuse et opposée au Soleil (1400). Dans ces circonstances, s'il arrive une éclipse, on voit en peu de temps la Lune perdre cette grande lumiere et disparoître même pour quelque temps à nos yeux; on comprend que la Terre placée entre la Lune et le Soleil est l'obstacle qui empêche la Lune d'être alors éclairée par le Soleil.

La Lune est donc un corps opaque et qui n'a point de lumiere par lui-même : cela est démontré soit par les éclipses de Lune, soit par celles de Soleil (1404). Voyons donc de quelle maniere elle paroît lumineuse.

Le Soleil éclairant toujours la moitié du globe lunaire, nous ne pouvons voir la Lune pleine que quand nous appercevons cette moitié qui est éclairée, et que nous l'appercevons toute entiere; si nous sommes placés de côté, en sorte que nous ne puissions voir que la moitié de la partie éclairée, c'est-à-dire, de l'hémisphere exposé au Soleil, nous ne verrons que la moitié de ce qui paroissoit dans la pleine Lune : c'est-à-dire que nous ne verrons qu'un demi-cercle de lumiere, la Lune paroîtra en quartier; et ainsi des autres situations. Telle est la cause des phases de la Lune.

1406. Soit S le Soleil (*fig.* 80), T la Terre autour de laquelle tourne la Lune dans son orbite; E O le globe de la Lune placé entre la Terre et le Soleil, c'est-à-dire, en CONJONCTION, ou au temps de la nouvelle Lune; alors la partie E est seule éclairée du Soleil; au contraire la partie O est la seule visible pour nous qui sommes en T: ainsi *l'hémisphere éclairé* est précisément celui que nous ne voyons point, et *l'hémisphere visible* est celui qui n'est point éclairé du Soleil; telle est la cause qui rend alors la Lune invisible pour nous, vers le temps de la nouvelle Lune (1400).

Au contraire, quand la Lune est opposée au Soleil, l'hémisphere éclairé L est celui que nous voyons, parceque nous sommes placés du même côté que le flambeau dont elle est éclairée, et il n'y a rien de perdu pour nous de la lumiere que la Lune répand; c'est pourquoi elle nous paroît pleine, c'est-à-dire ronde et lumineuse, quand elle est en OPPOSITION.

Quand la Lune est éloignée de 90° du Soleil ou environ, c'est-à-dire à peu près à moitié chemin de O en L ou de la *conjonction* à l'*opposition*, l'hémisphere visible est AQZ; l'hémisphere éclairé par le

Soleil est MZQ : ainsi nous ne voyons que la moitié de cet hémisphere éclairé, qui paroissoit tout entier et comme un cercle complet dans le temps de l'opposition ; nous ne voyons donc qu'un demi-cercle de lumiere, tel qu'il est représenté séparément en N, la partie ronde et lumineuse étant toujours du côté du Soleil.

1407. Lorsque la Lune après la conjonction est à 45° du Soleil, nous disons qu'elle est dans son PREMIER OCTANT ; alors la partie éclairée ou qui regarde le Soleil est CDF, la partie visible est BCD : ainsi nous n'appercevons que la partie CD de l'hémisphere éclairé : alors la Lune paroît sous la forme d'un croissant, tel qu'on le voit en G ; nous ne voyons d'orient en occident que la huitieme partie de la circonférence du globe lunaire, et la Lune est éloignée du Soleil de la huitieme partie d'un cercle ; c'est ce qui a fait appeller cette phase un *octant :* mais la surface de la partie éclairée n'est qu'un peu plus de la septieme partie de la surface de son disque visible, comme on le verra par le calcul de la partie éclairée (1410).

Dans le SECOND OCTANT, qui arrive après la quadrature, l'hémisphere visible est HIK, l'hémisphere éclairé par le Soleil est IKP ; ainsi il ne manque à notre vue que la petite portion IH, pour que nous puissions voir la partie éclairée toute entiere ; nous verrons alors plus de la moitié du disque lunaire, et la Lune paroîtra sous la forme R ; ce qui manque à son cercle est de la même grandeur que la partie éclairée dans le premier octant, quand la Lune étoit en C.

Le troisieme octant V, qui arrive 45° au-delà de l'opposition, est semblable au second octant ; et le quatrieme octant X est pareil au premier octant G.

1408. Pour calculer exactement la portion lumineuse et visible du disque lunaire, soit S le Soleil (*fig.* 81), T le centre de la Terre, C le centre de la Lune, AE le diametre de la Lune, perpendiculaire au rayon du Soleil, et qui sépare la portion éclairée ANE, de la portion obscure ADE ; le diametre lunaire ND, perpendiculaire au rayon visuel TC mené de la Terre, sépare la partie visible DAN de la partie invisible DEN ; on abaissera de l'extrémité A du demi-cercle lumineux ENA une perpendiculaire AB sur le diametre ND, et la ligne NB sera la largeur apparente de la partie visible de l'hémisphere lumineux. En effet, de tout l'hémisphere lumineux ANE il n'y a que la partie AN qui soit comprise dans l'hémisphere visible DAN, et l'arc AN ne peut paroître à nos yeux que la largeur BN, par la même raison que le demi-cercle entier NAD ne paroît que comme un simple diametre NBCD, et qu'un hémisphere entier ne

paroît que comme un cercle ou un plan qui en est la projection (1814). La portion NB du diametre visible NBCD est le sinus verse de l'arc NA ; cet arc NA, ou l'angle NAC, est égal à l'angle CTF, en supposant TF parallele à CS ; car l'angle NCA est le complément de l'angle FCT, à cause de l'angle droit NCT. Mais l'angle FCT est le complément de l'angle FTC à cause du triangle rectangle CFT; donc l'angle NCA est du même nombre de degrés que l'angle FTC. Cet angle FTC est égal à l'élongation de la Lune ou à la distance de la Lune au Soleil, parceque le Soleil est supposé sur la ligne TF de même que sur la ligne CS, à cause de la distance qui est prodigieuse en comparaison de CF (1115); donc l'arc NA est égal à l'élongation de la Lune; donc, dans les différentes phases de la Lune, *la largeur du segment lumineux de la Lune est égale au sinus verse de l'angle d'élongation*, en prenant pour rayon le rayon même du disque de la Lune, ou la demi-distance des cornes du croissant. Par exemple, quand la Lune, quatre à cinq jours après sa conjonction, est à 60° du Soleil, sa partie lumineuse NB paroît la moitié du rayon NC ou le quart du diametre entier ND de la Lune, parceque le sinus verse de 60° dans un cercle quelconque est la moitié du rayon de ce cercle. Si le disque lunaire est exprimé par un cercle GNH (*fig.* 83), dont C soit le centre, NB égal à la moitié du rayon CN, on aura NB pour la largeur du croissant de la Lune, à 60° d'élongation.

1409. Les réflexions précédentes font voir que ce n'est pas exactement le sinus verse de l'élongation, mais plutôt le sinus verse de l'angle extérieur du triangle formé au centre de la Lune par les rayons qui vont au Soleil et à la Terre. En effet, nous avons supposé, dans la démonstration précédente, que les lignes CS et TF menées au Soleil, soit de la Terre, soit de la Lune, étoient sensiblement paralleles; cela n'est vrai qu'à peu près, et à cause de la grande distance du Soleil, qui est 398 fois plus loin de nous que la Lune (1729). Mais si les rayons ST et SV (*fig.* 82) qui vont du Soleil à la Terre et à la planete ne sont pas paralleles, on aura l'angle extérieur TVO du triangle SVT égal à l'angle NVA, l'un et l'autre étant le complément de l'angle AVT; or la partie éclairée et visible NB est égale au sinus verse de l'angle NVA; donc le diametre entier est à la largeur de la partie éclairée et visible d'une planete, comme le diametre du cercle est au sinus verse de l'angle au centre de la planete, extérieur au triangle formé au Soleil, à la Terre et à la planete.

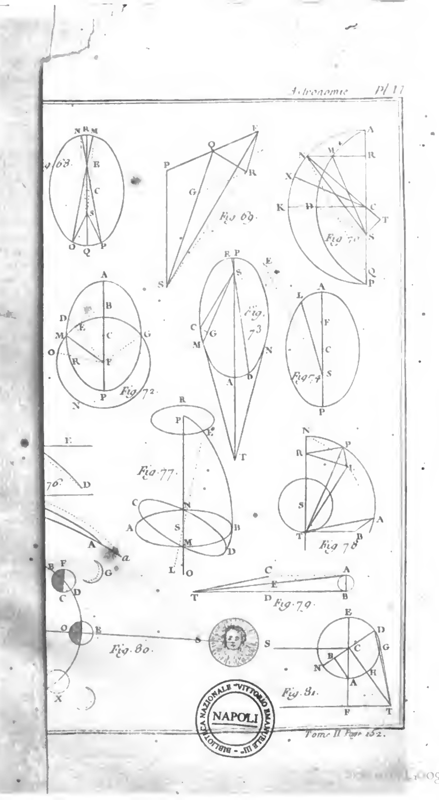
1410. La courbure GBH (*fig.* 83) qui forme l'intérieur du croissant est une *ellipse*, dont le grand axe GH est égal au diametre même du disque lunaire: pour le prouver nous nous contenterons

d'observer que GBH est la circonférence du cercle *terminateur* de la lumiere et de l'ombre, ou du cercle qui sépare l'hémisphere obscur de la Lune; ce demi-cercle est vu de côté, sous une inclinaison qui est le complément de l'angle d'élongation, c'étoit l'angle ACT (*fig.* 81) : or un cercle vu obliquement paroît toujours sous la forme d'une ellipse (1815); donc GBH, étant une circonférence vue obliquement, doit paroître le contour d'une ellipse. Ainsi le calcul de la surface éclairée dépend de celui de l'ellipse; et comme la surface est proportionnelle à son petit axe (3399), la lumiere du croissant est proportionnelle à sa largeur; donc à 45° d'élongation, le sinus verse étant $\frac{3}{20}$ du diametre, la lumiere est aussi $\frac{3}{20}$ de celle de la pleine Lune.

Je dis encore que le grand axe de cette ellipse est le diametre même GH du disque lunaire; car tous les grands cercles d'un globe se coupent en deux parties égales : ainsi le cercle visible GNH et le cercle terminateur GBH sur le globe de la Lune se coupent en deux parties égales, et en deux points diamétralement opposés; donc le diametre GCH est la commune section de ces deux cercles. C'est pourquoi les cornes G et H du croissant sont toujours éloignées entre elles d'un demi-cercle, et l'on peut en tout temps mesurer le diametre de la Lune en mesurant la distance des cornes.

1411. La considération employée dans l'article 1409 a été négligée dans l'article 1408, où nous avons supposé paralleles les rayons du Soleil qui vont à la Lune et à la Terre. C'est une petite erreur qui provient de ce que ces rayons font en divergeant un angle de 8 à 9 minutes; mais il est insensible dans ces sortes de calculs. J'ai négligé de même la différence entre les grosseurs du Soleil et de la Lune, qui fait que le Soleil éclaire toujours un peu plus de la moitié du globe lunaire : mais la différence ne va qu'à un degré de la circonférence de la Lune de chaque côté. On pourroit aussi remarquer que nous ne voyons pas tout-à-fait la moitié de la Lune : mais la différence qui en résulte sur le diametre apparent de la Lune, ou la différence entre CTG que nous voyons (*fig.* 81), et CTD, angle sous lequel nous verrions le quart de cercle entier HD, ne va pas à un centieme de seconde; car le sinus verse d'un arc DG de 15 minutes, 0,00000952, n'est pas la cent millieme partie du rayon : il n'en peut donc rien résulter pour les phases de la Lune; ainsi nous n'insisterons point là-dessus.

1412. On voit distinctement après la nouvelle Lune que le croissant qui en fait la partie la plus lumineuse, est accompagné d'une lumiere foible répandue sur le reste du disque; elle nous fait entrevoir


Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 72.
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.

voir toute la rondeur de la Lune, et c'est ce qu'on appelle LA LUMIERE CENDRÉE.

La Terre réfléchit la lumiere du Soleil vers la Lune, comme la Lune la réfléchit vers la Terre : quand la Lune est en conjonction pour nous avec le Soleil, la Terre est pour elle en opposition ; c'est proprement pleine terre pour l'observateur qui seroit dans la Lune, comme dit Hévélius ; et la clarté que la Terre y répand est telle que la Lune en est illuminée beaucoup plus que nous ne le sommes par un beau clair de Lune qui nous fait appercevoir tous les objets. La Terre étant bien plus grosse que la Lune, la lumiere que la Terre y répand doit être bien plus grande que celle qu'elle en reçoit ; il n'est donc pas étonnant que la Lune puisse la réfléchir jusqu'à nous, et que cette lumiere nous fasse voir la Lune. Nous l'appercevrions toute entiere lorsqu'elle est en conjonction, si le Soleil, que nous voyons en même temps, n'absorboit entièrement cette lueur terrestre réfléchie sur le globe lunaire, et n'empêchoit alors de voir la Lune ; mais quand la Lune est un peu plus éloignée du Soleil, qu'il est couché, et le crépuscule presque fini, nous appercevons très distinctement la lumiere cendrée.

Les anciens eurent beaucoup de peine à expliquer la cause de cette lumiere secondaire : les uns l'attribuoient à la Lune même, ou transparente, ou phosphorique ; les autres aux étoiles fixes (*Riccioli*, *Almag. novum*, *I*, 199). Képler assure que Tycho l'attribuoit à la lumiere de Vénus, et que Mœstlinus, dont Képler se déclaroit le disciple, fut le premier qui expliqua en 1596 la véritable cause de cette lumiere cendrée (*Astr. pars optica*, *pag.* 254). Il y a des Italiens qui attribuent cette explication à *Leonardo da Vinci*, célebre peintre toscan, mort en 1518 ; et le P. Frisi m'a assuré qu'elle se trouve dans un de ses manuscrits sur les rivieres, que l'on conserve à Londres. Galilée en donna la même explication (*Sidereus Nuncius*, 1610, *pag.* 26), comme l'ayant trouvée depuis plusieurs années. Hévélius observa beaucoup cette lumiere (*Selenog.* 288, 400).

La lumiere cendrée paroît beaucoup plus vive quand on se place de maniere que quelque toit cache la partie lumineuse de la Lune, qui efface un peu la lumiere secondaire ; celle-ci est suffisante alors pour nous faire distinguer les grandes taches de la Lune, telles que la mer des crises (FIGURE 282), sur-tout vers le troisieme jour de la Lune, et le matin aux environs de l'équinoxe du printemps.

Quoique la lumiere cendrée doive aller en diminuant, du jour même de la nouvelle Lune, c'est cependant vers le troisieme jour qu'elle est le plus sensible pour nous, parceque la Lune est alors

plus dégagée des rayons du Soleil; c'est aussi aux environs de l'équinoxe du printemps, quand la Lune, ayant une grande latitude septentrionale, se couche long-temps après le Soleil, que cette lumiere est le plus sensible. Elle disparoît presque entièrement quand la Lune est en quadrature : 1°. parceque la Terre envoie alors quatre fois moins de rayons vers la Lune; 2°. parceque la phase de la Lune, devenue 4 à 5 fois plus grande, nous empêche de la distinguer. Par la même raison cette lumiere cendrée paroît un peu plus vive suivant Hévélius, quand la Lune décroît, et qu'elle paroît le matin, quoiqu'à même distance du Soleil et à pareille phase, parceque la lumiere de la partie orientale de la Terre est plus vive que celle de la partie occidentale où les eaux de la mer absorbent les rayons, tandis que celle de la partie orientale de la Lune est un peu plus foible à cause des taches obscures qui s'y trouvent; d'ailleurs la prunelle est plus dilatée après les ténebres de la nuit qu'après l'éclat du grand jour (Hévél. *Selenog. pag.* 307, 399). M. du Séjour a donné des calculs sur la lumiere cendrée (*Traité analyt. pag.* 695).

La lumiere cendrée présente un autre phénomene optique, fort sensible; c'est la dilatation apparente du croissant lumineux, qui paroît être d'un diametre beaucoup plus grand que le disque obscur de la Lune : cela vient de la force d'une grande lumiere placée à côté d'une petite; l'une efface l'autre, et la tue, comme disent les peintres à l'occasion des couleurs; le croissant paroît enflé par un débordement de lumiere qui s'éparpille dans la rétine de l'œil, et élargit le disque de la Lune; l'air ambiant éclairé par la Lune augmente encore cette illusion.

1413. La lumiere de la Lune n'est accompagnée d'aucune chaleur. Tschirnausen, avec ses verres brûlans, ne put la rendre sensible (*Hist. acad.* 1699). La Hire le fils exposa le miroir concave de l'Observatoire qui a 35 pouces de diametre aux rayons de la pleine Lune, lorsqu'elle passoit au méridien dans le mois d'octobre 1705, et il rassembla ces rayons dans un espace 306 fois plus petit que dans l'état naturel : cependant cette lumiere concentrée ne produisit pas le moindre effet sur le thermometre d'Amontons, qui étoit très sensible (*Mém. acad.* 1705).

1414. Bouguer a trouvé par expérience que la lumiere de la Lune est 300 mille fois moindre que celle du Soleil, et cela en les comparant l'une et l'autre avec la lumiere d'une bougie placée dans l'obscurité (*Optique* 1760, *in*-4°, p. 89).

De la révolution de la Lune.

1415. Les plus anciens philosophes comprirent d'abord que la Lune tournoit chaque mois tout autour de la Terre, qu'elle en étoit la compagne, et, comme nous disons actuellement, *le Satellite.* Aristote, au rapport d'Averroès, disoit que la Lune lui paroissoit comme une Terre éthérienne. On peut voir dans Macrobe et dans Plutarque tout ce que les philosophes avoient dit à ce sujet.

Toutes les raisons qu'on a eues de changer l'ancienne opinion par rapport au mouvement des planetes cessent par rapport à la Lune; on voit évidemment qu'elle tourne autour de la Terre : il ne s'agit plus que de connoître la durée de sa révolution; nous allons la rechercher à-peu-près : mais, pour la connoître bien exactement, il faudra dans la suite faire usage de la connoissance que nous aurons acquise de ses inégalités.

Les premiers observateurs dûrent reconnoître bien facilement que, dans l'espace de 59 jours, la nouvelle Lune arrivoit deux fois; en sorte que la durée d'une lunaison étoit de 29 jours et demi : mais cette regle, à-peu-près vraie, étoit sujette à plusieurs exceptions et à plusieurs inégalités qu'on ne développa que bien long-temps après.

1416. La premiere connoissance exacte que l'on ait eue dans la Grece du mouvement de la Lune, ou de la durée exacte de sa révolution, fut celle du cycle de 19 ans. Il est attribué à Méton par Diodore et Censorinus; Geminus l'attribue à Euctemon, Philippe et Calippus. Méton vivoit environ 430 ans avant notre ere : mais c'est des Orientaux probablement que les Grecs apprirent qu'en 19 années solaires il y avoit 235 mois lunaires complets; et cette détermination n'est en défaut que d'un jour sur 312 ans (1563): ainsi la regle de 19 ans étoit assez exacte pour les usages de la société; nous parlerons de l'emploi que l'on en fait encore dans le calendrier (1558).

Cette découverte parut si belle aux Grecs, qu'on en exposa le calcul en lettres d'or dans des endroits publics, pour l'usage des citoyens, et qu'on appella *Nombre d'or* l'année courante de cet espace de 19 ans qui ramenoit sensiblement la Lune en conjonction avec le Soleil au même point du ciel, ou au même jour de l'année solaire.

1417. Calippus crut remarquer, 330 ans avant notre ere, que le cycle de Méton avoit un quart de jour de trop; il y substitua une période quadruple, ou de 76 ans, dans laquelle il ne mettoit que

27759 jours, au lieu de 27760 qu'il y avoit dans quatre cycles de Méton (*Doctrina temporum*, *l. II*, *c.* 16).

Hipparque apperçut ensuite que, dans 4 périodes calippiques ou 304 ans, le retour étoit plus exact, et de 3760 mois lunaires; c'est ce que Censorinus appelle l'année d'Hipparque (*Doct. tempor. II*, 33, *Censorinus*, *c.* 18, *pag.* 95) : mais Hipparque y substitua lui-même dans la suite la période plus exacte de 126007 jours et une heure, pour 4267 lunaisons; ce qui donnoit pour chacune 29ʲ 12ʰ 44′ 3″ 26224 (Ptolémée, IV, 2).

1418. Ce mois synodique (1173) de 29ʲ 12ʰ, qu'on appelle aussi lunaison, ne finit que quand la Lune, après avoir fait le tour du ciel, est revenue en conjonction avec le Soleil. Mais, dans cet intervalle de temps, le Soleil a fait lui-même 29° par son mouvement propre d'occident en orient : ainsi la Lune a fait 29° de plus que le tour entier du ciel; d'où il est aisé de voir qu'elle n'auroit employé que 27 jours et un tiers à faire les 360°, c'est-à-dire à revenir à un même point du ciel : c'est cette révolution de 27ʲ et un tiers, qu'on appelle Mois périodique (1173). Nous allons déterminer l'une et l'autre révolution par la plus ancienne observation qui nous soit parvenue.

1419. Ptolémée rapporte (p. 88) une éclipse de Lune observée à Babylone par les Caldéens, l'an 720 avant J. C. le 29 thot de la premiere année de Mardocempade, ou la première année de la captivité des Juifs sous Salmanasar, au temps d'Ezéchias et de Tobie : l'éclipse commença une bonne heure après le lever de la Lune; l'opposition dut arriver le 19 mars à 6ʰ 11′ temps moyen au méridien de Paris, suivant mon calcul (*Mém. ac.* 1757) et celui de Dunthorn (*Philos. Trans. vol.* 46). Je compare cette éclipse avec celle du 23 oct. 1771, dont l'opposition, suivant nos tables, a dû être à 4ʰ 28′, et qui se trouve vers le même degré d'anomalie. J'écris le 12 octobre pour la réduire au vieux style : l'intervalle est de 2491 ans et 207 jours moins une heure 43′. Mais de ces 2491 ans il y en a le quart de bissextiles ou 622, savoir 5 jusqu'à l'année 700 inclusivement, 600 pour les 24 siecles, et 17 depuis 1700 exclusivement jusqu'à 1771 : ainsi cela fait 910044 jours moins 1ʰ 43′, c'est-à-dire 78627795420″. Il y a eu dans cet intervalle 30817 révolutions synodiques de la Lune; donc chacune est de 29ʲ 12ʰ 44′ 2″ 2. M. Cassini se sert de la même éclipse de l'an 720 comparée avec celle du 20 sept. 1717, l'intervalle étant de 890288 jours moins 46 minutes : pendant ce temps il y a eu 32585 révolutions périodiques de la Lune, plus 6ˢ 6° 7′, dont la Lune étoit plus avancée dans la seconde observation que dans la premiere; ce qui

donne la révolution moyenne de la Lune à l'égard des équinoxes de $27^j\,7^h\,43'\,5''$ (*Elém. d'astron. pag.* 293).

On trouve encore dans l'Almageste une éclipse du 8 mars 719, dont le milieu arriva à $9^h\,18'$ du soir au méridien de Paris, et une du 1 sept. 719, $5^h\,48'$ du soir (Cassini, p. 286).

1420. Ces éclipses fournissent une détermination d'autant plus exacte qu'elles sont plus anciennes : mais il faudroit tenir compte des différentes inégalités du Soleil et de la Lune dans chaque observation ; c'est-à-dire n'employer que les longitudes moyennes, et pour cela connoître bien le mouvement de l'apogée de la Lune et de l'apogée du Soleil. Au reste, après beaucoup de comparaisons semblables, et sur-tout après l'examen des observations faites depuis un siecle, la révolution périodique a été trouvée de $27^j\,7^h\,43'\,4''\,6480$, par rapport aux équinoxes, pour le commencement de ce siecle-ci, suivant Mayer; et le mouvement séculaire $10^s\,7^\circ\,53'\,35''$ outre les 1336 révolutions completes de la Lune qu'il y a dans un siecle. Mais j'en ai ôté $23''$, d'après les dernieres observations de M. d'Agelet calculées par M. de Lambre (1487); ainsi la révolution tropique est de $27^j\,7^h\,43'\,4''\,6795$.

1421. Il faut ajouter environ $7''$ à la révolution périodique de la Lune par rapport aux équinoxes que nous venons de trouver, quand on veut avoir la révolution moyenne de la Lune par rapport aux étoiles fixes, parceque, dans l'espace d'un mois lunaire, les équinoxes rétrogradent d'environ $4''$ de degré, en sorte que la Lune rencontre plutôt l'équinoxe qu'elle n'eût rencontré une étoile fixe située au même point du ciel (1161), et la différence est pour la Lune de $7''$ de temps. La révolution moyenne sidérale de la Lune est de $27^j\,7^h\,43'\,11''\,52588$ de temps moyen dans ce siecle-ci.

Si l'on ne connoissoit que la révolution périodique, il seroit aisé de trouver la révolution synodique, parceque *la différence des mouvemens de la Lune et du Soleil est au mouvement de la Lune seule comme la révolution périodique est à la révolution synodique.* Car ces deux mois sont entre eux comme le mouvement absolu de la Lune est à son mouvement relatif par rapport au Soleil (1173).

Ptolémée supposoit la révolution synodique, ou le mois lunaire, de $29^j\,12^h\,44'\,3''\,26222$, Boulliaud de $29^j\,12^h\,44'\,3''\,9'''\,37^{iv}\,9^v\,59^{vi}\,15^{vii}\frac{1}{4}$. Mayer trouve cette révolution, pour l'an 300 avant notre ere, de $29^j\,12^h\,44'\,3''\,4015$, et pour le commencement de ce siecle, ou vers l'année 1700, de $29^j\,12^h\,44'\,2''\,8283$, parcequ'à cause de l'accélération de la Lune (1483) la longueur du mois lunaire ou de

la révolution synodique a diminué de 0″ 5732 ou 34‴ 23ⁱᵛ de temps, dans l'espace de 2000 ans (1484).

1422. En partant du mouvement séculaire qui est employé dans les tables de la Lune, on peut avoir ces révolutions avec toute la précision qu'on voudra, en disant, Le mouvement séculaire est à la durée du siecle, comme 360° sont à la durée de la révolution; ou en divisant le produit d'un siecle et de 360° réduits en secondes (893), 1°. par le mouvement séculaire total de la Lune par rapport aux équinoxes, 1732564392″; 2°. par le mouvement séculaire relativement aux étoiles, 1732559367″; 3°. par le mouvement séculaire relativement au Soleil, 1602961632. Par ce moyen l'on trouve les trois especes de révolutions telles qu'elles seront rapportées art. 1481. En supposant le mouvement séculaire du Soleil 46′ 0″, le mouvement séculaire relatif est de 1236 cercles entiers, et 10ˢ 7° 7′ 12″; on a pour un jour 12° 11′ 26″ 697659. Le mouvement diurne de la Lune par rapport aux équinoxes dans ce siecle-ci est de 13° 10′ 35″, 0278439.

Des quatre grandes inégalités de la Lune.

1423. Les révolutions moyennes de la Lune que nous venons de déterminer supposent dans la Lune un mouvement toujours égal et uniforme; cependant il n'est aucun astre dont les mouvemens soient aussi compliqués et aussi irréguliers, comme l'observoit déja Pline : *Multiformi haec ambage torsit ingenia contemplantium, et proximu mignorari maximè sidus indignantium* (*L. II, cap.* 9). C'est ce que disoit encore Halley dans ces vers sur la théorie de la Lune :

Quâ causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur, subdita nulli
Hactenus astronomo, numerorum fræna recusat;
Cur remeant Nodi, curque Auges progrediuntur.

Ce sont ces inégalités dont nous allons traiter, en nous réduisant à ce que les observations seules ont fait connoître immédiatement, sans le secours des calculs de l'attraction; nous parlerons ensuite des petites inégalités que l'attraction a indiquées.

Ces inégalités principales que l'observation seule a fait découvrir sont au nombre de quatre, sans compter le mouvement de l'apogée de la Lune, et le mouvement du nœud. La premiere est l'Equation de l'orbite, la seconde est l'Evection, la troisieme est la Variation,

la quatrieme est l'Equation annuelle. A l'égard des petites inégalités que la théorie de l'attraction a fait connoître, du moins à-peu-près, je tâcherai aussi d'en donner une idée; mais on les a reconnues, soit par le calcul, soit par l'observation, à force d'essais, de tentatives et de combinaisons : il est encore fort douteux qu'on les connoisse bien, et personne n'a donné le détail prodigieux de ces calculs. Ainsi je n'entreprendrai pas d'en donner une explication, qui ne les feroit connoître même que d'une maniere imparfaite et peu sûre; il ne faut regarder les dix-huit petites équations dont nous parlerons ci-après (1463 *et suiv.*), que comme une hypothese qui explique et qui représente à-peu-près les observations qu'on a faites jusqu'ici du mouvement de la Lune.

1424. Pour suivre le progrès des astronomes dans cette partie, nous sommes obligés de recourir au livre de Ptolémée (*Almag. liv. IV*, *c.* 1), où l'on trouve toujours l'histoire de l'ancienne astronomie. Il nous avertit d'abord qu'il faut choisir les éclipses de Lune pour établir la théorie de la Lune, parceque ces éclipses nous paroissent de la même maniere que si nous étions au centre même de la Terre, auquel ces mouvemens doivent nécessairement se rapporter; au lieu que, dans toute autre situation, la diversité d'aspect, ou la parallaxe, ajoute à ces recherches une nouvelle difficulté (1620).

Les inégalités de la Lune sont si grandes et si variées, qu'il parut d'abord aux anciens astronomes fort difficile de déterminer seulement la durée d'une révolution *moyenne* de la Lune, c'est-à-dire, d'une révolution qui ne fût point augmentée ni diminuée par les inégalités périodiques de la Lune.

1425. Pour parvenir à connoître cette révolution moyenne, en se servant toujours des éclipses de Lune, les anciens chercherent combien il falloit prendre de mois ou de jours pour avoir un mouvement de la Lune qui fût toujours de la même quantité dans le même intervalle de temps; ils trouverent 6585 jours et 8 heures, qui font 223 mois lunaires, ou 18 ans et 10 jours; c'est-à-dire qu'ils reconnurent que quand deux éclipses de Lune avoient été éloignées de 18 ans et 10 jours, il en revenoit toujours une semblable au bout d'un pareil espace de temps, lorsque le Soleil avoit fait 18 révolutions avec 10° et 40′. Dans cet intervalle, toutes les inégalités de la Lune avoient eu leur cours, et recommençoient toutes ensemble, soit en longitude, soit en latitude (*Almag.* IV, 2, *pag.* 77). Hipparque reconnut que cette période de 223 lunaisons n'étoit pas ri-

goureusement exacte; mais nous la prendrons seulement pour exemple.

1426. Dans cet espace de 223 lunaisons ou retours de la Lune au Soleil, les anciens remarquerent que le retour de l'équation, ou de l'inégalité de la Lune, qui étoit d'environ 5°, avoit recommencé 239 fois, la révolution de la latitude 242 fois, et celle de la longitude 241 fois avec 10° 40′ de plus; ainsi la Lune avoit été 241 fois au même degré de longitude, 239 fois à sa distance moyenne ou au point de sa plus grande équation, et 242 fois à son nœud, à quelque chose près. Il n'en falloit pas davantage pour reconnoître les trois principales circonstances du mouvement de la Lune; c'est-à-dire, son moyen mouvement, celui de son apogée, et celui de son nœud; circonstances nécessaires pour trouver les quatre inégalités dont nous avons à parler; car les méthodes que nous avons employées dans le VIe livre pour les planetes ne suffiroient pas pour la Lune, à cause du mouvement rapide de son apogée et de son nœud.

Ptolémée ajoute que si l'on ne s'attache pas aux éclipses et qu'on veuille seulement considérer l'inégalité de la Lune dans son mouvement en longitude le long du Zodiaque, en allant d'une pleine Lune à l'autre, on aura des retours égaux de la Lune en 251 mois, pendant lesquels il y aura eu 269 restitutions des inégalités de la Lune; mais alors la latitude aura été différente.

Tel est donc l'aspect sous lequel les plus anciens astronomes commencerent à considérer la Lune, quand ils voulurent parvenir à déterminer ses inégalités; ils virent que des éclipses de Lune arrivées dans le même point du ciel, et dans la même saison de l'année, ne se trouvoient point à des distances égales pour le temps; ils dûrent faire une table des intervalles de temps observés entre plusieurs éclipses de Lune, et chercher s'il n'y auroit pas entre elles exactement deux intervalles de temps qui fussent égaux : cela ne se rencontra que sur 223 lunaisons ou 18 ans; on reconnut ainsi que la Lune ne revenoit pas toujours au même degré d'anomalie ou d'inégalité, quoiqu'elle revînt au même point du ciel, et en opposition avec le Soleil.

1427. En examinant la Lune dans l'espace d'un mois, il n'étoit pas difficile de voir que tous les 7 jours elle avoit cinq à six degrés d'inégalité; qu'au bout de 14 jours cette inégalité disparoissoit, et ainsi de suite; qu'il y avoit toujours dans le mois deux points éloignés tout à la fois d'une demi-révolution en temps, et d'un demi-cercle en longitude; c'est-à-dire, deux moitiés égales parcourues en temps égaux : en sorte que les inégalités recommençoient toujours au bout

bout de 27 jours et demi environ. Mais, en faisant la même recherche en différens mois ou en différentes années, on remarqua bientôt que le lieu de la plus grande inégalité ne se trouvoit pas au même point du ciel, mais toujours un peu plus avancé dans le zodiaque, et cela d'environ 3° à chaque révolution, en sorte que le mouvement de la Lune, par rapport à son apogée, ou son mouvement d'anomalie, étoit plus petit de $\frac{1}{120}$ que le mouvement absolu.

Pour expliquer cette premiere inégalité, on supposa que la Lune décrivoit un cercle excentrique, comme nous l'avons expliqué pour le Soleil (865), ou bien un épicycle placé sur un cercle concentrique (868); et en même temps que la ligne des apsides (864), c'est-à-dire la ligne qui va de l'apogée au périgée, changeoit de position et s'avançoit vers l'orient d'environ 3° par mois.

1428. Ptolémée employa, pour déterminer cette premiere inégalité, 3 éclipses de Lune observées à Babylone dans les années 719 et 720 avant J. C. et il la trouva de 5° 1′ (*Almag. IV*, 6 et 11). C'est cette premiere inégalité que nous appellons *équation de l'orbite*, ou *équation du centre* (a), et qui est appellée dans Képler *inaequalitas soluta*. Nous donnerons ci-après sa véritable quantité avec plus d'exactitude (1434).

1429. Pour déterminer l'équation et le lieu de l'apogée de la Lune, à la maniere des anciens, je suppose qu'on ait rassemblé plusieurs lieux de la Lune déterminés par observation, dans l'intervalle d'une même révolution; l'on comparera le mouvement vrai avec le mouvement moyen (1261, 1279), la plus grande différence sera le double de l'équation de l'orbite. S'il se trouvoit deux observations où cette différence entre le mouvement moyen et le mouvement vrai fût nulle, ce seroit une preuve que la Lune étoit dans son apogée et dans son périgée, et que son lieu moyen étoit le même que son lieu vrai : ainsi l'on connoîtra le lieu de l'apogée de la Lune. Quelle que soit l'erreur qu'on commettra sur le lieu moyen calculé, si les différences sont égales et dans le même sens, elles indiqueront des observations faites dans l'apogée et le périgée; puisque, l'erreur étant la même, c'est une preuve que le mouvement vrai a été égal au mouvement moyen dans cet intervalle de temps, et cela indique les apsides (1279).

1430. Depuis la découverte des lunettes on a un autre moyen assez simple de trouver l'apogée de la Lune, en observant ses diametres apparens; car ils varient depuis 29′ $\frac{1}{2}$ jusqu'à 33′ $\frac{1}{2}$ (1506);

(a) Elle est dans Ptolémée sous le nom de πρώτης καὶ ἁπλῆς ἀνωμαλίας, ou de premiere et simple inégalité.

l'on est donc assuré que la Lune est apogée toutes les fois que son diametre apparent n'est que de $29' \frac{1}{3}$, et qu'elle est périgée lorsque ce diametre est de $33' \frac{1}{2}$; cette méthode seroit suffisante pour trouver le lieu de l'apogée à très peu près, si l'on ignoroit son mouvement.

1431. Mais si l'on vouloit trouver le lieu de l'apogée de la Lune par le moyen de ses diametres, il vaudroit mieux les observer vers les moyennes distances lorsque le diametre est environ de $31' \frac{1}{2}$. Si on l'a trouvé deux fois de la même quantité, c'est une preuve que dans ces deux observations la Lune étoit à des distances égales de ses apsides; ainsi prenant un milieu entre les deux temps où l'on a observé, on aura le temps où la Lune a été apogée.

C'est en observant ainsi les diametres de la Lune que Horoccius, vers l'an 1638, trouva qu'il falloit admettre un balancement de l'apogée et un changement d'excentricité pour expliquer la seconde équation trouvée par Ptolémée, dont nous parlerons ci-après (1435).

1432. Après avoir ainsi déterminé plusieurs fois le lieu de l'apogée de la Lune en différens temps, on a trouvé qu'il faisoit le tour du ciel par rapport aux étoiles dans l'espace de 8 années communes et 312 jours, ou $3232^j\ 11^h\ 11'\ 39''4$, et, par rapport aux équinoxes, en $3231^j\ 8^h\ 34'\ 57'',6$. Son mouvement considéré par rapport aux équinoxes est de $6'\ 41''\ 069815$ par jour, ou $3^s\ 19^\circ\ 11'\ 15''$ par siecle, outre 11 révolutions completes, en total $14649075''$, et, par rapport aux étoiles, $14644050''$ [a]. De là il suit que le mouvement moyen de la Lune (1420) par rapport aux étoiles fixes, $13^\circ\ 10'\ 34'',890267$, étant pris pour unité, celui de son apogée $6'\ 40'',\ 932238$ est égal à la fraction décimale 0,00845226445, dont le logarithme est 7, 9269731. Pour trouver la révolution anomalistique de la Lune, on dira : La différence des mouvemens séculaires de la Lune et de son apogée $1717915317''$ est à un siecle, comme 360° sont à $2380713''$ ou $27^j\ 13^h\ 18'\ 33''\ 94994$.

1433. Jusqu'au temps de Ptolémée on s'étoit borné principalement à observer des éclipses de Lune; et la premiere inégalité de 5° (1428) étoit la seule qui pût s'y manisfester. Ptolémée reconnut qu'il y en avoit une autre qui étoit fort sensible dans les quadratures (*Almag. liv. V, ch.* 1), et qu'on appercevoit par les distances de la

(a) Par les observations de la Hire que la Caille a calculées, il paroît qu'il faudroit augmenter de 6^t la longitude de l'apogée de la Lune employée dans les tables de Mayer pour 1684 ; mais cette correction peut être susceptible de quelque doute à cause des inégalités de la Lune dans lesquelles elle se trouve compliquée (M. Bailly, *Mém.* 1763).

Lune au Soleil. « En observant avec soin l'ordre de cette inégalité, « nous avons reconnu, dit-il, qu'il n'y avoit que la premiere et simple « inégalité dans les conjonctions et les oppositions, et même dans « les quadratures, quand la Lune est apogée et périgée; mais on « s'assurera facilement qu'elle ne suffit pas pour calculer les mouve- « mens particuliers de la Lune observés dans les autres aspects. LA « SECONDE INÉGALITÉ se rapporte aux distances de la Lune au Soleil; « elle se rétablit et disparoît dans les conjonctions et dans les opposi- « tions; elle est la plus grande dans certaines quadratures. Nous « avons découvert cette différence par les observations de la Lune « que nous avons d'Hipparque, et par celles que nous avons faites « au moyen d'un instrument construit exprès pour mesurer les « différences de longitude le long du zodiaque entre le Soleil et la « Lune. »

Ces distances de la Lune au Soleil observées par Hipparque et par Ptolémée, s'accordoient quelquefois avec le calcul de la premiere inégalité ou de la premiere supposition (1427); quelquefois aussi elles en étoient éloignées. (a) Ptolémée reconnut qu'il y avoit une différence de 2° $\frac{2}{3}$ quand la Lune en quadrature se trouvoit être à 3 signes de son apside (*Almag. V*, 3, *in fine*). Alors le Soleil étant dans l'apogée ou dans le périgée de la Lune, l'inégalité, qui seroit de 5° suivant les regles établies ci-dessus (1428), se trouve être de 7° $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire plus grande de 2° $\frac{2}{3}$ en vertu de la seconde inégalité. Ptolémée suppose en conséquence que l'épicycle de la Lune est porté dans un cercle excentrique, et qu'il est plus près de nous dans les quadratures que dans les conjonctions et dans les oppositions, en sorte que pour expliquer ces deux inégalités ensemble il se sert d'un excentrique et d'un épicycle (*L. V*, c. 2 et 4).

Il suppose que dans un jour le centre de l'épicycle, allant suivant l'ordre des signes, fait 13° 14', et que l'apogée ou la ligne des apsides de l'excentrique fait 11° 9' contre l'ordre des signes: ainsi tous les 14 ou 15 jours l'apogée de l'excentrique rencontrera l'épicycle, et tous les 7 jours ils seront opposés entre eux. Par-là l'équation de 5° seulement a lieu dans toutes les conjonctions et oppositions, parcequ'alors l'épicycle est toujours dans l'apogée de l'excentrique. L'équation de 7° $\frac{2}{3}$ a lieu quand l'épicycle est plus près de la Terre, ce qui arrive dans les quadratures; le diametre de l'épicycle, paroissant alors plus grand, produit une inégalité plus considérable. Mais

(a) *In quadraturis verò utrisque, in minimo vel in nullo erratur, cùm Luna vel in maxima vel minima epicycli longitudine sit.* Ptol. L. V, cap. 2.

il faut supposer d'ailleurs toutes choses égales, et la Lune au point de la plus grande équation.

Dans l'explication que donne Copernic de cette inégalité (*de Revol. lib. IV, cap.* 8), en suivant les mêmes données que Ptolémée, il emploie deux épicycles. Le petit épicycle est supposé parcourir dans l'espace d'une révolution anomalistique, et contre l'ordre des signes, la circonférence du grand épicycle, tandis que la Lune parcourt, contre l'ordre des signes, le petit épicycle en $14^j\ 18^h$, c'est-à-dire dans l'espace d'une demi-révolution synodique: en sorte que dans toutes les syzygies (57) la Lune se trouve en dedans du grand épicycle pour former une plus grande équation de l'orbite de 5° seulement; mais dans les quadratures elle est au dehors pour donner une équation de $7^\circ\ \frac{2}{3}$. C'est ainsi que la seconde inégalité découverte par Ptolémée, et que l'on appelle aujourd'hui *Evection*, s'expliquoit encore du temps de Tycho, c'est-à-dire jusques vers l'an 1600. Ptolémée l'appelloit προσνεῦσιν, *epicycli quasi annutum;* Copernic l'appelloit *prostaphaeresim secundi vel minoris epicycli;* Tycho l'appelloit *prostaphaeresim excentricitatis;* nous l'appellons *évection,* à l'exemple de Boulliaud, parcequ'elle vient de l'éloignement ou de l'élévation de l'apogée, ou bien parcequ'elle porte le calcul à une plus grande précision.

1434. Puisque l'inégalité de la Lune alloit selon Ptolémée depuis 5° jusqu'à 7° 40′, sa quantité moyenne étoit, suivant les anciens, de 6° 20′; on l'emploie actuellement de 6° 18′ 32″ (1479): ainsi Hipparque par le seul secours des éclipses de Lune, et Ptolémée en y employant les quadratures, avoient déterminé avec une exactitude assez singuliere ces deux premieres inégalités.

1435. La seconde inégalité que les anciens avoient expliquée par le moyen d'un épicycle sur un excentrique, ou d'un épicycle sur un épicycle, fut expliquée d'une maniere différente par Horoccius vers l'an 1640; mais sa théorie ne fût connue qu'en 1673: alors Flamsteed calcula de nouvelles tables de la Lune sur les principes et sur les nombres donnés par Horoccius; et ces tables furent publiées par Wallis dans les œuvres posthumes d'Horoccius en 1673 (460). Cette hypothese ressemble à celle d'Arzachel, astronome arabe (362).

Soit T le centre de la Terre (FIG. 84), C le lieu moyen du centre de l'orbite qu'une planete est supposée décrire, en sorte que TCA soit la ligne des apsides, et TC l'excentricité de la planete; si l'on suppose que le centre de l'orbite, au lieu d'être fixe en C, décrive la circonférence d'un petit cercle AGB, il en résultera un

double effet. 1°. La ligne des apsides TA changera de position; et au lieu d'être constamment sur la direction TCA, elle passera par exemple en TG, et fera avec la premiere situation un angle ATG. 2°. L'excentricité, au lieu d'être égale à TC, deviendra TG, TB, etc. Copernic imita cette hypothese, liv. III, c. 20; Horoccius en fit usage pour la Lune.

1436. Képler avoit déja annoncé qu'il employoit une excentricité de l'orbite lunaire, variable à chaque année (*Ephém.* 1618, *préf.*); et l'on verra que la maniere dont Tycho expliquoit cette inégalité (1443) par le moyen d'un cercle CETD (FIG. 86) conduisoit aussi à imaginer un changement d'excentricité : ainsi il n'est pas étonnant qu'Horoccius ait fait usage, pour le mouvement de la Lune, de l'hypothese d'Arzachel, sur-tout en reconnoissant par les observations que non seulement il falloit changer l'équation de l'orbite lunaire ou son excentricité tous les six mois, mais encore avancer ou reculer l'apogée.

1437. Horoccius dut en effet être conduit à cette hypothese par l'observation des diametres de la Lune, qui pouvoient servir à faire connoître le lieu de l'apogée (1431); il dut s'appercevoir par leur moyen que l'apogée de la Lune se trouvoit dans un lieu du ciel plus avancé de 25° environ lorsque la distance du Soleil à l'apogée de la Lune étoit à-peu-près de 45° ou de 225°, que lorsqu'elle étoit de 135° et de 315°; de sorte que le mouvement de l'apogée n'étoit point uniforme, mais sujet à un balancement annuel de plus de 12°: ce changement de l'apogée étant une fois reconnu, sa liaison avec le changement de l'excentricité étoit aisée à appercevoir.

Les tables de Flamsteed, où cette théorie d'Horoccius étoit employée, parurent dans le cours de Jonas Moor, qui a pour titre : *A new systeme of the mathematicks*, 2 *vol. in*-4°. 1681. Elles ont été refaites, augmentées et perfectionnées sur la théorie de Newton, et insérées en 1746 par M. le Monnier, avec des additions, dans ses Institutions astronomiques. Newton et Halley se servirent de la même hypothese.

1438. Suivant la méthode de Newton (*Liv. III*, *prop.* 35), le centre A de l'orbite de la Lune (FIG. 84) décrit un cercle AGB, la Terre étant en T, en sorte que TC exprime l'excentricité moyenne de la Lune, TA la plus grande excentricité, et TB la plus petite, TC étant à CB comme l'excentricité moyenne est à sa différence à la plus petite, ou comme le sinus total est au sinus de 12° 18′ qui est la plus grande équation de l'apogée. Il suppose également

que si l'on fait l'angle ACG égal au double de l'*Argument annuel* (a), ou de la distance entre le Soleil et l'apogée moyen de la Lune pour un temps donné, l'angle CTG sera l'équation de l'apogée, et TG l'excentricité pour le même temps. Ainsi, dans le triangle TCG dont on connoît deux côtés et l'angle compris, l'on dira, La somme de TC et CG est à leur différence, comme la tang. de la moitié de ACG, c'est-à-dire la tangente de l'argument annuel, dont le double est l'angle ACG, est à la tangente de la demi-différence des angles inconnus : cela se réduisoit à un logarithme constant qu'on ajoutoit à celui de la tangente de l'argument annuel moyen, pour avoir l'argument annuel corrigé; et celui-ci, ajouté avec le lieu du Soleil, donnoit le vrai lieu de l'apogée de la Lune ; c'est la forme que Halley avoit employée dans ses tables.

1439. Cette hypothese d'Horoccius produit le même effet que celle de Ptolémée ou de Copernic (1433). En effet, si l'apogée de la Lune concourt avec la ligne des syzygies ou des conjonctions et des oppositions sur laquelle est le Soleil, l'excentricité TA est assez grande pour que le double de cette excentricité produise une équation de 7° $\frac{2}{3}$, la Lune étant dans sa moyenne distance, et en quadrature tout à la fois; il y aura donc 7° $\frac{2}{3}$ d'équation, dans cette hypothese, ainsi que l'exigeoient les observations de Ptolémée : mais si l'apogée de la Lune concourt avec la ligne des quadratures, l'excentricité simple sera plus petite ou égale à TB, et la plus grande équation ne sera jamais que de 5°.

En faisant varier ainsi l'excentricité de la Lune, il falloit avoir différentes tables d'équations pour les différentes excentricités, ou bien calculer à chaque fois directement l'équation de l'orbite pour l'excentricité actuelle. C'est ce que faisoit Halley dans ses tables, au moyen d'un artifice de calcul qui abrégeoit l'opération en corrigeant l'anomalie moyenne, de maniere que le calcul très facile de l'hypothese elliptique simple (1254) donnât exactement l'anomalie vraie.

1440. Flamsteed, Newton ni Halley ne remarquerent pas qu'il y avoit une méthode facile pour calculer cette équation, sans supposer une excentricité variable, et un balancement dans l'apogée; c'est celle qu'a employée Euler, et dont voici une démonstration assez simple. Soit L la Lune (FIG. 84), T la Terre, C le centre moyen de l'orbite lunaire, G le centre pour un moment donné; CT l'excentricité moyenne de la Lune, CLT la moitié de la moyenne

(a) On l'appelle annuel parcequ'il dépend principalement du mouvement annuel du Soleil.

équation de l'orbite, parceque c'est la double excentricité qui produit l'équation entiere, GLT la moitié de l'évection pour le temps donné, représentée par une augmentation d'excentricité comme dans la méthode de Newton (1438); CLG est la différence de ces deux équations, ou l'effet que produit sur la demi-équation le changement de l'excentricité et la libration de l'apogée. Pour trouver, par une simple opération, cet angle CLG qui est la moitié de l'évection, je considere que quand cet angle est le plus grand, ou lorsque LC est perpendiculaire sur CG; l'angle CLG est de 40′, c'est-à-dire que le rapport constant qu'il y a entre CL et CG est tel qu'il n'en peut résulter que 40′ pour l'angle L, lorsqu'il est le plus grand, ou 1° 20′ pour l'évection entiere. Lorsque l'angle LCG sera oblique, l'angle CLG diminuera, et cela dans le rapport de la perpendiculaire GD à la ligne CG, ou de sin. DCG au rayon; donc l'évection sera 80′ sin. DCG : mais l'angle DCG=ACL—ACG est l'anomalie moyenne de la Lune, moins deux fois la distance du Soleil à l'apogée de la Lune, ou, ce qui revient au même [a], deux fois la distance de la Lune au Soleil moins l'anomalie moyenne de la Lune, qui forme l'argument de l'évection; donc la demi-évection, ou l'angle GLC, est égale à 40′ sin. (2 dis. ☾ ☉—an. ☾): c'est la forme sous laquelle elle se trouve actuellement dans toutes les tables de la Lune; mais dans nos tables elle est jointe à une équation de 35″ qui a pour argument le double de celui de l'évection.

1441. Cette seconde inégalité de la Lune, qui, suivant Ptolémée, étoit de 1° 19′ ½, et, suivant Tycho, 1° 15′, est dans les tables de Flamsteed 1° 18′ 50″, dans les nôtres 1° 20′ 28″, dans celles de d'Alembert 1° 18′ 18″, et dans celles de Clairaut 1° 16′ 18″; mais d'Alembert observe que cette équation de Clairaut ne répond qu'à une partie équivalente à 1° 16′ 12″ dans les anciennes tables de Mayer, parceque la forme des équations étant différente, il faut les décomposer pour pouvoir les comparer ensemble (*Recherches*, *etc. III*, 27). Nous donnerons une idée de la maniere dont l'attraction du Soleil produit cette inégalité (3637).

1442. LA TROISIEME INÉGALITÉ de la Lune étant une découverte

(a) L'anomalie de la Lune est égale à la longitude de la Lune moins celle de l'apogée, ou à 2 ☾ — ☾ — ap. ☾; si l'on en ôte le double de l'argument annuel ou 2 ☉ — 2 ap. ☾, on aura 2 ☾ — 2☉ — ☾ + ap. ☾, ou 2(☾ — ☉) — (☾ — ap. ☾), c'est-à-dire, deux fois le lieu de la Lune, moins celui du Soleil, dont on aura ôté le lieu de la Lune, moins celui de son apogée, ou l'anomalie moyenne de la Lune; donc l'anomalie de la Lune, moins le double de l'argument annuel, équivaut à l'argument de l'évection.

de Tycho-Brahé, il est nécessaire de remonter à l'origine de ses recherches sur la théorie de la Lune; elle étoit entrée pour beaucoup dans le projet que Tycho avoit conçu de réformer toute l'astronomie, et de lui donner une nouvelle face; cependant comme les mouvemens de la Lune lui parurent les plus compliqués et les plus difficiles à démêler, il fut long-temps sans oser se décider, et il ne comptoit pas en parler dans ses *Progymnasmes*, où il traita des autres parties fondamentales de l'astronomie: néanmoins ce livre qu'il avoit fait imprimer chez lui à différentes reprises, n'ayant vu le jour qu'après sa mort par les soins de ses héritiers, qui le firent achever en 1610, on y ajouta pour lors un appendix de 28 pages pour la théorie de la Lune, qui est à la suite de la théorie du Soleil, et qui interrompt l'ordre des chiffres entre les pages 112 et 113. Ce petit abrégé de la théorie de la Lune avoit été achevé en 1601 par Tycho, aidé de Longomontanus (comme les éditeurs en avertissent à la page 819 du même livre), et on le trouva dans ses papiers. Je vais en donner l'extrait comme d'une piece originale qui contient la découverte de la VARIATION ou de la troisieme inégalité de la Lune; mais comme je ne puis séparer celle-ci des deux autres, il est nécessaire de rappeller la maniere dont il envisage les deux premieres inégalités.

1443. Soit T le centre de la Terre (FIG. 86), TF le rayon de l'*excentrique*, ou du cercle principal, par lequel on représente les mouvemens de la Lune; nous le supposons de 100000: on prendra TB de 2174, et l'on décrira un cercle TECD, sur lequel on fera mouvoir le centre de l'excentrique, de maniere que, dans les syzygies, le centre soit en T, au centre même de la Terre, que dans toutes les quadratures il soit au contraire en C, à la plus grande distance de la Terre, et que dans les octans il soit en D et en E. L'équation qui en résultera, ou l'angle BRT, est de 1° 15'; cette équation est proportionnelle au sinus du double de l'élongation de la Lune au Soleil, puisque le cercle est décrit tout entier dans une demi-révolution; elle est soustractive dans la premiere quadrature, parceque le mouvement de la Lune se fait de F en R; en sorte que l'angle FTR, vu de la Terre, est plus petit que l'angle formé en C autour du vrai centre de l'orbite lunaire: cette hypothese sert à expliquer l'évection (1441).

1444. Le grand épicycle, dont le rayon FG est de 5800, exprime une partie de l'équation du centre, et produit 3° 19' d'inégalité; le centre du 3e épicycle MNKL est supposé en G lorsque la Lune est apogée, il descend vers H et se trouve en I lorsqu'elle est périgée,

ce

ce qui arrive, suivant Tycho. à la moitié des $27^j\ 13^h\ 18'\ 35''$, qui forment la durée de sa révolution anomalistique. Ce troisieme épicycle est celui sur lequel la Lune même est supposée se mouvoir; son rayon GM est de 2900, c'est-à-dire, la moitié du grand épicycle, et il produit par conséquent une inégalité de $1^\circ\ 40'$. La Lune se meut sur cet épicycle, de maniere que quand le centre du petit cercle est apogée en G, la Lune soit en K dans la partie inférieure de ce petit cercle MNK; mais quand le centre du petit cercle sera en H ou en O, et que l'équation de l'orbite sera la plus grande, la Lune sera en M, et à la plus grande distance possible du centre F du grand épicycle, parceque la Lune parcourt ce troisieme épicycle en $13^j\ 18^h\ 39'\ 17''\frac{1}{2}$, moitié de sa révolution anomalistique : la somme de ces deux équations, qui répondent à la distance FM, est de $4^\circ\ 58'\frac{1}{2}$; c'étoit, suivant Tycho, la plus grande équation, qui, par l'évection, devenoit quelquefois de $7^\circ\ 28'$, moindre de $12'$ que dans Ptolémée et Copernic.

1445. Mais, ajoute l'auteur, j'ai éprouvé, par un grand nombre d'observations exactes, que ces trois cercles ne satisfont pas encore aux observations, et que dans les octans, c'est-à dire, à 45° des syzygies et des quadratures, il y a une autre différence sensible; j'ai donc été obligé d'ajouter un petit cercle en F pour expliquer cette Variation, et je suppose que le centre F du grand épicycle en parcourt, non pas la circonférence, mais le diametre VX perpendiculaire au rayon BF, par un mouvement de libration qui soit réglé cependant de même que s'il se faisoit sur la circonférence, comme l'a supposé Copernic dans d'autres occasions; c'est-à-dire, proportionnellement aux sinus des arcs parcourus : il en résulte une équation qui, depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, doit toujours s'ajouter à la longitude moyenne de la Lune, pour avoir la véritable situation du centre de l'épicycle, mais qui est soustractive dans le second et le quatrieme octant. Cette libration dépend donc du double de la vraie distance de la Lune au Soleil, et produit la *Variation*. Tycho avoit encore déterminé cette inégalité avec assez de précision, puisqu'il la faisoit de $40'\ 30''$: or elle est dans Flamsteed $40'\ 34''$, dans Clairaut $39'\ 54''$, dans les anciennes tables de Mayer $40'\ 43''$, et dans les nouvelles tables $35'\ 41''$, sans y comprendre les petites équations qu'on a renfermées dans la même table.

Tycho se proposoit de donner l'explication et les preuves de toute sa théorie dans un ouvrage particulier, mais il n'en eut pas le temps, et il ne nous en laissa que le résultat renfermé dans les hypotheses que je viens d'expliquer.

1446. Dans les tables de la Lune qui sont jointes à cet ouvrage, on trouvera les trois inégalités dont je viens de raconter la découverte, sous le nom d'*Équation de l'orbite, évection et variation* (Equat. XIX, V, et XX); mais les quantités en sont déterminées par les recherches et les observations nouvelles. Les deux dernieres sont appellées dans Képler *Inaequalitates menstruae*, l'évection en particulier y est nommée *Æquatio temporanea*, et la variation *Æquatio perpetua* ou *Variatio* (Képler, *Epitome*, *p.* 790, 793, 811), parceque celle-ci revient perpétuellement deux fois chaque mois, et que la premiere ne se rétablit qu'au bout de plus d'une année. La seconde avoit déja été appellée variation par Tycho qui en étoit l'inventeur; Boulliaud l'appelle *Variation* ou *Réflexion*. Cette équation se détermine assez bien par la théorie, c'est-à-dire, par le principe de l'attraction (3626); elle dépend uniquement de la masse du Soleil et de sa distance à la Terre, et subsisteroit quand même les orbites du Soleil et de la Lune seroient circulaires et concentriques. Pour la déterminer, Mayer avoit supposé dans ses premieres tables la parallaxe du Soleil de $11''\frac{1}{2}$, au lieu de $8''\frac{1}{2}$ qu'elle doit être; mais, dans ses nouvelles tables, il emploie la parallaxe de $7''8$ d'après la valeur d'une équation qui dépend principalement de la parallaxe du Soleil, et qui est $1' 55''$ sin. dis. ☾☉, qu'il avoit déterminée par les observations, et comparée avec la théorie, et il fit la variation de $35' 43''$. Enfin, dans nos tables, elle est de $35' 41''$: la variation change suivant les distances du Soleil et de la Lune, ce qui produit d'autres inégalités (1467).

1447. Il y a des auteurs qui ont fait la variation exactement la moitié de l'évection : ce rapport si simple entre deux des plus fortes inégalités de la Lune n'est pas une suite nécessaire de la théorie de l'attraction; c'est un fait dû au hasard, et qui méritoit d'être remarqué : mais, dans nos nouvelles tables, il y a une petite différence.

1448. L'ÉQUATION ANNUELLE de la Lune, qui est de 11', est la derniere de celles que les observations seules avoient fait découvrir : elle fut aussi découverte par Tycho; il dit qu'une expérience répétée de plusieurs façons lui a fait connoître que les mouvemens moyens de la Lune exigent, pour être uniformes, une équation des jours, différente de celle que donnent les mouvemens du Soleil. Tycho donne, en effet, une table de l'équation du temps qu'il faut employer pour calculer le lieu de la Lune; mais cette équation ne s'accorde pas avec l'équation annuelle que nous employons actuellement.

1449. Képler chercha comme Tycho une équation du temps pour

la Lune; il écrivoit en 1625: *In Luna post omnem apparatum Tychonis et meum transigi de eclipsibus non posse puto nisi introductâ insuper aequatione annuâ, sive in motus Lunae, sive in temporis aequationem usitatam* (*Epist. Kep. et Berneggeri*, *pag.* 72).

1450. Enfin Horoccius, dans sa théorie de la Lune, en fit également usage; il corrigeoit le temps vrai pour lequel il vouloit calculer le lieu de la Lune par une équation du temps, additive dans les six premiers signes de l'anomalie moyenne du Soleil, et qui alloit à 13′ 24″ de temps dans les moyennes distances, ce qui revenoit au même que s'il eût ajouté 7′ 21″ aux longitudes de la Lune, tandis qu'il négligeoit une partie de la véritable équation qui auroit dû être de 7′ 42″ de temps soustractive, de sorte que par-là il ajoutoit 4′ 14″ au lieu moyen de la Lune; le total revenoit à 11′ 35″ pour la plus grande équation annuelle : on ajoute actuellement 11′ 9″ pour l'équation annuelle; ainsi l'on peut dire qu'elle étoit véritablement employée dans les tables d'Horoccius, quoique sous un nom différent. Flamsteed remarqua ensuite avec raison que l'équation employée par Horoccius n'étoit pas proprement l'équation du temps (972); cependant, ajoute-t-il, cette équation physique doit être employée dans les calculs de la Lune, et elle lui est particuliere; c'est un satellite qui est affecté par le mouvement de la Terre [a].

1451. Halley, dans son catalogue des étoiles australes, publié en 1679, donna quelques réflexions sur la théorie de la Lune, et fixa cette équation à la neuvieme partie de celle du Soleil; c'est-à-dire, à 13′ environ : elle est de 11′ 49″ dans les tables de Flamsteed et de Halley; elle y est accompagnée de deux équations analogues, l'une de 20′ pour l'apogée, et l'autre de 9′ ½ pour le nœud, que Newton introduisit (1462), et qu'il reconnut être une suite de la théorie de l'attraction.

1452. L'équation annuelle est de 11′ 20″ dans les tables d'Euler (*Alman. de Berlin*, 1750) et dans les premieres tables de Mayer; de 10′ 36″ dans les premieres tables de Clairaut, de 12′ 57″ dans celles de d'Alembert (*Recherches*, *etc. pag.* 230). Mayer la fait dans ses secondes tables de 11′ 16″, sans doute d'après les observations; car la théorie de l'attraction ne la détermine pas d'une maniere assez exacte : aujourd'hui on la fait de 11′ 8″ 6.

1453. Il est facile de comprendre comment on devoit découvrir l'équation annuelle; il ne s'agissoit que de calculer plusieurs lieux de la Lune ou plusieurs observations d'éclipses en différens temps

(a) Flamsteed ajoute qu'elle se meut plus lentement, quand la Terre est fort éloignée du Soleil; mais c'est le contraire.

de l'année, sur les tables où l'on employoit déja l'équation de l'orbite, l'évection et la variation; tous ces calculs s'accordoient avec les observations au mois de janvier et au mois de juillet : ils s'en écartoient constamment d'abord au mois de mars, ensuite au mois de septembre en sens contraire; cela suffisoit pour faire voir qu'il y avoit une inégalité qui étoit à son *maximum* toutes les fois que le Soleil étoit dans ses moyennes distances. Cette équation annuelle est la plus grande dans les distances moyennes du Soleil, quoiqu'elle dépende du plus grand et du plus petit éloignement, par la même raison que l'équation de l'orbite est nulle dans les deux apsides, et la plus grande dans les moyennes distances (1257). Aussitôt que la vîtesse actuelle cesse d'excéder la vîtesse moyenne, la somme des excès accumulés jusqu'alors, c'est-à-dire l'équation totale, se trouve la plus forte et elle est à son *maximum;* cette équation provenant de l'excès de la vîtesse doit augmenter sans cesse, tant que cette vîtesse surpasse la moyenne, quelque petite que soit la différence.

Des petites inégalités de la Lune.

1454. JUSQU'ALORS la théorie de la Lune n'étoit composée que des quatre équations dont nous avons parlé; Horoccius les avoit employées de la maniere la plus exacte. Halley, en 1679, lui rendoit cette justice en disant: *Unica verò* (theoria) *Horoccii nostratis ad veritatem naturalem accedere videtur.* En même temps il assure que l'évection et la variation peuvent se calculer à la fois par une seule hypothese, en supposant que dans la ligne des syzygies l'orbite de la Lune est comprimée au-dedans et vers la Terre d'environ la 90ᵉ partie de la distance moyenne, et qu'elle est alongée d'autant dans la ligne des quadratures. Halley n'accompagne son idée d'aucune espece de calcul; il se contente de dire que cela est très d'accord avec les lieux de la Lune observés par Cassini. Paris étoit alors le seul endroit où l'on fît habituellement une suite d'observations.

1455. Des trois inégalités de la Lune découvertes avant le temps de Képler, les deux dernieres avoient un rapport trop visible avec le Soleil pour que ce génie actif et pénétrant n'en cherchât pas la cause physique dans le Soleil. La Lune, disoit-il, est mise en mouvement par deux forces, savoir, une qualité qui émane de la Terre et qui entraîne la Lune autour d'elle, et une autre force qui provient des rayons solaires; en sorte que quand la Lune a fait 90° depuis sa conjonction jusqu'à sa quadrature, il y en a 88 qui proviennent de la force de la Terre, et deux qui viennent de la lumiere du Soleil (*Epit. astr. Cop. pag.* 552, 564, 780). Ses idées physiques firent

naître dans la suite l'explication complete que l'attraction nous donna enfin de toutes ces inégalités (*v. liv. XXII*), et cette même attraction a fait reconnoître une multitude d'autres inégalités dont nous avons à parler.

On a écrit sans fondement que Halley avoit proposé une autre correction pour la théorie d'Horoccius, c'est-à-dire, celle qui a été fixée depuis par Newton à 2′ 25″ (1463). Halley n'en avoit aucune idée; il indiquoit seulement une cause des changemens de latitude que Tycho avoit découverts, en disant que le Soleil, qui envoyoit obliquement ses rayons à la Lune, l'obligeoit, par une certaine puissance, de s'approcher de lui : *Efficit potentiâ quâdam insitâ ut propiùs ad se accedat* (*Halley, Catal. stell. austr.* 1679); mais Newton, plusieurs années auparavant, avoit déja eu des idées de l'attraction universelle (3526).

1456. Les observations seules n'avoient pu faire découvrir aux astronomes que des inégalités qui alloient à plusieurs minutes; peut-être l'équation annuelle n'eût pas même été reconnue par les observations, si elle n'avoit eu un retour constant dans les mêmes saisons de l'année, ce qui la rendoit remarquable (1453). Aussi toutes les autres petites inégalités dont il nous reste à parler, n'ont été d'abord soupçonnées que par l'idée de l'attraction, et n'ont été déterminées qu'en comparant avec cette théorie un grand nombre de bonnes observations : il étoit réservé à Newton de faire le plus grand pas dans la théorie de la Lune, comme dans toute la physique céleste; guidé par le principe de la gravitation universelle, et aidé des observations de Flamsteed, il détermina la quantité de plusieurs nouvelles équations, avec les époques, et les moyens mouvemens. Cette théorie parut en 1702, dans l'ouvrage intitulé : *Davidis Gregorii astronomiae physicae et geometricae elementa, Oxonii*, 1702, *in-folio. Genevae*, 1726, 2 *vol. in*-4°.

C'étoit la partie la plus précieuse de cet ouvrage de Gregory, qui contient d'ailleurs la plupart des grandes découvertes qu'on avoit faites dans la physique céleste. La théorie de Newton reparut de nouveau cinq ans après avec des explications et des tables (*Praelectiones astronomicae Cantabrigiae habitae a Guillelmo Whiston*, 1707, *in*-8°). Newton la publia aussi dans la seconde édition de son fameux ouvrage intitulé : *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1713, *in*-4°. Ce fut alors que l'on commença de construire des tables conformes à ces nombres.

1457. HORREBOW, professeur à Copenhague, publia, dans un journal littéraire de Hall (*Bibliotheca novissima*), quelques tables

de la Lune qu'il assujettit autant qu'il put à la théorie de Newton; il les compara avec plus de 30 observations qui s'y accordoient assez bien. Le P. Grammatici publia de petites tables de la Lune (voyez *Tabulae lunares ex Theoria Newtonis, a quodam Uranophilo e Soc. Jesu, Ingolstadii*, 1726), et calcula plus de 60 observations choisies sur ces tables, sans y trouver d'erreurs sensibles. Leadbetter donna en 1728 de nouvelles tables de tous les mouvemens célestes, tirées de différens auteurs, et, l'année suivante, des tables particulieres de la Lune faites sur la théorie de Newton, qui ont été réimprimées dans l'ouvrage intitulé, *Uranoscopia, or the contemplation of the heavens, by Charles Leadbetter*, London, 1735, 2 *vol.* 8°.

1458. Robert Wright publia la même année une adresse aux lords préposés pour examiner les mémoires sur la découverte des longitudes; il fit voir, par le calcul de plusieurs observations comparées avec les tables, que la théorie de la Lune étoit suffisante pour remplir cet objet; il publia ensuite ses tables avec le détail du calcul de 30 observations, dont la plupart sont des éclipses de Lune (*New and correct tables of the lunar motions, according to the Newton's theory, by Robert Wright*, 1732, 4°).

Ange Capelli, chanoine de Parme, donna en 1733 des tables de la même nature (*Astroscopia numerica, Venet. in*-4°), et il calcula le lieu de la Lune pour tous les jours de l'année 1736, afin que les astronomes pussent y comparer leurs observations. On les publioit dans le journal intitulé, *Commercium litterarium ad astronomiae incrementum, t. I, auctore Michaele Adelbulnero; Norimbergae*, 1735, *in*-4°. Ce journal cessa au mois de mai 1739. Il parut encore d'autres tables calculées sur le même principe. Voy. *The practical astronomy of the moon, or new tables of the moon's motions, exactly constructed from sir Isaac Newton's theory, by Richard Dunthorne; Cambridge*, 1739, 8°.

1459. Flamsteed, qui, depuis ses dernieres tables publiées en 1681, n'avoit pas cessé de travailler à la même théorie, calcula aussi des tables, que M. le Monnier a publiées depuis, avec des augmentations (*Institutions astronomiques*, 1746).

Enfin celles de Halley, qui étoient imprimées depuis 1719, ont été rendues publiques en 1749; Halley y avoit négligé de petites équations, dont il ne croyoit pas la détermination assez sûre; et Newton disoit à Joseph de l'Isle, en 1724, que si Halley eût employé toutes ses petites équations, et qu'il eût ajouté une minute et demie à la longitude de la Lune pour son accélération physique dans notre siecle (1483), il n'auroit trouvé presque aucune différence

entre l'observation et le calcul. Voy. *les lettres de M. de l'Isle sur les tables astron. de Halley* (Mém. de Trévoux, janv. et fév. 1750).

D'un autre côté Halley négligea deux des équations de Newton, parcequ'il trouva qu'il n'étoit pas possible de les déterminer par les observations que l'on avoit; il disoit que si les erreurs de ses tables alloient quelquefois à 5', c'étoit dans les circonstances où Flamsteed avoit rarement observé la Lune, et où par conséquent Newton avoit manqué de secours pour le calcul des équations. Ajoutons que les observations de Flamsteed n'avoient pas toujours le degré d'exactitude nécessaire pour un objet si délicat. Halley lui-même reconnut l'imperfection de ses tables, et il l'exposa aux yeux du public avec le moyen qu'il croyoit propre à y remédier, c'est-à-dire, la table des erreurs pendant 18 ans (1501).

1460. Jusqu'alors c'étoit la théorie de Newton, et même les nombres qu'il avoit calculés, qui avoient produit toutes les tables de la Lune. Mais un géometre aussi laborieux que profond commençoit vers 1745 à s'occuper des calculs de l'attraction, c'étoit le célebre Léonard Euler; il vit bientôt que Newton n'avoit pas tiré des calculs de l'attraction tout ce qu'on pouvoit en conclure, et il donna dans ses opuscules en 1746 de nouvelles tables de la Lune, où il avoit fait usage de la théorie autant qu'il lui avoit été possible jusqu'alors : il les perfectionna encore trois ans après dans l'almanac astronomique de Berlin pour 1750 ; mais il n'avoit pas assez employé le secours des observations.

Tobie Mayer, qui avoit étudié ces calculs dans la piece d'Euler sur Saturne, calcula aussi, en 1751, 17 équations pour la Lune, et il différoit peu de Clairaut, qui s'occupoit vers le même temps des mêmes recherches : ayant comparé les calculs de la théorie avec les observations, il trouva moyen de les corriger si bien, qu'il publia en 1753, dans les mémoires de Gottingen, des tables qui ne s'écartoient jamais de l'observation de 2' (1471), tandis que dans les tables de Halley il y avoit quelquefois des erreurs de 7 à 8'. Clairaut et d'Alembert donnerent aussi des tables de la Lune en 1754.

Le succès de Mayer, dans ses premieres tables, l'encourageoit à les perfectionner encore; il rectifia tous les coëfficiens de l'équation générale de l'orbite lunaire par un grand nombre d'observations, et en 1755 il envoya de nouvelles tables à Londres, comme étant dignes de concourir au prix des longitudes. Après sa mort, arrivée en 1762 (543), sa veuve envoya à Londres une copie de ces tables encore perfectionnées, que Bradley vérifia par ordre des commissaires des longitudes, et qui furent trouvées si exactes et si précieuses

pour la navigation, qu'on donna à sa veuve une récompense de 3000 liv. sterlings (ou 72000 liv. de France). On a fait imprimer ces tables aux dépens de l'état en 1770. On chercha encore à les corriger, et le bureau des longitudes chargea M. Mason de faire pour cet objet un travail suivi, comme on le voit dans la préface du *Nautical almanack* de 1774 et 1775. Il trouva qu'on approchoit un peu plus des observations, en employant une équation —16″ 4 sin. (☾—apogée ☉), en ôtant 1″ des longitudes moyennes, 56″ de l'apogée, et ajoutant 45″ au lieu du nœud : c'est ainsi qu'on a calculé le *Nautical almanack* de 1777 et des années suivantes. Enfin M. Mason les a corrigées de nouveau d'abord en 1778, ensuite en 1780; celles-ci ont servi pour le *Nautical almanack* de 1789 et des années suivantes. Il y a 8 équations de plus, et les erreurs ne passent guere 30″: ce sont celles que l'on trouve ici et que nous allons expliquer.

1461. On comprend en général que, puisque la distance de la Lune et du Soleil, par rapport à l'apogée de chacun, et leurs distances réciproques, produisent de grandes inégalités, ces élémens doivent influer les uns sur les autres, et que leurs différentes combinaisons doivent produire d'autres inégalités; voilà pourquoi nos tables ont pour argumens les différentes combinaisons des deux anomalies, et des distances du Soleil à la Lune.

1462. A l'équation annuelle fixée par Horoccius, Newton avoit joint une équation annuelle pour l'apogée et pour le nœud : ces trois équations sont proportionnelles à l'équation de l'orbite du Soleil, parcequ'elles ne dépendent que de la distance du Soleil, qui, lorsqu'il est plus près de la Terre, dilate l'orbite de la Lune et retarde par conséquent son mouvement : il augmente au contraire le mouvement de l'apogée et des nœuds, qui, n'ayant pas d'autre cause que l'action du Soleil, devient plus fort lorsque la cause augmente. L'équation annuelle est, dans Newton, de 20′ 0″ pour l'apogée, et 9′ 30″ pour le nœud, dont le mouvement est plus lent que celui de l'apogée; elles sont, dans les nouvelles tables, de 21′ 42″ et 9′ 12″.

L'équation semestre qui, dans Newton, étoit de 3′ 45″ avoit le nom de seconde équation, il la faisoit dépendre du double de l'*argument annuel;* elle est comprise en partie dans la IXe équation de nos tables : elle vient de ce que la force perturbatrice du Soleil est plus grande lorsque le grand axe de l'orbite de la Lune est dirigé vers le Soleil, et doit produire une inégalité que Newton trouva, par les observations, d'environ 3′ 45″ dans les moyennes distances du Soleil, lorsque la ligne des apsides est éloignée de 45° du Soleil; elle n'est que de 57″ dans les tables de Mayer, parcequ'il y a d'autres

d'autres équations qui corrigent la différence. Clairaut la faisoit de 2′ 13″.

1463. L'équation de 60″, qui dépend de la double distance du Soleil au nœud, ou l'équation semestre de Halley, et la dixieme dans nos tables, vient de ce que l'action du Soleil sur la Lune est un peu plus grande quand la ligne des nœuds passe par le Soleil; elle étoit de 47″ dans Newton, où elle formoit la troisieme équation. Clairaut la fait de 1′ 21″, d'Alembert de 1′ 9″ (*Recherches, etc. pag.* 28). Mayer l'avoit faite de 58″ : elle est ici de 60″.

L'équation que Halley appelle la quatrieme équation, et qu'il ne faisoit que de 2′ 25″, est appellée par Newton la sixieme équation, ou *la seconde équation du centre;* son *argument* (ou l'angle dont elle dépend) est la somme de la distance de la Lune au Soleil et de la distance de leurs apogées; ou le double de la distance de la Lune au Soleil moins l'anomalie moyenne de la Lune, plus l'anomalie moyenne du Soleil. On voit en général que si la Lune étoit en conjonction et qu'elle fût apogée, le Soleil étant périgée elle seroit le plus près du Soleil qu'il soit possible, et par conséquent plus exposée à l'effet de la gravitation du ☉, qui diminue sa pesanteur vers la Terre. Newton, qui faisoit sa sixieme équation de 2′ 10″, l'employoit après l'équation de l'orbite, de sorte qu'il employoit le vrai lieu de la Lune pour la trouver; mais Halley employoit celle-ci avant l'équation de l'orbite, afin que le lieu de la Lune étant plus rapproché du vrai, il pût faire trouver l'excentricité et l'équation de l'orbite avec plus de précision; cette équation est de 2′ 3″ dans nos tables où elle est la sixieme.

1464. Halley n'employoit que ces trois petites équations avec l'équation annuelle: ce n'étoit pas assez pour parvenir à la précision d'une minute; Mayer en ajouta six autres; Clairaut en employoit 18 indépendamment des quatre grandes équations, et de celles de la latitude; et il y en a autant dans nos tables.

1465. La septieme équation, suivant Newton et Flamsteed, est de 2′ 20″, dans les quadratures; elle dépend de la distance de la Lune au Soleil; et elle est soustractive dans les six premiers signes de la distance; Mayer la fait de 1′ 57″ et Clairaut de 3′ 40″; elle est comprise dans la table de la variation, c'est-à-dire dans notre XXe équation.

1466. L'*Évection* (1441) est variable à raison des distances du Soleil ou de la Lune à la Terre; on trouvera ces accessoires dans les équations V^e^, VIe, VIIe, et dans la IXe, qui dépend de l'argument annuel. Dans la table de la variation, qui est la 20e équation, Mayer

a encore ajouté une autre petite équation qui a le même argument et qui tient à l'évection (1465). D'Alembert a décomposé ces équations pour examiner la maniere dont sa théorie s'accordoit avec les équations supposées dans les premieres tables de Mayer; on peut voir la table qu'il en donne dans ses *Recherches*, etc. tom. III, *pag.* 28.

1467. La variation (1445), produite par la force du Soleil qui accélere ou retarde le mouvement de la Lune dans son orbite (3626, 3639), forme l'équation XX, quant à sa partie moyenne: mais elle devient plus grande quand le Soleil s'approche de la Terre ou que la Lune s'en éloigne; les changemens qu'elle éprouve par la distance du Soleil à la Terre et qui dépendent de l'anomalie du Soleil, sont renfermés dans les équations II et III, et ceux qui proviennent du changement de distance de la Lune à la Terre, dans l'équation IV et dans une partie de la Ve. Newton admettoit un changement de 2′ 10″ en plus et en moins dans la variation; il faisoit la plus grande variation de 37′ 25″, le Soleil étant périgée, et de 33′ 4″ le Soleil étant apogée. Les équations précédentes produisent à-peu-près le même résultat.

1468. L'équation VIII, de 42″, est un supplément nécessaire de l'équation annuelle (1448); car cette inégalité vient de la force du Soleil sur la Lune, en tant que l'orbite du Soleil est excentrique, et que la distance à la Terre est variable : mais cette équation annuelle étant considérable, elle ne peut manquer de changer lorsque la distance de la Lune à la Terre varie; car alors non seulement la Lune est plus ou moins près du Soleil, mais sa vîtesse, devenue différente, donne aussi plus ou moins de prise à l'action du Soleil: pour cet effet, Mayer a ajouté l'équation VIII, dont l'argument est l'anomalie moyenne de la Lune moins celle du Soleil; et comme cette table ne suffit pas encore pour représenter toute l'inégalité, il a renfermé le reste d'une façon particuliere dans l'équation de l'apogée (1451), qui est de 21′ 42″, qu'on applique à l'anomalie moyenne.

1469. Les inégalités renfermées dans les équations X et XX dépendent de l'inclinaison de l'orbite lunaire, parceque la force du Soleil agit plus ou moins obliquement sur la Lune, suivant qu'ils sont l'un et l'autre plus ou moins éloignés des nœuds, et situés dans des plans plus ou moins différens; dès-lors le mouvement de la Lune en est diversement affecté: à cela se joint l'excentricité qui rend cette force plus grande dans l'apogée de la Lune. Voilà pourquoi

l'équation XXI dépend du double de l'argument de latitude moins l'anomalie de la Lune.

1470. Indépendamment des trois grandes équations et des neuf petites, dont j'ai tâché de donner du moins une idée générale, il y en a encore quelques unes que Mayer dit avoir réunies aux précédentes (quand il a pu les assujettir à un même argument), sur-tout à l'équation de l'anomalie moyenne; il y en a d'autres enfin qu'il a regardées comme négligeables par leur petitesse, ou dont il n'a pu déterminer assez exactement la véritable quantité par les observations, mais qui sont employées dans les nouvelles tables corrigées par Mason en 1780.

1471. Mayer, au moyen de neuf petites équations, combinées et ajustées sur 200 observations de la Lune, tant de ce siecle-ci que du précédent, étoit venu à bout dès 1753 de représenter ces observations de maniere qu'à peine s'en trouvoit-il dix dont le calcul s'écartât d'une minute et demie; aucune des erreurs ne montoit à deux minutes, et le nombre de celles qui n'alloient qu'à quelques secondes étoit considérablement le plus grand : ces tables furent imprimées plusieurs fois ; et il les perfectionna encore (1460).

1472. On peut voir la comparaison des secondes tables avec les observations dans la *Connoiss. des temps* de 1774, 1779 et 1783, et dans le tome VIII de mes éphémérides. Sur 1137 observations l'erreur n'alloit que cinq fois à une minute ou un peu au delà.

Mais, dans les nouvelles tables que nous publions ici, l'erreur passe rarement 30″; car, sur 180 observations qu'on a données à la fin de l'édition angloise de ces tables, il n'y en a que 7 où l'erreur passe 30″, et ces 180 observations sont les seules des 1137 de Bradley (1524) où les tables corrigées en 1778 différoient de 20″ de l'observation, et les nouvelles tables de 1780 sont plus exactes que celles de 1778; ainsi il paroît que, sur les 1137 observations, il n'y en a que 7 où l'erreur aille entre 30″ et 43″.

1473. Voici les équations telles qu'elles résultent des nouvelles tables que j'ai décomposées pour donner séparément celles qui sont réunies ensemble dans une même table.

Pour former les argumens de ces équations, on commence par chercher le vrai lieu du Soleil, par les élémens qui ont été donnés ci-devant (1265, 1312, 1330), ensuite le lieu moyen de la Lune, de son apogée et de son nœud (1479) pour le moment donné; le lieu de l'apogée, retranché du lieu moyen de la Lune, donne son anomalie moyenne; on applique ensuite à cette anomalie moyenne de la Lune l'équation annuelle marquée A, qui vient des inégalités de

l'apogée 21′ 42″ sin. anom. moy. ☉, — 14″ sin. 2 anom. et au supplément du nœud son équation annuelle — 9′ 12″ sin. anom. ☉: mais on n'emploie l'anomalie de la Lune corrigée, que pour l'équation de l'orbite, pour laquelle on corrige encore l'anomalie avec les 18 premieres équations; pour la variation, l'on applique à la distance de la Lune au Soleil même l'équation de l'orbite; pour la suivante on emploie la longitude corrigée par la variation; et pour la réduction l'on emploie la longitude vraie de la Lune dans son orbite.

Formule du lieu de la Lune.

		°	′	″	
TABLE. I.	+	0°	11′	8″6	sin. anomalie moyenne du ☉
Equat.an.	—		0	8,9	sin. 2 anomalie moy. ☉
II.	—	0	0	55,9	sin. 2 distance moyenne ☾ ☉ + anomalie moyenne ☉
III.	—	0	1	15,3	sin. 2 dist. moy. ☾ ☉ — anomalie moy. ☉
IV.	+	0	0	57,8	sin. 2 dist. moy. ☾ ☉ — anom moy. ☾
V.	—	1	20	28,4	sin. 2 dist. moy. ☾ ☉ — anom. moy. ☾
Evection.	+		0	35,0	sin. 4 dist. moy. ☾ ☉ — 2 anom. moy. ☾
VI.	+		2	3,5	sin. arg. évection + anom. moy. ☉
VII.	+		0	46,5	sin. arg. évection — anom. moy. ☉
VIII.	+		0	42,0	sin. anom. moy. ☾ — anom. moy. ☉
IX.	+		0	22,7	sin. dist. moy. ☾ ☉ — anom. moy. ☾ ou sin. (apog. ☾ — ☉)
	—			57,4	sin. 2 dist. moy. ☾ ☉ — 2 anom. ☾, ou sin. 2 (apog. ☾ — ☉)
X.	+		1	0,4	sin. 2 dist. moy. ☾ ☉ 2 arg. moy. de latit. ou sin. 2 (☊ — ☉)
XI.	—			17,0	sin. dist. ☾ ☉ + anom. moy. ☉
XII.	—			3,1	sin. dist. ☾ ☉ — anom. moy. ☉
XIII.	—			3,7	sin. 2 dist. ☾ ☉ + 2 anom. moy. ☾
XIV.	+			12,4	sin. 4 dist. ☾ ☉ — anom. moy. ☾
XV.	—			6,3	sin. 2 dist. ☾ ☊ — 2 anom. moy. ☾
XVI.	+			8,3	sin. 2 dist. ☾ ☉ + anom. moy. ☾
XVII.	—			5,3	sin. 2 dist. ☾ ☉ — anom. moy. ☾ — 2 dis. ☾ ☊
XVIII.	+			7,7	sin. longit. ☊. On néglige celle-ci.
XIX.	—	6	18	15,30	sin. anom. ☾ corrigée par les équ. précéd. et par son éq. A.
Equation	+		13	0,08	sin. 2 anom. ☾
de l'orb.	—			37,18	sin. 3 anom. ☾
	+			2,03	sin. 4 anom.
	—			0,12	sin. 5 anom.
	—		1	56,4	sin. dist. ☾ ☉ corrigée par les équations précédentes.
XX.	+		35	41,1	sin. 2 dist. ☾ ☉
Variat.	+			5,2	sin. 3 dist. ☾ ☉
	+			8,8	sin. 4 dist. ☾ ☉
XXI.	+		1	24,1	sin. 2 arg. latit. corrigés — anomal. corrigée.
XXII.	—		6	47,7	sin. 2 argum. latit. (1130,3988).
Réduct.					
XXIII.	—		0	18,0	sin. longit. moyen. ☊, ou 16″8 (2899).
Nutation.					

1474. On trouve dans la seconde édition des tables de Clairaut, faite en 1765, une formule du lieu de la Lune, dans laquelle il n'employoit que les longitudes moyennes du Soleil et de la Lune, ce qui en rendoit l'usage plus facile : mais le nombre des équations est un peu plus considérable, et je crois que l'exactitude de ces tables n'est pas aussi grande, à en juger par les erreurs dont on trouve le catalogue dans la *Connoissance des temps* de 1783.

M. Schulze, dans les tables de Berlin, et dans les Mém. de Berlin pour 1781, a donné une formule pour calculer les premieres tables de Mayer par des moyens mouvemens avec 18 tables ; il néglige 22 termes qui ne passent pas 10″ après avoir déja omis d'avance ceux qui ne passoient pas 3″ : or, dans les dernieres tables de la Lune, on a employé même des équations de 3 ou 4″.

1475. J'aurois voulu donner ici une notion plus distincte de toutes ces inégalités de la Lune, leur quantité, la maniere dont on les a découvertes et dont on peut les constater ; mais dans tout ce qui s'est fait jusqu'ici sur cette matiere, il y a encore trop d'incertitude et d'obscurité. Clairaut emploie 22 équations, Euler en emploie 42 dans ses dernieres tables de 1772 : mais les géometres qui s'en sont occupés depuis 1745, n'ont point donné les détails de leurs procédés, et ne sont point d'accord sur les quantités des équations, sur leur utilité, sur leur exactitude ; il se passera bien des années avant qu'on puisse éclaircir cette matiere dans un simple traité d'astronomie.

1476. Les tables de la Lune, quoique déduites en apparence de la théorie de l'attraction, ont pour fondement les observations mêmes ; car quoique Newton eût trouvé à peu-près la forme de ses équations par le principe de l'attraction, il en avoit déterminé la quantité par les observations de Flamsteed. Mayer, ayant cherché de même dans la théorie la forme de ses tables, les ajusta sur les observations de Bradley, à force de tentatives, d'essais et de calculs, et c'est ce qu'a fait encore Mason, en les perfectionnant de nouveau en 1780 (1460).

Cependant le seul principe de l'attraction devroit suffire, ce semble, pour calculer, sans le secours de l'observation, toutes les petites inégalités de la Lune ; c'est ce qu'ont entrepris les plus habiles géometres de ce siecle : mais d'Alembert avoue que la valeur des coëfficiens des équations lunaires, trouvés par la théorie, est encore fort incertaine. « Il me paroît très douteux (ajoute-t-il) « qu'on puisse parvenir à les fixer par la théorie seule ; il ne faut pas « se presser d'assurer aux tables de Mayer l'exactitude astrono-

« mique ; d'ailleurs il y a employé un tâtonnement fait sur les seules « observations » (*Mercure de sept.* 1757). D'Alembert dit à peu-près la même chose, en plusieurs endroits de ses *Recherches*, sur la nécessité d'avoir recours aux observations pour déterminer ces coëfficiens (III, 31).

1477. Clairaut, dans le journal des savans (déc. 1757), répondit que Mayer n'avoit omis dans ses tables aucune des équations qui sont essentielles pour la longitude de la Lune, et qui ne demandent pas une extrême attention dans les calculs de la théorie ; et cette réponse indique encore que, dans les autres équations qu'on peut ajouter à celles de Mayer, il reste quelque doute du côté de la théorie : je sais d'ailleurs que Clairaut a fait un grand usage des observations pour rectifier les coëfficiens de ses équations, et qu'il a varié beaucoup sur la valeur de quelques unes.

1478. On trouvera dans le XXIIe livre la forme et les principes de ces recherches (3625). Nous n'en suivrons pas le détail pour chacune des inégalités de la Lune, parceque ce détail est prodigieux, et qu'il exigeroit des volumes ; on trouvera tout ce qui s'est fait là-dessus dans les ouvrages de Clairaut, d'Alembert, et Euler, savoir, dans la piece de Clairaut imprimée en 1752 et 1765, dans la théorie d'Euler 1753 et 1772, et dans les *Recherches sur différens points importans du systéme du monde*, par M. d'Alembert, 1754. On y trouve des tables de la Lune de d'Alembert ; elles ont été publiées de nouveau avec des corrections dans le second volume de ses *Opuscules mathématiques* en 1762, avec plusieurs nouvelles considérations sur la théorie de la Lune. Les volumes suivans de ses Recherches et de ses Opuscules contiennent beaucoup de supplémens à ce travail. On peut ajouter à ces ouvrages primitifs ceux de Mayer, de Simpson, du P. Walmesley, du P. Frisi, et sur-tout de M. de la Grange.

1479. *Elémens principaux de la théorie de la Lune tirés de l'observation, selon divers auteurs.*

Mouvement séculaire pour cent années juliennes, dont 25 sont bissextiles, ou 36525 jours moyens.	Képler et Horoccius,	10ˢ 7° 48′ 51″
	Newton, Flamsteed et Halley,	10 7 50 25
	La Hire,	10 7 50 1
	Cassini,	10 7 49 52
	Mayer, *premieres tables,*	10 7 52 20
	secondes tables,	10 7 53 35
	M. de Lambre (1487),	10 7 53 12

		s	°	'	"
Mouvement de l'apogée pour cent années juliennes.	Képler et la Hire,	3	19	14	16
	Horoccius,	3	19	4	16
	Flamsteed, Halley, et Mayer, *dans les deux éditions*,	3	19	11	15
	Cassini,	3	19	14	16
	Bailly, (*Mém. ac.* 1763)	3	19	5	0
Mouvement séculaire du nœud.	Képler, Horoccius, et la Hire,	4	14	11	7
	Flamsteed et Halley,	4	14	11	15
	Cassini,	4	14	11	5
	Mayer, *premieres et secondes tables*,	4	14	11	15
Epoque de la longitude moyenne de la Lune pour 1750.	Képler,	6	8	13	49
	Horoccius,	6	8	12	49
	La Hire,	6	8	18	5
	Flamsteed,	6	8	16	19
	Halley,	6	8	15	19
	Cassini,	6	8	14	55
	Mayer, *premieres tables*,	6	8	16	53
	secondes tables,	6	8	17	19
	Mason, en 1780,	6	8	17	16
	M. de Lambre (1787)	6	8	17	15
Epoque ou longitude de l'apogée pour 1750.	Képler,	5	21	30	33
	Horoccius,	5	20	30	33
	La Hire,	5	20	40	54
	Flamsteed,	5	20	58	52
	Halley,	5	20	58	52
	Cassini,	5	21	1	21
	Mayer, *anc. Tables*,	5	20	56	47
	nouvelles tables,	5	20	55	51
	Mason, en 1780,	5	20	54	53
Epoque ou longitude du nœud pour 1750.	Képler,	9	10	33	14
	Horoccius,	9	10	15	14
	La Hire,	9	10	21	0
	Flamsteed,	9	10	15	0
	Halley,	9	10	13	59
	Cassini,	9	10	18	8
	Mayer, *premieres et sec. tables*,	9	10	19	9
	Mason, en 1780,	9	10	20	0

Equation de l'orbite.	Flamsteed, *moyenne*,	6° 18′ 43″
	Euler,	6 18 18
	D'Alembert, III, 29,	6 18 43
	Clairaut,	6 18 1
	Mayer, *premieres tables*,	6 18 44
	sec. tabl., et M. Mason,	6 18 32

1480. L'excentricité moyenne, employée par Clairaut d'après, Flamsteed et Halley, est 0,05505 ou 5505 parties, dont la distance moyenne contient 100000. Dans la suite il la diminua de $\frac{1}{171}$, pour rapprocher sa formule des observations auxquelles il l'avoit comparée; mais il a conservé la premiere dans sa seconde édition, *page* 59. Cette excentricité donne pour équation 6° 18′ 37″; mais, pour trouver celle de Mayer 6° 18′ 31″ 6, il faut supposer l'excentricité 0,05503568. D'Alembert croyoit que la table de l'équation de l'orbite, dans Mayer, renfermoit encore quelque partie des perturbations du Soleil (III, 29). Mais l'excentricité 0,05503568 donne par le calcul rigoureux dans l'ellipse les mêmes équations que la Table de Mayer. On trouve dans sa Théorie, *page* 50, que l'excentricité lui avoit paru de 5454, et qu'il l'augmenta de $\frac{1}{300}$: je crois qu'il faut lire 5484, ce qui donneroit pour excentricité 0,0550267, et pour équation 6° 18′ 29″; au lieu qu'en supposant qu'il la faisoit d'abord de 5454, on trouveroit 6° 16′ 21″, ce qui differe trop de ses tables : mais il y avoit plusieurs incohérences dans ses calculs.

1481. Les révolutions de la Lune, de son apogée et de son nœud, peuvent se déduire de leurs mouvemens séculaires : en supposant la précession de 1° 23′ 45″ par siecle, et les moyens mouvemens tels qu'ils sont dans les nouvelles tables (1479), je trouve les révolutions (1422) de la maniere suivante.

Révolution tropique de la Lune,	27ʲ 7ʰ 43′ 4″6795
Révolution sidérale de la Lune, en supposant la précession 1° 23′ 45″,	27 7 43 11,5259
On trouve 136 décimales de plus, en supposant la précession plus forte de 10″; de même dix secondes de changement sur le mouvement séculaire de la Lune produisent un centieme de seconde sur la durée de la révolution.	
Révolution synodique, en supposant le mouvement du Soleil 46′ 0″,	29 12 44 2,8283
Année lunaire de 12 révolutions synodiques,	354 8 48 35,

Révolution

Révolution anomalistique,	27^j 13^h 18′ 33″9499
Révolution par rapport au nœud (1490),	27 5 5 35,6030
Révolution tropique de l'apogée (1432), 8 ans 311^j ou	3231 8 34 57,6177
Suivant Cassini, *pag.* 313,	3231 8 0
Révolution sidérale de l'apogée,	3232 11 11 39,4089
Révolution tropique du nœud, 18 années communes et 228 jours, ou	6798 4 52 52,0296
Suivant Cassini, *pag.* 288,	6798 7 0
Révolution sidérale du nœud,	6793 7 13 17,7440
Mouvement diurne de la Lune par rapport à l'équinoxe,	13° 10′ 35″,02784394
Mouvement diurne de l'apogée,	0 6 41,069815195
Mouvement diurne du nœud,	0 3 10,638603696

Le mouvement de la Lune, par rapport aux étoiles fixes (1422), étant pris pour unité, celui de l'apogée est 0,008452264448 (1432), et celui du nœud 0,04021853526, aussi par rapport aux étoiles (1490); c'est celui dont on a besoin dans la théorie de l'attraction.

1482. La distance moyenne de la Lune à la Terre est de 86351 lieues, chacune de 2283 toises (1703).

Le diametre vrai de la Lune (1702) nous apprendra que son volume est la 49ᵉ partie de celui de la Terre. La masse ou la quantité de la matiere de la Lune est $\frac{1}{66}$ de celle de la Terre (3568).

Accélération apparente dans le mouvement de la Lune.

1483. L'ÉQUATION SÉCULAIRE qu'on trouvera dans les tables de la Lune exprime une accélération qu'on a cru remarquer dans les moyens mouvemens de la Lune; la durée de sa révolution synodique, en mettant à part toutes ses inégalités, est plus courte actuellement de 0″5732, ou de 34 tierces de temps, qu'elle n'étoit il y a 2000 ans : ce qui produit un degré d'erreur sur le lieu de la Lune, quand on le calcule pour l'année 300 avant notre ere, en employant le mouvement de la Lune qui convient aux observations modernes, c'est-à-dire, $10^s 7° 53′ 12″$ par siecle.

Halley, sur la fin du dernier siecle, fut le premier qui remarqua cette accélération apparente dans le mouvement de la Lune (*Philos. Trans. n°.* 204 *et* 218) : il en parla en 1693 et 1695 à l'occasion des observations d'Albategnius et des ruines de Palmyre. Newton, dans la seconde édition de ses Principes, *pag.* 481, cite Halley comme ayant reconnu le premier cette accélération; Dunthorn a examiné

ensuite cette matiere (*Phil. Trans.* 1749 *et* 1750, *n°.* 491, *p.* 162); Mayer en parle dans le second volume des Mémoires de Gottingen (*Comment. soc. Gotting.* 1752, *pag.* 388); enfin j'ai discuté de nouveau cet objet dans les mémoires de l'académie pour 1757. Voici en peu de mots le résultat de mes recherches à ce sujet.

1484. Pour connoître l'inégalité du moyen mouvement de la Lune entre les anciennes observations de l'an 720 avant J. C. (1419) et celles de notre siecle, il faut nécessairement en avoir qui aient été faites dans un siecle intermédiaire, et l'on en trouve très peu. Les seules observations que l'on puisse employer sont trois éclipses, deux de soleil, et une de Lune, observées à Geffa, à 6 ou 7 milles du Caire, en 977, 978 et 979, par Ibn-Júnis (358), astronome du calife d'Egypte. Du moins ces observations sont rapportées dans un manuscrit arabe de cet auteur qui est à la bibliotheque de Leyde. On en conclut que, le 12 décembre 977, à $19^h\,21'$ temps moyen à Paris, la Lune avoit $8^s\,26°\,19'$ de longitude; le 8 juin 978 à $1^h 24'$, 2^s, $22°\,16'\frac{3}{4}$; et le 14 mai 979 à $4^h\,29'\,24''$, $7^s\,27°\,46'\,43''$ (*Philos. Trans. tom.* 46, 1749, 1750; *Abr. X*, 87; *Mém. de l'ac.* 1757; *Mém. de Berlin* 1773 et 1782). Dans celui-ci M. Bernoulli a calculé la troisieme éclipse, et fait voir qu'il faut rejeter les corrections que Costard faisoit dans le manuscrit (*Phil. Trans.* 1777, *pag.* 231). Pour représenter ces éclipses, j'avois trouvé qu'il falloit supposer le moyen mouvement séculaire de la Lune, $10^s\,7°\,53'\,21''$ dans ce siecle-ci, plus grand de $3'\frac{1}{2}$ que dans Cassini, et y appliquer une équation séculaire de $9''886$ pour le premier siecle. Mayer, qui ne la faisoit que de $7''$ dans ses premieres tables, l'a faite de $9''$ dans ses dernieres. L'équation de $9''$, augmentant ensuite comme le carré des temps (1166), devient de $1°$ pour l'an 300, et de $1°\,26'\,24''$ pour l'année 700 avant J. C. Elle fait que la durée de la révolution périodique de la Lune n'est, dans ce siecle-ci, que de $27^j\,7^h\,43'\,4''68$, tandis qu'elle étoit, il y a 200 ans, de $27^j\,7^h\,43'\,5''\,17$; la différence est $0''\,49$.

1485. Je dois cependant avertir que Grischow, étant à Leyde en 1749, engagea Schultens, professeur en langue arabe, à faire la recherche et la traduction du manuscrit arabe dont ces observations sont tirées. Bevis me communiqua cette traduction : on y trouve des obscurités; et Bevis pensoit même qu'on y avoit mêlé le calcul avec de véritables observations, mais cela ne paroît pas fondé. Cependant il seroit à souhaiter qu'on s'assurât mieux d'un fait aussi intéressant, et qu'on recherchât de pareilles observations dans les manuscrits arabes : les personnes instruites dans les langues orien-

tales, et qui n'ont encore presque rien fait pour nos sciences, n'auroient pas de meilleures occasions de rendre leurs études utiles (359).

1486. Au reste la nécessité de cette équation séculaire est prouvée encore par les observations faites depuis un siecle. En effet, Mayer a trouvé le mouvement pour 60 ans, $1^s\,10^\circ\,44'\,9''$, plus grand de deux minutes que ne le donnent les anciennes observations. Toutes les éclipses du dernier siecle s'accordent à la minute avec cette accélération, tandis que les erreurs vont à 2 ou 3' quand on emploie le mouvement moyen des autres tables. De plus 42 observations de la Hire, calculées avec soin par la Caille et par M. Bailly, indiquent qu'il faut ajouter environ 38" au mouvement pour 60 ans établi par Mayer dans ses premieres tables (*Mém. acad.* 1763). En effet, dans ses nouvelles tables, Mayer ajouta 45", et il fit l'équation séculaire de 9" pour le premier siecle ou de 1° pour 2000 ans, et le mouvement séculaire de $10^s\,7^\circ\,53'\,35''$.

1487. Mais M. de Lambre ayant calculé 67 observations de M. d'Agelet faites en 1780 et 1781, et les comparant avec celles de la Hire, trouve qu'il faut ajouter 13" à l'époque de 1684, et en ôter 12" en 1781 (*Éphémérides, tome VIII*). Les observations de la Caille et celles de Bradley, qui sont dans la *Connoissance des temps* de 1779 et 1782, s'accordent avec ce résultat qui donne 26" à ôter du mouvement séculaire moyen des tables de Mayer. Au reste le mouvement du Soleil en un siecle étant plus fort de 23" dans les tables de Mayer que dans les nôtres, il est naturel que celui de la Lune lui ait paru plus considérable de la même quantité. Par-là M. de la Place trouve 11" 135 pour l'équation séculaire dans le premier siecle.

Ce savant géometre a encore trouvé par les calculs de l'attraction un terme 0"044 qui augmente comme le cube des temps, qui change de signe pour les siecles antérieurs à 1700, et qui diminue de 5' 52", pour 2000 ans, la premiere équation. Par le moyen de ces deux équations M. de la Place représente, à 4' près, l'observation de l'an 720 avant notre ere, et celles des années 977 et 978, et, à une ou deux minutes près, celles des années 200 avant notre ere, et 364 après (*Connoiss. des temps* 1790, *pag.* 294; *Mém.* 1786).

Nous parlerons de la cause de cette espece d'accélération (3677). Elle vient de l'action du Soleil, à raison de la diminution de son excentricité (1277); mais elle se convertira dans la suite en un retardement.

Des nœuds et de l'inclinaison de l'orbite lunaire.

1488. L'ORBITE de la Lune est inclinée sur l'écliptique, de même que celles de toutes les autres planetes (1117) : ainsi la Lune traverse l'écliptique deux fois dans chaque révolution ; et sept jours après avoir traversé l'écliptique dans un de ses nœuds, elle s'en éloigne de 5° : sans cette inclinaison nous aurions tous les mois une éclipse de Soleil, le jour de la conjonction, et une éclipse de Lune le jour de l'opposition ; mais il y a des années entieres où il n'arrive aucune éclipse de Lune (par exemple, en 1763), parcequ'au moment de chaque opposition la Lune est trop éloignée de son nœud, et se trouve par conséquent au-dessus ou au-dessous de l'écliptique où sont toujours le centre du Soleil et l'ombre de la Terre.

LE NOEUD ASCENDANT de la Lune, ou celui par lequel elle traverse l'écliptique en s'avançant vers le nord, s'appelle quelquefois *la tête du Dragon*, et se désigne par ce caractere ☊ : le nœud descendant, ou queue du Dragon, par celui-ci ☋.

Ce qu'il y a de plus remarquable dans les nœuds de la Lune, c'est la promptitude de leur mouvement ; si la Lune traverse l'écliptique dans le premier point du Belier ou dans le point équinoxial (comme cela arrivoit au mois de juin 1764), dix-huit mois après, c'est dans le commencement des Poissons qu'elle coupe l'écliptique, c'est-à-dire que son nœud a rétrogradé de 30° ou d'un signe entier ; et il fait de même tout le tour du ciel contre l'ordre des signes, dans l'espace de 18 années communes et 228 jours. Ce mouvement des nœuds fut aisé à reconnoître en voyant la Lune éclipser, par exemple la belle étoile du Lion, ou *Regulus*, qui est sur l'écliptique même (comme cela arrivoit au mois de juin 1757). Cette étoile étant dans l'écliptique, la Lune y est aussi ; elle est donc dans son nœud : mais, quelques années après, on voit qu'au lieu d'éclipser *Regulus*, la Lune passe 5° plus haut ou plus bas, au nord ou au midi de l'étoile ; donc le nœud de l'orbite lunaire n'est plus au point de l'écliptique où se trouve *Regulus*, mais à 90° de là : il en est de même des autres étoiles. Toutes les fois que la Lune a été en conjonction avec une étoile, de maniere à en passer fort près, elle se trouve le mois suivant plus éloignée de l'étoile, et toujours de plus en plus. Au bout de 19 ans on la voit revenir par les mêmes points du ciel et couvrir les mêmes étoiles, ce qui prouve assez que le nœud de la Lune fait le tour du ciel dans cet espace de temps. Mais au bout de 9 ans et demi, la Lune, qui s'éloignoit de l'équateur de 28° dans les LUNI-

STICES [a], ne s'en écarte plus que de 18°, par une raison semblable à celle qui sera expliquée en détail (2989).

1489. Les éclipses de Lune sont de la même grandeur, quand la Lune est à la même distance de l'écliptique ou à la même distance de son nœud (1766). *Hipparque*, ayant comparé entre elles des éclipses de Lune observées depuis les Caldéens jusqu'à lui, trouva que, dans l'espace de 5458 mois lunaires, la Lune avoit passé 5923 fois par son nœud. Cela lui servit à trouver le mouvement diurne de la Lune, par rapport à son nœud, de 13° 13′ 45″ 39‴ $\frac{2}{3}$ (Riccioli, *Almag. tom. I, pag.* 252) : et ce résultat s'est trouvé fort exact ; car, suivant Boulliaud (*Astron. philol. pag.* 154), il est de 13° 13′ 45″ 39‴ 38^{iv}. Riccioli trouve 13° 13′ 45″ 29‴ 28^{iv}, en y employant deux observations choisies. Cet élément est si facile à déterminer par les éclipses de Lune (1419) comparées avec les nôtres, qu'il n'y a là-dessus aucune incertitude. J'ai donné les résultats de différentes tables pour le mouvement séculaire du nœud (1479) ; dans celles de Mayer, il est de 4^s 14° 11′ 15″ pour cent années juliennes, outre les cinq révolutions completes, par rapport aux équinoxes.

1490. Le mouvement diurne du nœud par rapport aux étoiles est de 3′ 10″776180698, et, par rapport aux équinoxes, 3′ 10″638603696 ; le mouvement en 100 ans, par rapport aux équinoxes, y compris cinq révolutions, est de 6963075″ ; il est de 6968100″, par rapport aux étoiles fixes. Si l'on prend pour unité le mouvement de la Lune par rapport aux étoiles (1422), celui de son nœud est égal à la fraction décimale 0,00402185353, dont le logarithme est 7,6044263 ; le mouvement de la Lune par rapport à son nœud (qui se meut dans un sens contraire), est donc 1,00402185353. La révolution de la Lune par rapport au nœud se trouve, en divisant par ce dernier nombre la révolution sidérale, 27^j 7^h 43′ 11″ 4947 ; car la révolution par rapport aux étoiles est à la révolution par rapport au nœud, comme le mouvement par rapport au nœud est au mouvement par rapport aux étoiles (1173). On la trouvera aussi en disant : La somme des mouvemens séculaires de la ☾ et du nœud 1739527467″, est à un siecle, comme 360° sont à 2351135″6030 ; ainsi cette révolution de la Lune, par rapport au nœud, est de 27^j 5^h 5′ 35″ 6030.

1491. L'orbite de la Lune fait avec l'écliptique un angle d'environ 5°, c'est-à-dire que la Lune, lorsqu'elle est à 90° de ses nœuds, a en-

(a) *Lunistice*, mot dont je me suis servi en 1761 dans la *Connoissance des temps* de 1763, *pag.* 160, pour exprimer les limites des plus grandes déclinaisons qui peuvent influer sur les changemens de temps.

viron 5° de latitude. Mais cette plus grande latitude, qui n'est que de 5° dans les nouvelles Lunes ou les pleines Lunes qui arrivent à 90° des nœuds, se trouve de 5° 18′ dans les quadratures, lorsqu'elles sont observées de même à 90° des nœuds; c'est-à-dire que l'inclinaison de l'orbite lunaire est la plus petite dans les syzygies, et la plus grande dans les quadratures. Ptolémée ne connoissoit pas cette différence : il supposoit l'inclinaison constante et toujours de 5°. Copernic lui-même (*lib. IV*, *cap.* 4) n'avoit pas examiné la chose de plus près. Tycho-Brahé fut le premier qui fit cette remarque importante pour la théorie de la Lune; et après avoir découvert la troisieme inégalité de la Lune par ses observations (1445), il découvrit aussi le changement de l'inclinaison, et l'inégalité du mouvement des nœuds de la Lune, comme on le voit à la 26ᵉ page de l'appendix que j'ai déja cité (1442).

« On s'est persuadé mal-à-propos, dit Tycho, que les limites de « la plus grande latitude de la Lune étoient toujours les mêmes, « et alloient constamment à 5°. Ptolémée, Albategnius, Alphonse, ont « été suivis en cela par Copernic avec trop de confiance, comme dans « plusieurs autres occasions. On a eu tort de croire aussi que les « nœuds de la Lune avoient un mouvement uniforme et régulier. Des « observations faites depuis quelques années avec le plus grand soin « nous ont forcés d'abandonner les anciennes traditions sur lesquelles « nous avions compté jusqu'alors ; nous avons trouvé que, dans les « nouvelles et pleines Lunes, la latitude de la Lune est de 4° 58′ $\frac{1}{2}$, à-« peu-près comme l'établissoit Ptolémée; mais, dans les quadratures, « elle va jusqu'à 5° 17′ $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 19′ de plus : nous nous en sommes « assurés par des observations exactes et multipliées, faites dans « les limites australes et boréales, en tenant compte des réfractions « et des parallaxes. »

1492. Tycho reconnut aussi dans les nœuds de la Lune une inégalité qui dans les nouvelles et pleines Lunes n'étoit pas sensible; aussi n'avoit elle pas été remarquée par les anciens, qui n'observoient presque jamais la Lune, si ce n'est dans les éclipses : mais dans les autres situations il trouvoit 1° 46′ de différence sur le lieu du nœud, ce qui faisoit environ 12′ de plus ou de moins sur la latitude de la Lune, aux environs des nœuds.

1493. Enfin Tycho vit que ces deux inégalités de l'inclinaison et du nœud pouvoient se représenter à la fois par le mouvement du pole de l'orbite lunaire dans un petit cercle, tel que ECFG (*fig.* 85), dont le rayon GD étoit de 9′ 30″, le centre D de ce petit cercle étant supposé à 5° 8′ du pole A de l'écliptique; c'est la moyenne incli-

naison ou la moyenne distance des poles de l'écliptique et de l'orbite de la Lune; c'est-à-dire que, suivant Tycho, l'arc AD est de 5° 8'. L'exactitude de cette détermination est remarquable : car l'inclinaison moyenne a été reconnue de 5° 8' 49" par les plus récentes observations, et la valeur de GD 8' 48"; ce qui differe à peine des quantités trouvées par Tycho-Brahé.

Le pole de l'orbite lunaire est supposé se mouvoir sur la circonférence GEC, de maniere qu'il soit en G dans les syzygies, en C dans les quadratures, en F et en K dans les octans, son mouvement étant proportionnel au double de la vraie distance de la Lune au Soleil: cela supposé, en calculant le triangle sphérique ADF, on trouve que l'angle DAF est de 1° 46'; c'est la plus grande équation du lieu du pole D, et par conséquent du lieu du nœud de la Lune sur l'écliptique, éloigné toujours de 90° du lieu du pole (1353). Dans un autre point comme H, l'angle HAG sera aussi l'équation du nœud, et AH la distance actuelle des poles de l'écliptique et de l'orbite lunaire ou l'inclinaison de l'orbite de la Lune pour le temps donné, l'angle ADH étant toujours égal au double de l'élongation de la Lune, ou plutôt de sa distance à la conjonction ou à l'opposition.

1494. Tycho-Brahé n'apperçut pas qu'il résultoit de cette hypothese et de cette construction une maniere très simple de corriger la latitude de la Lune par une seule équation; Képler, Newton, Halley, et Euler même, continuerent d'employer une équation pour l'inclinaison et une pour le nœud, d'où ils tiroient ensuite la latitude de la Lune, par la résolution d'un triangle sphérique: mais Tobie Mayer, dans ses premieres tables de la Lune, prit une voie plus simple : je vais la démontrer ici, car l'auteur ne nous en a point laissé de démonstration.

1495. Pour cela je supposerai d'abord que la Lune soit fixe en L, en sorte que LE soit sa distance au pole vrai de son orbite, tandis que l'arc LD ou la distance au pole moyen est plus ou moins grande que la distance LE au pole actuel. Si du pole moyen D on abaisse le petit arc perpendiculaire DM sur le cercle LE prolongé en M, on aura LM=LD du moins sensiblement à cause de la petitesse de MD; par conséquent EM sera la différence cherchée entre la distance au pole vrai et la distance au pole moyen, ou entre la latitude vraie et la latitude moyenne. Puisque AD est le cercle de latitude qui passe par les poles de l'orbite de la Lune, et qui lui est perpendiculaire aux points de la plus grande latitude, l'arc de cercle DB perpendiculaire au premier sera celui qui passe par les nœuds de la Lune, et l'angle LDB sera la distance de la Lune à son nœud, ou l'argument de la-

titude mesuré au pole de l'écliptique; ce qui revient au même que s'il étoit compté sur l'écliptique. L'angle ADM est égal à l'angle LDB; car si des angles droits ADB et LDM on ôte la partie commune MDB, on aura les restes égaux ADM et LDB : ainsi ADM est aussi égal à l'argument de latitude. Mais ADE, suivant l'hypothese et les observations de Tycho (1493), est égal au double de la distance de la Lune au Soleil; donc MDE est égal au double de cette distance, moins l'argument de latitude. Le petit triangle rectangle DME sensiblement rectiligne donne, suivant la regle ordinaire de la trigonométrie rectiligne, ME=ED. sin. MDE. Maintenant la Lune étant toujours à 90° du pole de son orbite, il faut la supposer en O, de maniere que LO soit parallele et égal à DE. Ayant tiré le cercle de latitude ALX, et abaissé la perpendiculaire OX, on aura LX pour le changement de latitude; mais le triangle LOX est sensiblement égal au triangle MED, puisque le cercle de latitude AL ne differe jamais de plus de 5° du cercle DL : ainsi l'on peut dire que *l'équation de la latitude de la Lune est égale à 8′ 48″ multipliées par le sinus de la double distance de la Lune au Soleil, moins l'argument de latitude.*

1496. Il résulte aussi de ce changement dans les nœuds et l'inclinaison de l'orbite lunaire, une inégalité dans la réduction à l'écliptique; mais Mayer l'a renfermée dans la table de la *variation*, parce-qu'on a reconnu qu'en diminuant de quelques secondes la variation, on produisoit le même effet. D'Alembert trouve en effet (*pag.* 97) que les quantités qui proviennent de l'équation du nœud et de celle de l'inclinaison, se détruisent mutuellement, à l'exception d'une équation de 23″ qui a le même *argument* que la variation de la Lune.

1497. Newton supposa que l'inclinaison de l'orbite de la Lune étoit sujette à un balancement alternatif de 9′, et le nœud à une inégalité de 1° 29′ 39″; il considéroit ces deux choses séparément, comme Tycho, et il a été suivi par Flamsteed, Halley, etc. Dans cette hypothese, on trouve que, lorsque le Soleil est dans le nœud de la Lune, ce nœud a moins de mouvement; car son équation additive augmente et diminue le mouvement rétrograde, jusqu'à ce que le Soleil se trouve à trois signes du nœud : alors l'équation additive est de 1° 29′ 39″. Elle cesse alors d'augmenter, et le mouvement du nœud est le même que s'il n'y avoit point d'inégalité, c'est-à-dire égal au mouvement moyen.

1498. L'inclinaison de l'orbite lunaire, dans cette hypothese, est la plus grande quand le Soleil est dans le nœud; Newton la supposoit de 5° 17′ 30″; elle est au contraire la plus petite, ou de 4° 59′ 30″,

30", lorsque le Soleil répond aux limites de la plus grande latitude, ou qu'il est à 90° des nœuds de la Lune. C'est ainsi que Newton changeoit l'angle d'inclinaison et le lieu du nœud ; après quoi, connoissant la distance de la Lune à son nœud, et l'angle d'inclinaison, il cherchoit la réduction à l'écliptique et la latitude. On verra le principe de ces singularités par le moyen de l'attraction (3681) : il ne s'agit ici que de l'hypothese astronomique, trouvée par le moyen des observations de Tycho, et adoptée par Newton à cause de sa conformité avec les loix qu'il avoit reconnues : mais il est plus simple de ne corriger que la latitude (1495).

1499. J'ai dit que Newton avoit aussi introduit une équation annuelle de 9' 27" pour le nœud (1451) ; elle est plus petite que celle de l'apogée, dans le même rapport que le moyen mouvement du nœud est plus petit que celui de l'apogée : mais l'équation du nœud est soustractive, quand les autres sont additives, parceque le mouvement du nœud se fait en sens contraire du mouvement de la Lune et de celui de son apogée. Ces équations sont aussi employées dans nos tables (1473).

1500. Enfin le calcul rigoureux de l'attraction du Soleil a fait voir que cette grande inégalité de la latitude ne pouvoit représenter, qu'à une ou deux minutes près, les latitudes observées, et que les différentes manieres dont se combinent les élémens dont depend l'attraction du Soleil sur la Lune (1461), donnoient lieu à neuf autres équations qui méritoient d'entrer dans le calcul. Voici les nombres sur lesquels sont faites les onze tables que l'on trouvera parmi les tables de la Lune, et que nous publions d'après Mayer ; ils ne sont pas conformes à la théorie imprimée, parcequ'il paroît que Mayer corrigeoit encore ses tables en 1762, même après avoir envoyé à Londres sa théorie. On suppose dans ces tables que l'argument de latitude a été formé en ôtant du vrai lieu de la Lune dans son orbite le lieu du nœud corrigé ; et la distance de la Lune au Soleil, en ôtant du vrai lieu de la Lune dans son orbite le vrai lieu du Soleil. Voici la formule qui exprime toutes les équations contenues dans les nouvelles tables (voyez les *Tables de Berlin*, pag. 15).

TABLE I. Latitude.	5° 8' 44"5		sin. argument de latitude.
	—	4,4	sin. 3 argumens de latitude.
II.	+ 8	48,4	sin. 2 dist. ☾ ⊙ — argument de latitude.
III.	+	3,1	sin. argument de latitude — anom. ⊙
IV.	—	17,6	sin. argument de latit. — anom. moy. ☾

V.	—	25″1	sin. argum. latit. — 2 anom. moy. ☾
VI.	+	1,9	sin. argum. latit. — 3 anom. moy. ☾
VII.	—	9,0	sin. 2 dist. ☾ ⊙ — argum. latit. + anom. ⊙
VIII.	—	3,7	sin. 2 dist. ☾ ⊙ — argum. latit. — anom. ⊙
IX.	—	2,2	sin. 2 dist. ☾ ⊙ — arg. latit. + anom. moy. ☾
X.	+	15,9	sin. 2 dist. ☾ ⊙ — arg. latit. — anom. moy. ☾
XI.	—	5,2	sin. 2 dist. ☾ ⊙ — arg. lat. — 2 anom. moy. ☾

Parmi les autres équations que donne la théorie, il n'y en a aucune qui passe 2″, et l'auteur les a négligées dans ses tables; il paroît même que dans les précédentes on en pourroit négliger cinq ou six, quant à présent; car les erreurs des tables pour la latitude vont souvent à plus d'une minute, malgré toutes ces équations.

Période de éclipses en 18 ans, ou deux cents vingt-trois lunaisons.

1501. Nous avons dit (303, 1425) que les anciens astronomes, long-temps avant Hipparque, avoient apperçu le retour constant des éclipses, après une période de 18 ans et 10 jours [a], dont la quantité moyenne est de 6585 jours 7ʰ 42′ 30″71 (*Almag.* IV, 2). Pline dit aussi qu'il est certain que les éclipses retournent dans le même ordre en un espace de 223 mois (*lib. II, cap.* 13). C'est pourquoi Halley appelle cette période *la Période de Pline;* il l'appelle aussi *Saros* ou *Période caldaïque* (*Philos. Trans.* 1692, *n°.* 194; *Acta erudit.* 1692, *pag.* 529). Nous parlerons du saros (1572).

Les éclipses ne peuvent revenir dans le même ordre, malgré les inégalités de la Lune, à moins que ces inégalités n'aient aussi la même période; d'où Halley conclut que les inégalités et les erreurs des tables, quoiqu'imparfaitement connues, devoient cependant revenir les mêmes au bout de 223 lunaisons; en sorte qu'une erreur observée devoit suffire pour annoncer celle qui auroit lieu 18 ans après, malgré l'imperfection des tables de la Lune.

Halley, dès l'année 1684, avoit fait usage des 18 ans pour prédire les éclipses: on avoit observé, le 22 juin 1666 (vieux style), une éclipse de Soleil à Londres et à Dantzick; il s'en servit pour prédire celle du 2 juillet 1684, en y employant la même erreur qu'il avoit reconnue dans les tables pour le 22 juin 1666, et sa prédiction se trouva vérifiée à la minute: enfin, il trouva que, même hors des syzygies, les erreurs des tables se retrouvoient presque les

(a) On compte onze jours, s'il n'y a que quatre bissextiles dans les 18 ans, c'est-à-dire, si l'on commence par l'année qui suit la bissextile, ou les deux premiers mois de l'année d'après.

mêmes : il en conclut que les défauts de la théorie avoient au moins cette régularité ; et pour en tirer parti, il forma dès-lors le dessein d'observer la Lune sans interruption pendant une période entiere de 18 ans (537).

1502. On trouve dans les tables de Halley un catalogue des éclipses de Lune et de Soleil arrivées depuis 1701 jusqu'en 1718; il donna pour chacune le temps moyen du milieu de l'éclipse, l'anomalie moyenne du Soleil, l'argument annuel, et la latitude de la Lune. Pour que cette table pût servir à trouver les éclipses dans d'autres périodes, il y joignit deux autres tables pour corriger la période moyenne, suivant les positions du Soleil et de la Lune, parcequ'en effet le retour n'est pas assez rigoureux pour qu'on puisse en tirer sans examen et sans correction l'heure et la quantité de l'éclipse. Boulliaud avoit fait cette remarque long-temps avant Halley ; l'éclipse de Lune du 31 janvier 1580 avoit été totale, celle du 10 février 1598 ne fut que de 11 $\frac{1}{2}$ doigts, celle du 14 mars 1634 ne fut que de 11 doigts, celle du du 27 avril 1706 de 5$\frac{1}{2}$, celle du 29 mai 1760 de trois cinquiemes de doigt; enfin, le 10 juin 1778, après dix périodes accomplies, il n'y avoit plus d'éclipse, parceque la période ne ramene pas la Lune à même distance du nœud (M. le Gentil, *Mém. acad.* 1756). Par la même raison, les erreurs des tables doivent devenir différentes après quelques périodes : le 18 octobre 1641, celle des tables de Flamsteed étoit, suivant M. le Gentil, de 2′ 6″ en excès; mais, le 23 décembre 1749, elle étoit de 1′ 11″ en défaut : l'erreur des tables avoit donc varié de 3′ 17″ dans l'espace de 6 périodes; ce qui fait 33″ de changement pour chacune. L'éclipse du 20 janvier 1647, comparée avec celle du 27 mars 1755, donne 45″ pour la différence de l'erreur des tables de Flamsteed à la fin de chaque période. Ainsi, quoique cette maniere de connoître et de prédire l'erreur des tables fût bonne dans le temps où l'on craignoit de la part des tables plusieurs minutes d'erreur, elle n'est plus nécessaire actuellement que nous avons des tables dont l'erreur ne va jamais à une minute; mais elle est utile pour trouver promptement les jours où il doit y avoir éclipse.

1503. La période de 521 années juliennes est plus exacte, et M. Pingré s'en est servi avec avantage, en calculant les éclipses pour un espace de 1000 ans avant l'ere vulgaire; l'incertitude sur la latitude de la Lune n'est que de 2′. Pour trouver le temps d'une éclipse par le moyen de celle qu'on observe, on ôte de celle-ci 521 ans 3^h 3′, ajoutant un jour, si l'on part des dix derniers mois d'une année bissextile, ou des deux premiers mois de l'année suivante; on ajoute 4°. 57′ à

l'anomalie moyenne du Soleil, et on ôte 1ˢ 13° 23′ de l'argument annuel : cela peut produire quelques heures de différence sur le temps de la conjonction, comme on en jugera par les 4 éclipses suivantes. La derniere est comptée sur le vieux style, pour qu'on voie l'identité de jour. M. Pingré s'est fait pour l'usage de cette période des tables de corrections analogues à celles qui sont dans les tables de Halley pour la période de 18 ans; elles vont à plus de 8ʰ pour le temps de la conjonction.

Années.	Conjonct.	Latit.
204	19 janv. 10ʰ 32′	10′ 38″ A
725	18 janv. 17 2	5 38 A
1246	18 janv. 18 27	1 47 A
1767	18 janv. 17 7	6 0 B

Enfin, il y a une période qui ramene les éclipses au bout de 2362 ans 16ʲ 5ʰ 5′, ou un jour de moins, suivant les bissextiles. Il faut, pour les temps antérieurs, ajouter à l'anomalie moyenne 6° 23′ 37″, ôter de l'argument annuel 1ˢ 7° 27′ 8″, ajouter à la distance du Soleil au nœud 14′ 53″ : ainsi la conjonction du 1 juin 1760, 20ʰ 14′, en donne une pour le 17 mai, 602 ans avant J. C., 15ʰ 9′; mais l'équation dans ce cas-là est de 5ʰ 41′ à ajouter.

1504. M. Toaldo trouve que la période de 18 ans ramene aussi les années seches ou pluvieuses, chaudes ou froides (*Della vera influenza de gli astri, Saggio meteorologico*, 1770 *et* 1781, *pag.* 177; *Saros météorologique*, Journal de physique, tom. XXI, pag. 176). Sur les autres influences que les anciens attribuoient à la Lune, voy. Riccioli (*Almag. I*, 185; *II*, 533) et la *Connoissance des temps*, 1765, *pag.* 161.

Du diametre de la Lune.

1505. Les anciens, qui, comme Ptolémée, ne pouvoient mesurer le diametre apparent de la Lune qu'avec des pinnules, ne pouvoient guere s'en assurer avec précision : Hipparque et Ptolémée se contenterent de dire que le diametre de la Lune dans son apogée étoit égal à celui du Soleil, c'est-à-dire de 30′; mais que dans le périgée il paroissoit plus grand que celui du Soleil.

Albategnius dit que le diametre moyen de la Lune est de 32′ 25″, et qu'il varie depuis 29′ 30″ jusqu'à 35′ 20″; Copernic le donne de 27′ 34″ à 35′ 38″ (*liv. IV, ch.* 22) : en sorte que le diametre moyen est de 31′ 36″. Nous le trouvons aujourd'hui de 31′ 29″; mais l'un étoit trop petit, et l'autre trop grand.

Tycho-Brahé, voyant que la Lune dans les éclipses perdoit cette

lumiere étrangere qui, dans les pleines lunes, la fait paroître plus large, établissoit le diametre moyen de la Lune de 26′ 50″ dans les conjonctions, et de 34′ 0″ dans les oppositions (*Progymn. p.* 134).

Képler, avant la découverte des lunettes, le trouvoit de 32′; mais il étoit dans l'incertitude de 20″ environ, quoiqu'il eût discuté cet article fort en détail, avec des observations et des méthodes propres à trouver les diametres du Soleil et de la Lune, dans l'ouvrage qui a pour titre : *Ad Vitellionem paralipomena, quibus Astronomiae pars optica traditur*, 1604, *in*-4°, *p.* 349. Mais, dans la suite et après l'invention des lunettes, Képler trouva les diametres de la Lune de 30′ 0″ à 32′ 44″, c'est-à-dire, le diametre moyen 31′ 22″ (*Epit. astron. Copern. pag.* 861). Horoccius, dans sa théorie de la Lune, le supposoit de 31′ 0″.

Nous voyons dans l'histoire de l'académie des sciences par Duhamel, que, dans l'éclipse de Soleil du 2 juillet 1666, dont les différentes phases furent observées avec soin par Huygens, Roberval, Auzout, Frénicle et Buot, on reconnut que le diametre de la Lune étoit plus petit que celui du Soleil, et que les tables astronomiques le faisoient plus grand, en même temps qu'elles faisoient le diametre du Soleil plus petit qu'il n'étoit réellement; ainsi le diametre de la Lune étoit trop grand dans les tables de Képler.

Le 8 juillet 1666 à $8^h\frac{1}{2}$, la Lune étant périgée et en quadrature, son diametre fut mesuré et trouvé de 33′; et le 22, à 3^h du matin, la Lune étant apogée, elle avoit 29′ 50″. Ces mesures, qui n'avoient plus que quelques secondes d'incertitude, étoient beaucoup plus exactes que toutes celles qu'on avoit prises jusques-là; elles furent faites avec des fils placés au foyer d'une lunette, suivant la description rapportée en 1667 par Galloys dans les éphémérides de la même année, c'est-à-dire, après l'invention du micrometre (2348).

La Hire, dans ses tables, supposa les diametres de la Lune 29′ 30″ et 33′ 30″; Cassini, dans ses tables, 29′ 30″ et 33′ 38″. M. le Monnier, dans ses institutions astronomiques (*pag.* 184), donne pour les diametres de la Lune 29′ 28″ et 33′ 42″.

1506. Suivant les observations exactes que j'en ai faites avec un héliometre de 18 pieds (*Mém.* 1788), le diametre moyen de la Lune est de 31′ 26″, les extrêmes sont à-peu-près 29′ 22″ lorsque la Lune est apogée et en conjonction, et 33′ 31″ lorsqu'elle est périgée et en opposition; mais les différentes inégalités de la Lune mettent dans ces diametres beaucoup de diversités. Ce que j'appelle ici *diametre moyen de la Lune*, est un milieu arithmétique entre le plus grand et le plus petit diametre. L'on ne trouve que

31′ 7″ pour les moyennes distances : c'est la quantité constante à laquelle on ajouteroit toutes les équations, ou les inégalités du diametre, pour avoir le diametre actuel dans un temps donné (1507, 1698).

Les variations observées dans le diametre de la Lune indiquent celles de sa distance ; aussi la découverte des lunettes a donné le moyen de reconnoître exactement les augmentations et les diminutions de la distance de la Lune. Non seulement le diametre de la Lune diminue quand la Lune avance vers l'apogée ; mais Horoccius trouva vers l'an 1638 que la Lune étant apogée n'étoit pas toujours à même distance de la Terre (1435), que son diametre étoit plus petit dans les conjonctions apogées, plus grand dans les syzygies périgées. Picard constata ces différences ; elles viennent des inégalités de la Lune.

Quand l'argument de l'évection est de 0 signes, le diametre est diminué de 18 ou 20″ ; l'argument de l'évection étant de 6 signes, le diametre est au contraire augmenté de 18″, quoique la ☾ soit à la même distance de son apogée. On a reconnu de même, par rapport à l'argument de la variation, que lorsqu'il est nul, ou égal à 6 signes, le diametre de la Lune augmente de 14 ou 15″, et diminue d'autant vers 3 ou 9 signes, c'est-à-dire, dans les octans, à même distance de l'apogée.

1507. Le diametre de la Lune pour un temps quelconque est exprimé par la formule suivante : 31′7″3 — 1′42″3 cos. anomal. + 5″4 cos. 2 anomal. + 13″7 cos. 2 dist. ☾☉ — 20″2 cos. (2 dist. ☾☉ — anomal. ☾). Les autres équations sont peu sensibles : on peut les trouver en prenant les équations de la parallaxe (1700) données par Mayer. Toutes ces équations étant multipliées par $\frac{6}{11}$ donneront les équations correspondantes du diametre. D'ailleurs, lorsqu'on connoît par les tables la parallaxe horizontale de la Lune pour Paris, on en conclut le diametre, par le rapport constant de 11 à 6, ou plus exactement de 60′ à 32′ 46″6 (1696, 1702).

1508. La Hire crut reconnoître dans le dernier siecle que le diametre de la Lune, vue sur le Soleil dans les éclipses, paroissoit plus petit de 30″ que quand sa circonférence étoit lumineuse (*Tabulae astron. pag.* 41) ; mais c'étoit une faute de calcul (*Mém. acad.* 1748). M. le Monnier ayant mesuré le diametre de la Lune sur le Soleil, le 25 juillet 1748, à 10h 18′, le trouva de 29′ 47″ $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire plus grand qu'il ne s'y étoit attendu ; et il reconnut que la diminution dont la Hire avoit parlé n'avoit pas lieu. La même chose a été reconnue dans l'éclipse du 1 avril 1764 : la plus grande phase arriva à 10h 30′ 43″ à Londres. Suivant l'observation de Short, le

diametre de la Lune, mesuré horizontalement sur le Soleil, étoit de 29′ 49″½, et celui du Soleil de 31′ 59″ : la différence 2′ 9″½ est conforme à celle que j'avois annoncée dans mes calculs de la *Connoissance des mouvemens célestes.*

En effet le diametre du Soleil, selon moi, devoit être de 32′ 1″, le diametre de la Lune augmenté, à raison de sa hauteur sur l'horizon, 29′ 52″; la différence étoit 2′ 9″. Ainsi la diminution que la Hire croyoit avoir lieu dans les éclipses de Soleil paroîtroit nulle d'après ces observations de Short. Cependant M. du Séjour (*p.* 429) est tenté de croire qu'elles prouvent une irradiation du Soleil sur le bord de la Lune, qui la fait paroître plus petite de 3″, quand elle est sur le Soleil, parceque le véritable diametre du Soleil étoit de 31′ 56″, d'après les calculs de toutes les observations; ainsi Short le trouvoit plus grand de 3″ par l'irradiation : il trouvoit aussi le diametre de la Lune sur le Soleil plus petit de 3″ que je ne l'avois donné dans mes premieres tables pour la Lune, quand elle étoit éclairée; ces 3″ pouvoient être l'irradiation du Soleil, qui, s'étendant tout autour de la Lune, la faisoit paroître plus petite de 3″ : mais, dans mes nouvelles tables, j'ai diminué le diametre de la Lune de 3″; ainsi cette irradiation ne seroit pas sensible. Cependant on verra (1992) que, suivant M. du Séjour, il y a encore 4″ à ôter du diametre de la Lune dans les éclipses, et l'on peut les regarder comme le résultat de l'irradiation de la Lune quand elle est éclairée, de celle du Soleil sur la Lune quand elle paroît sur le Soleil, et de l'inflexion des rayons solaires dans l'atmosphere de la Lune.

1509. Lorsque la Lune est plus près du zénit, elle est aussi plus près de nous; ainsi son diametre apparent paroît plus grand dans la même proportion. Soit T le centre de la Terre (*fig.* 87), O un observateur situé à la surface de la Terre, Z la Lune située au zénit de l'observateur; si la distance ZO de la Lune à l'observateur est plus petite d'un soixantieme que la distance ZT de la Lune au centre de la Terre, le diametre apparent, vu du point O, sera plus grand d'un soixantieme que le diametre qui seroit vu du centre T de la Terre.

De même, si la Lune est située en L, de maniere que sa hauteur au-dessus de l'horizon soit égale à l'angle LOH, sa distance au zénit étant égale à l'angle LOZ, on voit que la distance LO sera plus petite que la distance LT au centre de la Terre : le seul cas où cette augmentation sera nulle, est celui où la Lune sera dans l'horizon même en H; car alors elle sera également éloignée du point O et du point T : du moins la différence est insensible. Voilà pourquoi l'on appelle DIAMETRE HORIZONTAL de la Lune, celui qui est supposé vu

du centre de la Terre, parcequ'il est aussi égal au diametre que nous devons observer quand la Lune est à l'horizon, ou, plus exactement, quand elle est au-dessous de l'horizon de la moitié de sa parallaxe, et que le triangle HTO est isoscele.

Lorsqu'on connoît le diametre horizontal de la Lune, il est aisé de trouver le *diametre augmenté*, à raison de la hauteur sur l'horizon, puisqu'ils sont entre eux comme le côté LO est au côté LT. Dans le triangle LOT, l'angle O est le supplément de la distance apparente au zénit, l'angle LTO est la dist. vraie au zénit, vue du centre de la Terre, ou le complément de la hauteur vraie. Dans tout triangle rectiligne les côtés sont comme les sinus des angles opposés; ainsi le côté LO est au côté TL, comme le sinus de l'angle OTL est au sinus de l'angle LOT ou LOZ qui a le même sinus; donc le diametre horizontal est au diametre apparent, comme le sinus de la distance vraie de la Lune au zénit, vue du centre de la Terre, est au sinus de la distance apparente de la Lune au zénit, vue du point O.

1510. Ainsi, pour trouver le diametre de la Lune augmenté, à raison de sa hauteur au-dessus de l'horizon, on fera cette proportion : *Le cosinus de la hauteur vraie est au cosinus de la hauteur apparente, comme le diametre horizontal est au diametre apparent.* C'est la différence entre celui-ci et le diametre horizontal qu'on appelle *augmentation du diametre*, et dont j'ai donné une table à la suite de celles de la Lune. Si la Lune est très près du zénit, il faut employer les distances au centre et à la surface de la Terre, au lieu des distances au zénit [(a)].

Voici une formule simple et commode de M. de Lambre, avec laquelle j'ai calculé ma table en centiemes de seconde. Soit d le diametre horizontal, et d' le diametre apparent, D' la distance apparente de la Lune au zénit, et D la distance vraie, P la parallaxe horizontale, et p la parallaxe de hauteur; on a $d' : d :: \sin. D' : \sin. D$; donc $d'-d : d :: \sin. D' - \sin. D : \sin. D$; donc l'augmentation que j'appelle $a = d \frac{\sin. D' - \sin. D}{\sin. D} = 2\, d \sin. \frac{\frac{1}{2}(D'-D) \cos. \frac{1}{2}(D'+D)}{\sin. D}$

(a) Si l'on veut avoir égard à l'aplatissement de la Terre, il faut augmenter la hauteur de la quantité de l'angle de la verticale (1694), lorsque la Lune est dans le méridien. Cette correction est nulle dans le premier vertical; la différence produit un dixieme de seconde sur l'augmentation du diametre : j'ai pris le milieu, dans la table que j'ai faite de cette augmentation, dans laquelle je n'ai pas porté la précision au-delà des dixiemes de seconde. Cette table est faite pour Paris; mais à d'autres latitudes il n'y auroit pas un dixieme de seconde de différence.

(3835) $= \frac{2\, d \sin. \frac{1}{2} p. \cos. (D' - \frac{1}{2} p)}{\sin. D} = \frac{2\, d' \sin. \frac{1}{2} p \cos. (D' - \frac{1}{2} p)}{\sin. D'} = \frac{d' \sin. p \cos. (D' - \frac{1}{2} p)}{\sin. D'} = d' \sin. P \cos. (D' - \frac{1}{2} p)$; donc $a = (d + a) \sin. P \cos. (D' - \frac{1}{2} p)$, et $a = \frac{d \sin. P \cos. (D' - \frac{1}{2} p)}{1 - \sin. P \cos. (D' - \frac{1}{2} p)} = d \sin. P \cos. (D' - \frac{1}{2} p) + d (\sin. P \cos. \overline{D' - \frac{1}{2} p})^2$ (3422). Ces deux termes suffisent ; le troisieme ne produiroit que des milliemes de seconde, mais le second peut aller à trois dixiemes ; ainsi il doit être employé.

1511. La Caille (art. 622) donne pour cause de cette augmentation du diametre de la Lune la différence de parallaxe (1627) entre le bord supérieur et le bord inférieur de la Lune : mais cette notion n'est pas exacte. Il est vrai qu'il y a une différence égale, du moins à un quart de seconde près, pour le diametre mesuré verticalement, puisque le bord inférieur étant plus abaissé par la parallaxe que le bord supérieur, il doit en paroître plus éloigné, et le diametre de la Lune paroître plus grand. Mais pour le diametre mesuré horizontalement, cette différence n'a plus lieu ; ainsi il faut dire seulement que l'augmentation du diametre est à-peu-près de la même quantité que la différence des parallaxes entre le bord supérieur et le bord inférieur : celle-ci est plus petite de deux dixiemes de seconde (M. de Lambre, *Mém. de l'acad. de Padoue*).

1512. Le diametre de la Lune doit donc paroître plus petit, quand la Lune se leve, que quand elle est parvenue à une certaine hauteur ; la Lune en s'élevant doit paroître plus grande à nos yeux, et l'observation faite avec un instrument exact prouve en effet aux astronomes que la Lune paroît sous un angle plus petit, quand elle est à l'horizon. Cependant un fait généralement reconnu, c'est que la Lune, à la vue simple, paroît d'une grandeur extraordinaire lorsqu'on la voit se lever, à la fin du jour, derriere des bâtimens ou des montagnes ; il n'y a presque personne qui ne s'imagine la voir alors deux ou trois fois aussi large que quand elle arrive ensuite à une grande hauteur. C'est là certainement une illusion optique, et elle a lieu de même pour les autres astres ; mais il suffit de regarder la Lune dans une lunette quelconque, dans un tube de papier, et même, si l'on veut, au travers d'une carte où l'on a fait un trou d'épingle, pour se convaincre que l'augmentation n'a rien de réel, et que le diametre de la Lune est vu au contraire alors sous un plus petit angle, que lorsque la Lune est à une plus grande hauteur.

1513. Pour se former une idée de la cause de cette illusion, il faut admettre avec tous les opticiens ce jugement tacite, commun et involontaire, par lequel nous estimons fort grands les objets que nous

jugeons être fort éloignés, en même temps que nous jugeons les objets fort éloignés, lorsque nous voyons à la fois beaucoup de corps interposés entre nous et ces objets. Roger Bacon, en citant l'Optique de Ptolémée (ouvrage qui s'est perdu pendant les siecles d'ignorance), nous apprend que cet auteur en avoit jugé ainsi: Descartes, Wallis, en 1687 (*Algebra*, c. 102), et Mallebranche (*Recherches de la vér. liv. I.*), l'expliquent de la même maniere. Régis écrivit contre Mallebranche; mais les géometres se déclarerent pour celui-ci (*Journal des savans*, 8 *et* 15 *mars* 1694). Voici donc, ce me semble, le nœud de la difficulté.

La Lune, se levant à l'horizon derriere une montagne ou à l'extrémité d'une plaine, paroît nécessairement à la suite de plusieurs objets sensibles et variés; au lieu que dans une certaine hauteur on éleve la vue pour appercevoir la Lune, et l'on ne voit rien entre elle et nous qui puisse nous faire juger de sa distance. Dans le premier cas, notre imagination, accoutumée à juger de l'éloignement d'un corps par la multitude des objets qui paroissent entre lui et nous, estime la Lune fort loin de nous, et cela par habitude, par instinct, et par une suite de sa maniere d'estimer et de juger des distances. Or, un même objet, que nous jugerons fort éloigné, sera jugé plus grand que si on le croyoit fort près: ainsi la Lune, dans l'horizon estimée à une plus grande distance, est jugée plus grande par cette premiere perception; la réflexion ne suffit pas pour empêcher la liaison de ces deux jugemens, parcequ'une habitude continuelle y a mis une dépendance si forte qu'on ne peut plus les séparer [a].

C'est par la même raison que les deux voyageurs qui sont parvenus sur le Mont-Blanc, en 1784, à 2346 toises de hauteur, disent que le volume du soleil couchant leur paroissoit immense; cela venoit probablement des objets interposés (Bourrit, *descr. des glaciers*, 1785, *page* 306). On trouvera d'autres preuves de la vérité de ce jugement habituel et involontaire sur la grandeur des objets, et un détail sur l'apparence de la Lune, dans l'*Optique* de Smith (*art.* 160, 164, et *remarque* 97). Cet auteur y ajoute la figure apparente du ciel, qui paroît surbaissée, d'après beaucoup d'expériences op-

(a) C'est ainsi qu'en touchant une petite boule avec les doigts bien croisés, on croit en sentir deux. Ordinairement un corps que l'on touche avec la partie droite du doigt qui est à droite, et le corps que l'on touche avec la partie gauche du doigt qui est à gauche, sont toujours des corps très différens: on peut, en croisant les doigts, y produire la même sensation avec un seul corps; mais, la sensation étant la même, le jugement que l'on en porte, par une suite nécessaire de l'habitude, reste le même, et l'on en sent deux, même en voyant très bien qu'il n'y en a qu'une.

tiques. M. le Cat, dans son *Traité des Sens*, y ajoute la couche de vapeurs qui nous fait juger les objets plus éloignés.

1514. Le P. Gouye faisoit usage encore d'une autre considération; une colonne qui paroît au-devant d'une muraille, ou qui est environnée de plusieurs objets différens, et même une colonne cannelée, semble à la vue être plus grande que si elle étoit simple et isolée : les vapeurs de l'horizon et le voisinage de la Terre, des montagnes, des arbres, font cet effet sur la Lune : et, en la faisant paroître plus accompagnée, la présentent à notre perception comme si elle étoit d'un plus grand volume (*Hist. de l'acad.* 1700); voyez aussi l'*Almageste* de Riccioli, *II*, 643; et Molyneux, *Philos. Trans.* 1687, *n°.* 187.

1515. L'estime que l'on fait de la grandeur des objets dans les lunettes devient très incertaine, parcequ'on n'a point d'objet de comparaison; si l'on regarde Jupiter dans une lunette qui grossit cent fois, l'un trouve qu'il paroît avoir deux lignes de diametre, l'autre dit 4 à 5 pouces; il n'y a point alors de terme fixe : il s'établit au hasard une comparaison involontaire entre l'impression qui se fait dans l'œil et celles qu'on a coutume d'éprouver en regardant les objets terrestres; mais cette comparaison varie suivant que l'œil est plus ou moins sensible, et que l'on est plus ou moins accoutumé à comparer des objets et à regarder dans les lunettes. Les astronomes estiment les objets beaucoup plus petits que les personnes qui ne font pas usage des lunettes : celui à qui la vue d'un astre dans la lunette produit une grande surprise, qui s'en fait moralement une grande idée, dont les nerfs très sensibles éprouvent une forte impression, comparera cet astre à un objet fort considérable, tandis qu'un autre ne l'assimilera qu'à un objet très petit.

1516. Le diametre de la Lune en ascension droite, dont on fait souvent usage, est la quantité dont different entre elles les ascensions droites des bords de la Lune. Soit P le pole du monde (*fig.* 88), EQ l'équateur, PLA le cercle de déclinaison qui passe par le centre de la Lune, et qui marque en A l'ascension droite de la Lune sur l'équateur, PMB le cercle de déclinaison qui passe par le bord de la Lune M, et qui, touchant le limbe de la Lune, va déterminer en B l'ascension droite du bord, AB est donc le demi-diametre de la Lune en ascension droite, et le double de AB sera le diametre; donc, suivant ce qu'on a vu pour le Soleil (1008, 3877), il faut *diviser le diametre horizontal par le cosinus de la déclinaison vraie de la Lune pour avoir le diametre en ascension droite.*

Lorsqu'on veut savoir le temps que le diametre de la Lune em-

ploie à traverser le méridien, *on convertit en temps lunaire le diametre horizontal de la Lune en ascension droite.* Je suppose que le retardement diurne de la Lune par rapport au Soleil soit d'une heure, c'est-à-dire qu'elle emploie 25 heures de temps moyen à parcourir 360°, et à revenir au méridien, le jour pour lequel on calcule ; je suppose aussi que son demi-diametre en ascension droite soit de 15' : il ne s'agit que de savoir combien la Lune emploiera de temps à parcourir 15' par son mouvement diurne, à raison de 25ʰ pour 360° : l'on fera donc cette proportion : 360° sont à la révolution diurne 25ʰ, comme le demi-diametre en ascension droite 15', est au temps cherché, qu'on trouvera de 1' 2"; c'est ce que le demi-diametre de la Lune emploie à traverser le méridien. Les astronomes font ce calcul lorsqu'après avoir observé le passage du premier bord de la Lune au méridien, ils veulent savoir à quelle heure le centre de la Lune y a passé (4143).

On trouve aussi le temps qui répond au demi-diametre de la Lune, par le moyen de deux tables (*Tab.* de la Lune). L'une contient la réduction du demi-diametre horizontal en temps lunaire, suivant les divers retardemens de la Lune d'un jour à l'autre, et les diverses grandeurs du demi-diametre de la Lune : l'autre est une table de ce qu'il faut y ajouter, à raison de la déclinaison de la Lune ; c'est la différence en temps, du demi-diametre LM de la Lune (*fig.* 88), à la quantité AB qui lui répond dans l'équateur (3879).

1517. Quelques astronomes avoient cru que, pour trouver ainsi le temps du diametre, il falloit auparavant augmenter le diametre de la Lune, à raison de sa hauteur au-dessus de l'horizon (1510) ; mais il faut prendre le diametre horizontal, ou vu du centre de la Terre. En effet, lorsque le bord de la Lune paroît toucher le méridien, l'observateur qui seroit au centre de la Terre, ou celui qui seroit à la surface, étant tous deux dans le même plan et dans le même méridien que le bord de la Lune, verroient tous deux à la fois, et sans aucune différence, le bord de la Lune dans le méridien ; on peut dire la même chose du bord suivant : ainsi le temps que la Lune emploie à traverser le méridien, seroit absolument le même, vu du centre ou vu d'un point quelconque de la surface de la Terre, situé sous le même méridien ; et il ne dépend point de la hauteur de la Lune au-dessus de l'horizon. Un arc de 15', vu du centre de la Terre, traverse le méridien en une minute de temps ; si je m'approche de l'objet assez pour qu'il me paroisse de 30' au lieu de 15, il n'en traversera pas moins le méridien en une minute, parcequ'en même temps que l'objet me paroîtra doublé par sa proximité, la vîtesse de

son mouvement sera aussi doublée, et les 30′ traverseront le méridien dans le même temps que les 15′ employoient à le traverser auparavant.

1518. On avoit cru trouver la Lune sensiblement alongée du nord au sud, c'est-à-dire, le diametre vertical dans le méridien plus grand de 30″, que le diametre mesuré horizontalement d'orient en occident, comme on le voit dans le *Commerce astronomique* qu'Adelbulner faisoit imprimer à Nuremberg (*tom. II, page* 81). Cela venoit de ce qu'on ôtoit du diametre de la Lune, trouvé par la mesure du temps de son passage, la valeur de l'augmentation, pour en conclure le diametre horizontal; on faisoit une correction qu'il ne falloit point faire; et cela rendoit le diametre d'orient en occident plus petit que le diametre vertical. C'étoit une méprise de Godin.

Au contraire, suivant les loix de la force centrifuge, le globe de la Lune doit être aplati, mais du nord au sud, à cause de la rotation de la Lune sur son axe (3746).

Il est probable aussi que la Lune est alongée vers le centre de la Terre (3302).

Nous parlerons du diametre absolu de la Lune en lieues, après que nous aurons déterminé sa parallaxe et sa distance à la Terre (1702).

Mouvement horaire de la Lune.

1519. Le mouvement horaire est le nombre de minutes et de secondes que la Lune paroît décrire en une heure de temps moyen (980), vue du centre de la Terre; on en fait usage dans le calcul des éclipses, et il est important de le connoître avec précision.

Le mouvement diurne de la Lune peut changer depuis 11° 46′ jusqu'à 15° 21′; ainsi le mouvement horaire est entre 29′ 25″ et 38′ 22″, sa quantité moyenne 32′ 56″5 : mais l'excentricité seule de l'orbite lunaire fait que le mouvement horaire de la Lune varie de 3′ 36″ : l'évection produit une inégalité de 42″, la variation en produit une de 40″. Toutes les autres équations de la Lune (1473) influent aussi dans l'inégalité du mouvement horaire.

1520. Pour avoir le mouvement horaire, on pourroit calculer le lieu de la Lune avec toutes ses équations, pour deux instans éloignés d'une heure l'un de l'autre; la différence des deux longitudes de la Lune sur son orbite seroit le mouvement horaire. Mais cette méthode peut produire une erreur de quelques dixiemes de seconde, et elle seroit très longue, parcequ'il faudroit trois calculs pour être sûr de n'avoir point de fautes. C'est pourquoi Clairaut,

Mayer, et M. Maskelyne, ont donné des formules pour le mouvement horaire de la Lune, en y employant les dixiemes de seconde; ce qui donne une précision aussi grande que celle dont la théorie de chaque équation peut être susceptible. La formule de Clairaut est dans les *Mémoires* de 1752. Mais M. du Séjour a remarqué qu'il y manquoit une petite équation (*Mém.* 1771). Voici celle que M. de Lambre a tirée de la décomposition des nouvelles tables de la Lune, et qui a servi pour les tables de cet ouvrage : elle est plus étendue et plus exacte que toutes les autres; il y a même ajouté les équations nécessaires pour trouver l'inégalité de ce mouvement d'une heure à l'autre : ces équations sont du second ordre relativement aux autres (3997). Les tables sont dans la *Connoissance des temps* de 1791.

Formule pour le mouvement horaire de la Lune en longitude.

+ 0″4382 cos. arg. I. — 0″01276 cos. 2 arg. I.
— 1,0968 cos. arg. II.
— 1,3058 cos. arg. III.
— 0,9780 cos. arg. IV.
— 42,2150 cos. arg. V. + 0″6020 cos. 2 arg. V.
+ 1,0192 cos. arg. VI.
+ 0,4020 cos. arg. VII.
+ 0,2912 cos. arg. VIII.
+ 0,0566 cos. arg. IX. + 2″0082 cos. 2 arg. IX.
— 0,0866 cos. arg. X.
— 0,1628 cos. arg. XI.
— 0,0253 cos. arg. XII.
+ 0,0558 cos. arg. XIII.
+ 0,2942 cos. arg. XIV.
— 0,0012 cos. arg. XV.
+ 0,0786 cos. arg. XVI.
— 0,0555 cos. arg. XVII.
+ 32′ 56″432 — 3′ 36″044 cos. arg. XIX + 14,823 cos. 2 arg. XIX.
— 1″059 cos. 3 arg. XIX + 0″077 cos. 4 arg. XIX.
— 1″088 cos. arg. XX + 40″149 cos. 2 arg. XX + 0″138 cos. 3 arg. XX.
+ 0″3624 cos. 4 arg. XX.
+ 0,8059 cos. arg. XXI.
— 7,8074 cos. arg. XXII.

{ Ces deux équations supposent le mouvement horaire moyen, ou 32′ 56″458. Elles se corrigent au moyen d'une table subsidiaire.

Equations du second ordre, et proportionelles aux carrés des temps.

+ 0″1632 sin. arg. V — 0″0047 sin. 2 arg. V.
+ 1,0246 sin. arg. XIX — 0″141 sin. 2 arg. XIX + 0,0151 sin. 3 arg. XIX.
+ 0,0046 sin. arg. XX — 0″6731 sin. 2 arg. XX — 0,0537 cos. 4 arg. XX.

Quantités négligées dans les tables du mouvement horaire.

— 0″0264 cos. (arg. XIX + arg. I).
+ 0,0705 cos. (arg. XIX + arg. III).
— 0,0317 cos. (arg. XIX — 2 arg. V).
+ 0,0628 cos. (arg. XIX + arg. XX).
— 0,0656 cos. (arg. VI — arg. XIX).
— 0,0246 cos. (arg. VII + arg. XIX).
— 0,0203 cos. (2 arg. XIX — arg. I).
+ 0,0090 cos. (arg. XIX + arg. XI).
+ 0,0090 cos. (arg. XIX — arg. XI).
— 0,0176 cos. (4 arg. XX — arg. XIX).
+ 0,0116 cos. (arg. XX + arg. V).
— 0,0107 cos. (4 arg. XX + arg. I).
+ 0,0106 cos. (arg. XX + arg. IV).
— 0,0265 cos. (2 arg. XX sin arg. XIX).
— 0,0256 cos. (arg. V + 2 arg. IX).
+ 0,05 en seize petites équations.

0″4725 Total des quantités négligées.

Formule pour le mouvement horaire en latitude, ou mouvement vers le pole boréal de l'écliptique.

+ 2′ 58″220 cos. arg. I. — 0″126 cos. 3 arg. I de la latitude.
+ 4,2883 cos. arg. II.
+ 0,2400 cos. arg. V.
— 0,0208 cos. arg. X. On a négligé cette équation.

Equation du second ordre.

— 0″8669 sin. arg. I de latitude.

Les équations du second ordre sont pour l'heure qui suit l'instant du calcul; il faut, pour l'heure qui précede, changer les signes.

Les équations de latitude supposent le mouvement horaire moyen,

32′ 56″458. Il faut les corriger comme les équations XXI et XXII du mouvement en longitude.

On seroit tenté de croire que ces équations du mouvement horaire sont le changement qui arrive en une heure dans chacune des équations de la Lune; mais il y a une différence sensible : par exemple, la neuvieme équation donne 2″ pour le mouvement horaire, tandis que l'équation de la Lune, correspondante au même argument, ne change jamais d'un dixieme de seconde par heure. Ces 2″ viennent de la combinaison de deux autres argumens; en effet le changement horaire de l'évection, 42″2 cos. E, change d'autant l'anomalie A. Or, le changement de l'équation est 2 *e* cos. A. *d* A (3446, 3486). Si dans la valeur de *d*A on substitue, outre le moyen mouvement, 42″2 cos. E, l'on aura 4″ cos. E. cos. A, ou 2″ cos. (A—E), etc. (3815); or A—E revient à deux fois la distance du Soleil à l'apogée de la Lune : ainsi l'on trouve 2″ pour l'équation IX du mouvement horaire. M. de Lambre a discuté le premier ces équations d'une maniere complete dans un mémoire lu à l'académie en 1788, et qui sera imprimé dans les *Mémoires* de Montpellier, *tom. III.*

1521. Quand on a des longitudes calculées de 12 en 12 heures, comme dans la *Connoissance des temps*, ou le *Nautical almanack*, on peut en conclure le mouvement horaire avec une très grande précision. En effet, lorsque l'on prend la douzieme partie du mouvement de la Lune entre midi et le minuit suivant, l'on a le mouvement horaire qui avoit lieu à six heures, c'est-à-dire, vers le milieu de l'intervalle qu'il y a eu entre les deux longitudes employées; car le mouvement horaire croît ou décroît d'une maniere qui est sensiblement uniforme depuis midi jusqu'à minuit.

Par la même raison, si l'on prend la douzieme partie du mouvement, entre minuit et le midi du lendemain, on aura le mouvement horaire à 18^h, comme dans l'opération précédente on l'a eu vers 6^h. Ayant donc le mouvement à 6^h et à 18, il ne sera pas difficile de le trouver aussi pour toute autre heure.

1522. La même méthode sert pour trouver le mouvement horaire en ascension droite, et en temps; car, connoissant le retardement diurne et inégal de la Lune, deux jours de suite, pour vingt-quatre heures, on peut trouver le retardement horaire pour une heure quelconque. Cela est souvent utile, sur-tout pour trouver la longitude en mer par le moyen de la Lune, comme on le peut voir dans l'*Etat du ciel* de M. Pingré, pour 1757.

Des

Observations de la Lune.

1523. Pour établir et confirmer les théories précédentes, on a eu besoin d'un grand nombre d'observations; mais je ne puis que les indiquer ici. Les observations anciennes qui servent à déterminer les moyens mouvemens de la Lune, de son apogée, et de son nœud, sont d'abord trois éclipses de Lune, observées à Babylone par les Caldéens (1419), qui sont les plus anciennes des dix éclipses caldéennes que Ptolémée nous a conservées dans son *Almageste*. On trouve ensuite celles de Ptolémée lui-même, et celles de Tycho-Brahé, qui ont été calculées par Longomontanus, mais qu'il seroit peut-être utile de vérifier, et de réduire par les nouveaux élémens. Il en est de même des observations d'Hévélius, et de Flamsteed, qui sont en très grand nombre (voyez *Machina cœlestis*, et *Historia cœlestis*). Celles qui furent faites à Paris sont dans l'*Histoire céleste*, publiée par M. le Monnier en 1741. Elles n'avoient jamais été discutées et calculées; la Caille et M. Bailly en ont examiné quarante-deux (*Mém.* 1763) : ce sont les plus anciennes qui aient été faites avec la précision qu'on exige aujourd'hui, et les plus exactes qu'on puisse avoir du dernier siecle. La Caille avoit fait en 1759, sur les anciennes observations, un travail considérable; il détermina l'erreur du mural de la Hire, qui alloit jusqu'à 34″, les élémens du Soleil (1266, 1313), la position de Sirius (2776); il a vérifié par ces calculs l'accélération de la Lune (1486).

Halley, en 1682 et 1684, observoit la Lune à Islington près de Londres, dans le dessein de faire servir ses observations à corriger les tables de la Lune par la période de 18 ans (1501); ces observations sont rapportées à la fin de *l'Astronomie caroline, édition de* 1710. Dans la suite Halley fit, dans la même vue, la plus nombreuse collection qu'on ait vue d'observations de la Lune; elle commence à 1722, et finit au commencement de 1740. Elle renferme plus de 2000 observations, calculées et comparées avec ses tables; mais ces observations supposent les lieux des étoiles tirés du catalogue de Flamsteed : elles sont exposées à des erreurs d'une minute, et il seroit important de recourir aux manuscrits originaux de Halley, pour rectifier ses conclusions, et vérifier ses calculs; avec cette précaution, on pourroit profiter encore de cet immense travail. Les registres originaux de Halley, ainsi que ceux de Flamsteed, sont à l'Observatoire de Greenwich : le bureau des longitudes a donné cent livres sterlings (2460 livres) aux héritiers de l'un et de l'autre.

Parmi les observations modernes les plus exactes, nous avons 31 observations de la Lune, faites en 1751 et 1752, à l'occasion des recherches de la parallaxe de la Lune (1650) : le soin qu'on apporta à les faire, et celui que la Caille mit à les calculer, assure l'exactitude de ces observations, et je crois qu'on n'en sauroit guere trouver de meilleures; elles sont dans le sixieme volume des *Ephém. pag.* liij. Il y a aussi 104 observations de la Caille, faites au college Mazarin en 1760 et 1761, et 67 de M. d'Agelet, calculées par M. de Lambre dans le 8ᵉ volume des *Ephémérides*, que j'ai publié en 1783.

1524. La plus belle collection qui existe est celle de 1137 observations de Bradley, entre 1750 et 1760, calculées et réduites par lui et par Gaël Morris; elles ont paru dans le *Nautical almanach* pour 1774 et 1778, et dans la *Connoissance des temps* de 1779. Ces observations ont servi à corriger les tables de Mayer (1460, 1472). Les manuscrits des observations de Bradley furent remis entre les mains de Bliss, son successeur à Greenwich, d'où ils ont passé à l'université d'Oxford. Je fus témoin, le 9 juin 1763, d'une délibération de la société royale de Londres qui en ordonna la publication (*Connois. des mouv. cél.* 1767); M. Hornsby est occupé de l'impression : j'en ai vu un volume *in-folio* à Oxford, en 1788, déja imprimé; la santé de M. Hornsby a été la seule cause du retard. On trouvera beaucoup d'observations de la Lune dans les recueils que j'ai cités (1399), principalement dans celui de M. Maskelyne, dont les observations mériteroient sur-tout d'être calculées : j'ai déja commencé ce travail pour une partie, et M. Maskelyne les fait calculer actuellement à Greenwich, où l'on observe la Lune tous les jours avec une assiduité et une précision dont il n'y avoit point d'exemple.

LIVRE HUITIEME.

DU CALENDRIER.

1525. Le Calendrier, n'étant que la distribution des temps mesurée par le Soleil et par la Lune, appartient trop à l'astronomie pour ne pas en traiter ici séparément; ce qui nous conduira à parler aussi des périodes sur lesquelles est fondée la chronologie. Ainsi, après avoir parlé des moindres parties du temps, qui sont les heures, les jours, et les semaines, nous parlerons des mois, des années, de leurs différentes divisions, des cycles qui en sont composés, du calendrier, des périodes anciennes; enfin, des époques les plus célebres.

1526. Les heures sont aujourd'hui la 24e partie de la révolution diurne du Soleil; mais il y eut autrefois des peuples qui partagoient en douze seulement l'intervalle total du jour et de la nuit (Syncelle, *page* 10, D; *Journal des savans*, 1778, *page* 611, *in-4°*); et cette division en douze venoit probablement des douze mois, ou des douze Lunes de l'année.

Le jour de 24 heures est appellé *jour artificiel*, et la durée de la lumiere, *jour naturel*, par Macrobe, Riccioli, et M. Bailly : mais il y a des auteurs qui entendent tout le contraire, comme dans l'Encyclopédie.

Les heures planétaires ou judaïques étoient des heures inégales, usitées autrefois chez les Juifs et les Romains. On divisoit séparément le jour en 12 parties, et la nuit en 12 autres heures. Cet usage avoit encore lieu du temps de Xénophon, 370 ans avant J. C. Ces heures recevoient leur nom d'une des sept planetes. Cet usage étoit venu des anciens Egyptiens, suivant Hérodote (*liv. II, n°.* 82), et Dion Cassius (*liv.* 37, *page* 42, édition de 1592), ou des Caldéens (Salmas. *de an. climat. page* 595; Goguet, *II*, 437; Sallier, *Mémoire des inscript. IV*, 65). L'ordre des planetes, dans les jours de la semaine, venoit de l'influence qu'on leur supposoit sur les différentes heures du jour : le dimanche, au lever du Soleil, la premiere heure étoit pour le Soleil; ensuite venoient Vénus, Mercure, la Lune, qui étoient supposés au-dessous de lui; puis Saturne, Jupiter

et Mars, qui étoient au-dessus : par-là il arrivoit que le lendemain commençoit par la Lune; et voilà pourquoi le lundi fut placé à la suite du jour consacré au Soleil (*Clavius in sphaeram*). M. l'abbé Roussier, dans un savant mémoire sur la musique des anciens (pag. 75, et ensuite dans le *Journal de Trévoux, nov. et déc.* 1770 *et août* 1771), soutient que cet arrangement vient des intervalles de la musique, et il cite encore Xiphilin d'après Dion (*lib.* 36, *in Pompeio*). Plutarque en avoit fait la matiere d'une dissertation dont il ne nous reste que le titre, dans ses questions de table (*Symposiacôn, l. IV, q.* 7.).

1527. Les Juifs et les Romains distinguoient dans le jour artificiel, pris du lever au coucher du Soleil, quatre parties principales, *prime, tierce, sexte*, et *none*. Prime commençoit au lever du Soleil; tierce, trois heures après; sexte commençoit à midi; et none, trois heures avant le coucher du Soleil; et le même nom indiquoit peut-être tout l'intervalle de 3 heures [a]. Ces heures étoient plus ou moins grandes, suivant que le Soleil étoit plus ou moins long-temps sur l'horizon; l'on emploie encore dans le bréviaire de l'église romaine les mêmes dénominations.

1528. Les heures babyloniques commençoient à se compter au lever du Soleil (*Macrob. Saturn. lib. I, c.* 3); mais les 24 heures étoient égales. On commençoit au lever du Soleil chez les Perses et la plupart des Orientaux. M. Towson croit que les Romains commençoient aussi au lever du Soleil, et divisoient le jour naturel en 12 heures (*Discourses on the 4 Gospels; Journ. des savans*, 1779, *pag.* 59). Cela se pratiquoit encore à Majorque et à Nuremberg, du temps de Riccioli.

1529. Les heures italiques sont celles que l'on commence au coucher du Soleil, à l'imitation des Juifs et des Athéniens (Riccioli, *Chron. réf. pag.* 4); car les Juifs de toute ancienneté comptoient leur jour d'un coucher à l'autre. On suivoit encore, dans le dernier siecle, cet usage en Pologne, en Bohême; il y a même actuellement à Prague des horloges réglées de cette maniere : mais l'usage commence à se passer, même en quelques endroits de l'Italie. Les Italiens qui conservent l'ancien usage ont coutume de commencer une demi-heure ou trois quarts d'heure après le coucher du Soleil, et comptent vingt-quatre heures de suite : j'ai expliqué leur usage à cet égard dans mon *Voyage d'Italie*, où j'ai donné des tables des heures italiques.

(a) Par là on accorderoit deux passages de l'évangile : *Erat autem hora tertia, et crucifixerunt eum* (S. Marc)... *Et erat hora quasi sexta, et dicit Judæis : Ecce rex vester* (S. Jean).

1530. Hipparque et Ptolémée comptoient les heures de minuit à minuit, et il paroît que de leur temps c'étoit l'usage à Rome et en Egypte (Riccioli, *Almag. I*, 34; *Chronol. réform. pag.* 2). M. Towson croit que, dans l'évangile de S. Jean, les heures sont comptées ainsi; c'est aussi l'usage de l'église romaine, et de la plupart des nations de l'Europe : aussi appelle-t-on ces heures *européennes*.

1531. Tous les astronomes commencent le jour à midi, comme on le voit dans Ptolémée (*page* 74). C'est ce que faisoient autrefois les Umbres, suivant Macrobe. On attribue aussi cet usage aux Arabes. Les astronomes vont jusqu'à 24 heures : ainsi, lorsqu'on compte, dans la société, le 2 de janvier, 8 heures du matin, les astronomes disent, le premier janvier, à 20 heures; et c'est ce que nous appellons *temps astronomique*, pour le distinguer du *temps civil*, où l'on se sert du matin et du soir.

1532. L'usage de diviser les temps en semaines de sept jours est de la plus haute antiquité (303) : il paroît que les plus anciens peuples de l'Orient s'en sont servis; c'est le sentiment du Syncelle cité par Sallier (*Mém. de l'acad. des Inscript. tom. IV, pag.* 65). Cet usage étoit le même chez les Péruviens (Garcilaso de la Vega, *Commentarios reales de los Incas, tom. I, lib. II, c.* 23; Scaliger, *de Emend. temp. pag.* 9; Spectacle de la nature, *tom. IV, pag.* 47).

Goguet pense que les Grecs furent presque les seuls peuples qui d'abord ne se servirent pas des semaines de sept jours (*tom. I, pag.* 217, *in*-4°.). Cependant il y a des savans qui doutent que cette maniere de diviser le temps ait été employée ailleurs que chez les Juifs (voyez Costard, *The History of astronomy, p.* 150; Spencer, *De Legibus Hebraeorum, lib. I, c.* 4). Quoi qu'il en soit, on ne peut disconvenir que le nombre sept n'ait été fort remarquable et fort distingué parmi les anciens (S. Clément d'Alexandrie, *Stromatum VI*, 16, *pag.* 813, édition de 1715; Macrobe, *Somn. Scip. I, 6, pag.* 35; Selden, *de Jure nat. et gent. lib. III, c.* 17).

Plusieurs auteurs ont cru même que la fête du septieme jour n'étoit point particuliere aux Juifs, mais qu'elle avoit lieu chez les païens. Sallier cite un grand nombre de témoignages à ce sujet, sur-tout Philon et Joseph, quoiqu'il soit d'un sentiment contraire (*page* 64).

1533. Cela n'empêche pas qu'on ne regarde l'usage des semaines de sept jours comme ayant eu lieu chez la plupart des anciens; il étoit d'ailleurs très naturel, d'après les phases de la Lune qui ne se montre que pendant quatre semaines ou 28 jours : ce qui a servi à régler le temps chez toutes les nations (1401). Ces phases changent

à-peu-près tous les sept jours. Si l'on avoit voulu partager le mois en quatre, et faire des semaines de huit jours, on eût trouvé un excès de trois jours au bout du mois. D'ailleurs les années solaires de 365 jours se partagent, à un jour près, en semaines de 7 jours, au lieu qu'il y auroit eu cinq jours de reste si l'on eût fait les semaines de huit jours; ainsi l'usage des mois et des années paroît avoir dû entraîner celui d'une semaine de sept jours.

Années des anciens.

1534. Nous avons parlé des années qui servirent aux premiers peuples du monde (253), et qui furent d'abord des jours, ensuite des mois; nous parlerons plus bas des années lunaires dont se servent encore les Turcs et les Arabes, et qui sont de 354 et de 355 jours (1602). On croit qu'il y eut très anciennement des années de 360 jours, et que les Grecs s'en servirent long-temps (254, 299, 385): mais, environ 1500 ans avant notre ere, les Egyptiens firent les années de 365 jours (*Mém. acad.* 1781, p. 231); c'est ce qu'on appelle les années égyptiennes: elles étoient toutes égales; le Soleil retardoit chaque année de six heures sur une année égyptienne, et tous les quatre ans l'équinoxe arrivoit un jour plus tard dans l'année civile; ce retardement formoit une année entiere au bout de 1461 années civiles, ou d'une période caniculaire (270, 1605). Nous en donnerons une table ci-après (1598). Les années égyptiennes sont encore employées dans la Perse. Mais, au sujet de la forme ancienne et nouvelle de l'année des Perses, on peut voir les notes de Golius sur Alfergan, Scaliger (*de Emendatione temporum*), et le P. Pétau (*Doctrina temporum*).

1535. Parmi nous, l'année civile est tantôt de 365 jours, et tantôt de 366 (1539); elle commence au premier janvier depuis l'année 1567, en vertu de l'édit de Roussillon donné en 1564 par Charles IX. Les anciens Romains la commençoient avec le mois de mars sous le regne de Romulus; et ils avoient reçu cet usage des Etrusques; les Grecs commençoient au mois de septembre; Numa Pompilius la fixa au mois de janvier. Sous la seconde race de nos rois elle commençoit à Pâque après la bénédiction du cierge pascal; et dans certains endroits elle commençoit à l'Annonciation, c'est-à-dire, le 25 de mars (a), à-peu-près comme chez les Hébreux, dont

(a) Cet usage s'observoit encore à Pise en 1746; et il fut changé par un édit de l'empereur: l'extrait en est gravé sur un marbre, en lettres d'or, à la rive gauche de l'Arno.

l'année ecclésiastique et civile commençoit à Pâque (*Exod.* 12), quoiqu'ils eussent aussi une année solaire qui commençoit au mois de septembre (*Levit. c.* 23 et 25. *Ezech. c.* 40). Voyez aussi l'*Art de vérifier les dates*, par D. Clémencet et D. Durand (*in*-4°, 1752; in-folio, 1770 et 1784); le P. Petau (*Doct. temp. lib. IX, c.* 3); Casali, (*De veteribus sacris christianorum ritibus. Romae,* 1647, in-fol. *c.* 62).

1536. Le printemps, étant le commencement de la reproduction, devoit naturellement commencer l'année :

> Dic, age, frigoribus quare novus incipit annus,
> Qui meliùs per ver incipiendus erat? *Fast. I,* 149.

Mais la raison qui détermina les anciens pour le mois de janvier fut qu'au solstice d'hiver le Soleil recommence à monter vers notre hémisphere boréal; ce commencement d'élévation et d'accroissement dans les jours leur parut devoir être le commencement de l'année :

> Bruma novi prima est veterisque novissima Solis;
> Principium capiunt Phœbus et annus idem. *Fast. I,* 163.

L'année, qui se divise actuellement en 12 mois solaires de 30 ou 31 jours, avoit été divisée par Romulus en dix mois seulement, et elle n'avoit que 304 jours. Macrobe donne un assez long détail du calendrier de Romulus (*Saturn. lib. I, c.* 12), de même que Solinus (*Memorabilium pars I, c.* 2). On y voit que mars étoit le premier mois de l'année, et portoit le nom du dieu dont Romulus vouloit descendre. Les mois de juillet et août se nommoient quintile et sextile. Le mois de décembre étoit, comme son nom l'indique, le dixieme et le dernier mois de l'année.

1537. Numa ajouta 50 ou 51 jours à l'année des Romains, et la fit de 354 jours (*Macr. I,* 13), ou, suivant Solinus, de 355 : il diminua les mois qui étoient de 30 jours, et il en ajouta deux, l'un de 29 jours, l'autre de 28.

> Primus, oliviferis Romam deductus ab arvis,
> Pompilius menses sensit abesse duos. *Fast. III,* 151.

Il plaça ces deux mois, l'un au commencement de l'année, c'est celui de janvier, l'autre à la fin; c'étoit alors le mois de février. Cette réformation se fit vers l'année 713 avant notre ere. Pour qu'elle continuât de s'accorder avec le commencement de l'hiver, il fallut employer des intercalations que l'on changea plusieurs fois (voy. l'*Encyclopédie méthod.* 1784, au mot *année;* Gassendi, *oper. t.* V, pag. 550). L'an 450 avant J. C., les décemvirs déplacerent le

mois de février qu'ils mirent après le mois de janvier de l'année suivante pour prolonger leur magistrature, et cela augmenta la confusion du calendrier, sur lequel même les savans ne sont pas d'accord. Ovide nous apprend aussi que le mois de février avoit été le dernier de l'année ancienne de Numa.

Qui sequitur Janum, veteris fuit ultimus anni;
Tu quoque sacrorum, Termine, finis eras. *Fast. II, 49.*

On voit par ces vers pourquoi les jours intercalaires se plaçoient non à la fin de février, mais après le 24 de février appellé *VI° calend. martii;* c'étoit à cause des *Terminales*, ou de la fête du dieu *Terme*, qui étoit la derniere de l'année, et qui se célébroit le 23 de février (*VII° calendas martii*).

1538. Les intercalations, qui étoient confiées aux prêtres, furent quelquefois altérées; il y eut des temps où par superstition l'on omit des intercalations; il arriva même, selon Censorinus, Macrobe et Solinus, que les prêtres, pour contrarier ou favoriser des magistrats ou des traitans, firent des années plus ou moins longues.

1539. Jules César entreprit de corriger le désordre de ce calendrier 46 ans avant J. C. Il voulut faire correspondre les années civiles aux années astronomiques, en sorte qu'à la même saison l'on comptât toujours les mêmes mois, et qu'on pût dire que le printemps arrivoit toujours au même temps de l'année (voyez Censorinus, *cap.* 10; Suétone, dans la *vie de César;* Dion Cassius, *liv. XLIII;* Solinus, *cap.* 3; Macrobe, *Saturn. lib. I*, *cap.* 14). Jules César étoit curieux d'astronomie; il avoit même composé divers ouvrages.

Media inter prælia semper
Stellarum cœlique plagis superisque vacavi,
Nec meus Eudoxi vincetur fastibus annus. *Pharsal. X*, 185.

César étoit tout à la fois dictateur et pontife, et ce soin le regardoit principalement. Pour s'en acquitter avec plus d'exactitude, il fit venir *Sosigenes*, mathématicien d'Egypte. Pline (XVIII, 25) fait l'éloge de l'application que Sosigenes y donna: *Ipse ternis commentationibus, quanquam diligentior esset caeteris, non cessavit tamen addubitare, ipse semet corrigendo.* Il abandonna la Lune pour s'en tenir aux mouvemens du Soleil; mais, comme l'année solaire étoit de 365 jours et un quart, il falloit, pour suivre ce quart d'excédant, donner un jour de plus à l'année, dans laquelle on rassembleroit les quatre quarts de jour tous les quatre ans.

Sosigenes

Sosigenes imagina donc de faire trois années de 365 jours, et la quatrieme de 366 : on laissa le commencement de l'année d'accord avec le commencement de l'hiver et du mois de janvier, ou plutôt de la nouvelle Lune qui, cette année-là, suivit le solstice d hiver, afin de ne pas s'écarter d'une maniere trop marquée de l'usage des Romains. Ce fut dans les années 47 et 46 avant J. C., suivant la maniere de compter des chronologistes, que se fit la réforme ; et l'année 45, ou 4669 de la période julienne (1567), fut la premiere année julienne réguliere. L'équinoxe arriva le 25 septembre : on prolongea l'année précédente de 90 jours jusqu'à la nouvelle Lune qui suivit le solstice d'hiver, de façon qu'il y eut, suivant Pétau, une année de 445 jours qui fut prise en partie sur l'année 47 et en partie sur 46 ; elle fut appellée l'*année de confusion* (Scaliger, *de Emend. temporum, lib. II, pag.* 187; *lib. IV, pag.* 228; P. Pétau, *Doctrina temporum, lib. IV, c.* 1 ; *lib. X, c.* 61 ; & *Censorinus, c.* 20). Et Scaliger, en suivant Macrobe (*Saturn. I,* 14), donne 444 jours à l'année de confusion ; mais Pétau l'a réfuté (*t. I, pag.* 161).

1540. L'année de Numa n'avoit que 355 jours (1537); il fallut donc en ajouter dix. César, à l'exemple de Numa, répartit ces dix jours de maniere à ne point toucher aux mois de mars, mai, quintile (ou juillet) et octobre, parcequ'ils avoient été établis de 31 jours par Romulus ; il ajouta deux jours à chacun des mois de janvier, sextile (ou août) et décembre, qui étoient de 29, et devinrent par-là de 31 ; il ajouta un jour aux mois d'avril, juin, septembre et novembre, qui en avoient 29, pour les faire de 30 jours ; il n'ajouta rien au mois de février (dit Macrobe, *Saturn. I,* 14) : *Ne deûm inferûm religio immutaretur*, par respect pour les morts à qui le mois de février étoit consacré ; car le mot de février venoit de *Februus*, dieu des lustrations, ou des sacrifices qu'on célébroit à l'honneur des dieux mânes.

1541. Jusqu'alors le mois intercalaire avoit été le mois de février (1537) ; César plaça de même en février le jour intercalaire qu'il ajoutoit tous les 4 ans, et cela après le 23 février, ou le 7e des calendes de mars, et avant le régifuge, ou la fête instituée en mémoire de l'expulsion de Tarquin, qui se célébroit le VI des calendes : ce jour, au lieu d'être le 24, se trouvoit alors le 25 ; et le 24, qui étoit le jour intercalaire, s'appelloit *bis sexto calendas martias*, parceque le jour du régifuge conservoit son nom de *sexto calendas*, et se trouvoit le 25 : de là vint le nom d'années bissextiles pour celles où le mois de février avoit 29 jours, et où le 24 février s'appelloit *bis sexto calendas.* Toutes les années, tant avant qu'après notre ere,

dont le nombre est divisible par quatre, sont bissextiles dans le calendrier julien. Nous verrons ci-après les exceptions du calendrier grégorien (1547).

1542. Jules César étoit né le 4 des ides du mois *quintile;* après sa mort, Antoine, qui étoit son collegue dans le consulat, fit ordonner par une loi que ce mois porteroit le nom de Jules César, et il fut toujours appellé le mois de *juillet* depuis la seconde année de la réformation julienne (1539). Le mois sextile fut ensuite appellé *augustus,* août, en vertu d'un sénatus-consulte, après la bataille d'Actium : non que cet empereur fût né dans le mois *sextile,* car le jour de sa naissance étoit le 23 septembre; mais, dans le mois sextile, dit Macrobe, il étoit parvenu au consulat, il avoit triomphé trois fois, il avoit conquis l'Egypte, il avoit terminé les guerres civiles : ce qui fut cause que le sénat, regardant ce mois comme le plus heureux de l'empire d'Auguste, ordonna qu'à l'avenir on l'appelleroit du nom de ce prince.

Neron voulut donner son nom au mois d'avril; Commode voulut donner le sien au mois d'août, et celui d'Hercule au mois de septembre: Domitien voulut appeller le mois de septembre Germanicus, et celui d'octobre Domitien : mais (comme Macrobe l'observe), après la mort de ce tyran, non seulement on arrachoit ses inscriptions; mais, en haine de sa mémoire, on changea les noms qu'il avoit établis pour les mois de l'année.

1543. Après la mort de Jules César, il y eut un dérangement dans les intercalations; les pontifes, ne comprenant pas le sens de la regle qu'il avoit établie, rendoient bissextile l'année qui étoit la quatrieme, en y comprenant la bissextile précédente, en sorte qu'il n'y avoit que deux années communes, au lieu de trois qu'il doit y avoir entre deux bissextiles : Auguste y remédia, (*Solinus I, part.* 2); mais depuis il n'y a eu dans le calendrier julien aucune interruption. Euler avoit pensé qu'il pouvoit y avoir eu un jour d'erreur; ce qui lui servoit à expliquer la discordance des équinoxes observés par Ptolémée : mais j'ai prouvé, par les lieux de la Lune, qu'il n'y avoit point erreur de date, et il paroît que les observations de Ptolémée étoient défectueuses (*Mém. acad.* 1757). Flamsteed explique par le dérangement des armilles l'imperfection des équinoxes de Ptolémée (2277).

1544. Malgré l'avantage que le calendrier julien avoit sur celui des années égyptiennes, il étoit encore imparfait, puisqu'il supposoit l'année de 365 jours 6^h : on se trompoit de $11'$ chaque année (886), et les $11'$ avoient produit une différence de dix jours sur

l'équinoxe ; ce qui occasionna la réformation grégorienne de 1582.

De la réformation grégorienne pour les années solaires.

1545. La réformation du calendrier avoit été proposée bien des fois depuis qu'on s'étoit apperçu que les équinoxes anticipoient de plusieurs jours (1544). Pierre d'Ailly (*Petrus ab Alliaco*), né en 1350, qui fut chancelier de l'université de Paris, puis évêque de Cambrai, et dont Gerson fut disciple, présenta son projet au concile de Constance, et au pape Jean XXIII, en 1414, et l'on regarde son ouvrage comme ayant été une des premieres occasions de la réforme grégorienne (*Weidler, pag.* 295). Le cardinal *Cusa* écrivit aussi vers le même temps sur la réformation du calendrier, et sur la correction des tables alphonsines. Cet auteur, dont nous avons les œuvres en trois volumes in-folio, mourut en 1464. Le pape Sixte IV forma décidément le projet d'exécuter cette réformation du calendrier ; il attira près de lui Régiomontanus, dont la réputation et le savoir méritoient la plus grande confiance en pareille matiere (403) : mais il mourut à Rome en 1476 avant que d'avoir pu exécuter cette entreprise. Voyez Gassendi dans la vie de Régiomontanus, et dans son histoire du calendrier (*Oper. tom. V, pag.* 584). Le concile de Trente, terminant ses sessions en 1563, chargea le pape de travailler à la réformation du calendrier. Enfin Grégoire XIII parvint en 1582 à terminer ce grand ouvrage ; et le calendrier qu'il a établi a pris le nom de CALENDRIER GRÉGORIEN. (Voy. Clavius, *Calendar. gregorianum,* 1603, in-fol. ; Blondel, *Hist. du calendrier romain,* 1682, in-4° ; Riccioli, *Chronol. reform.* ; Gassendi, *Romanum calendarium,* in-folio, *Op. t. V, pag.* 545 ; Viete, *Relatio calendarii verè gregoriani ;* le P. Meliton, capucin, *Gregoriana correctio illustrata. Tolosae,* in-4°). Le pape envoya en 1577 à tous les princes chrétiens un abrégé des raisons qu'il avoit d'entreprendre la réformation du calendrier, en les priant de consulter tous les mathématiciens qu'ils croiroient capables de lui suggérer des idées nouvelles ou des expédiens commodes. Après avoir reçu différens mémoires à ce sujet, le pape assembla à Rome les gens les plus habiles pour achever ce grand ouvrage. Ce calendrier grégorien, devenu aujourd'hui le calendrier civil dans tous les pays de l'Europe, consiste dans une maniere de compter les années, telle que les saisons commenceront toujours aux mêmes temps de l'année.

1546. Le point fixe d'où l'on partit dans la réformation du calendrier fut la décision du concile de Nicée tenu l'an 325, qui établit

Ee ij

l'équinoxe au 21 de mars, et ordonne que la fête de Pâque sera célébrée le dimanche *après* le XIVe de la Lune du premier mois [a], c'est-à-dire de la Lune dont le 14e arrive *ou le jour même, ou après le jour de l'équinoxe* (1571).

On croyoit, au temps du concile de Nicée, que l'année étoit à-peu-près de $365^j\,5^h\,55'$ suivant le sentiment de Ptolémée (885). On supposa donc que l'équinoxe, qui arrivoit alors le 21 de mars, arriveroit toujours de même, ou qu'on y remédieroit dans la suite: mais comme il y a six minutes de moins dans la véritable durée de l'année solaire (886), l'équinoxe arrivoit chaque année six minutes plutôt qu'on ne croyoit; et, du temps de Grégoire XIII, en 1577, il se trouvoit arriver le 11 de mars. Il auroit fallu omettre trois jours de l'année tous les 400 ans pour que le 21 de mars fût toujours près du véritable équinoxe. On se servit, pour la réformation, des tables de Copernic et de Reinhold (415), qui supposoient la durée de l'année $365^j\,5^h\,49'\,16''\,23'''\frac{1}{2}$.

Ce fut le 24 février 1581 que parut le bref par lequel Grégoire XIII ordonna l'observation des trois articles qui devoient remplir pour toujours l'intention du concile de Nicée; les voici en abrégé.

1547. Il est dit 1°. qu'après le 4 octobre 1582, on retranchera 10 jours du mois, en sorte que le jour qui suivra la fête de S. François, ou le 4 octobre, sera appellé non le 5, mais le 15 d'octobre, et que la lettre dominicale G sera changée en C (1551).

2°. Pour qu'à l'avenir l'équinoxe du printemps ne puisse pas s'éloigner du 21 de mars, il est dit que les années bissextiles, qui avoient lieu de quatre ans en quatre ans, n'auront plus lieu dans les années séculaires 1700, 1800, 1900, mais seulement l'an 2000, et ainsi de suite à perpétuité; de sorte que trois années séculaires soient toujours communes, et la quatrieme bissextile, dans l'ordre suivant :

1600, biss.	2100, com.	2600, com.	3100, com.
1700, com.	2200, com.	2700, com.	3200, biss.
1800, com.	2300, com.	2800, biss.	3300, com.
1900, com.	2400, biss.	2900, com.	3400, com.
2000, biss.	2500, com.	3000, com.	3500, com.

On voit que toutes les années dont le nombre séculaire est divisible par 4, seront bissextiles, comme 16, 20, 24, 28, de même

(a) On commençoit alors l'année au mois de mars.

que les autres années dont les derniers chiffres sont divisibles par 4.

3°. Pour trouver d'une maniere plus sûre le quatorzieme de la Lune pascale, et les jours de la Lune, dans tout le cours de l'année, on supprime du calendrier le nombre d'or, et l'on y substitue le cycle des épactes, plus propre à indiquer la nouvelle Lune dans le calendrier (1573).

Le pape ordonne ensuite à tous les ecclésiastiques d'embrasser la nouvelle forme du calendrier; il exhorte et prie l'empereur et tous les princes chrétiens de le faire recevoir également dans leurs états.

1548. La suppression de dix jours, faite en 1582 dans les états seulement des princes catholiques, fut cause d'une différence qui a subsisté long-temps en Europe dans la maniere de compter les jours; toutes les fois, par exemple, que l'on comptoit en Angleterre le 2 janvier, on comptoit le 12 en France, c'est-à-dire, 10 jours de plus; les personnes qui craignoient l'équivoque datoient ainsi, $\frac{2}{12}$ janvier, c'est-à-dire le 2, *vieux style*, ou style julien; et le 12, *nouveau style*, ou style grégorien. Lorsqu'en 1700 on eut supprimé une bissextile, suivant la regle du calendrier grégorien, la différence se trouva de 11 jours, parceque, dans le calendrier julien, on avoit fait l'année 1700 plus longue d'un jour; ce qui faisoit compter ensuite un jour de moins.

Cette différence du vieux et du nouveau style a subsisté long-temps entre les pays protestans et les pays catholiques. On voit, dans les *Transactions philosophiques* (*n.* 203, 239, 257, 260), ce que l'on pensoit en Angleterre de la réformation : mais elle y a été adoptée enfin; et le nouveau style a commencé en Angleterre au mois de septembre 1752 : on a retranché alors 11 jours, et l'on s'est trouvé d'accord avec nous. Les protestans d'Allemagne avoient adopté le nouveau style dès le commencement du siecle, et, vers 1775, ils ont reçu même le calendrier des épactes pour la célébration de la pâque. La Russie est le seul pays où l'on compte encore 11 jours de moins que dans les autres parties de l'Europe.

1549. La forme du calendrier grégorien est d'une exactitude bien suffisante; cependant comme la durée exacte de l'année differe de 11′ 12″ de l'année julienne (886), au lieu de 10′ 43″36‴′$\frac{1}{2}$; cela fait un jour en 128 ans $\frac{57}{100}$, ou 7 jours en 900 ans, il faudroit ôter 28 jours en 36 siecles, au lieu de 27 qu'on ôte réellement. Ainsi, l'an 5200, il faudroit ôter la bissextile; et il n'y en auroit point depuis 4800 jusqu'en 5600.

M. Carouge, considérant la durée du temps que le Soleil emploie à parcourir chaque signe, observe que si l'on avoit placé le

commencement de l'année au solstice d'hiver, en faisant les trois premiers mois, et les trois derniers, de 30 jours, le Soleil entreroit dans chaque signe presque toujours le premier du mois, et chaque saison occuperoit précisément trois mois; et comme le mois de janvier répond au signe où le Soleil est le moins de temps, ce seroit celui-là qu'on feroit de 29 jours dans les années communes (*Journ. des savans*, août 1776, janvier 1779).

Du cycle solaire et des lettres dominicales.

1550. Le cycle solaire est un intervalle de 28 ans, après lequel les jours de la semaine reviennent aux mêmes jours du mois et dans le même ordre, tant que les années sont bissextiles, de 4 ans en 4 ans. On se servoit de ce cycle, dans la primitive église, pour trouver les jours de la semaine. Suivant la maniere dont on compte les années de ce cycle, elles commencent 9 ans avant l'ere vulgaire.

Ainsi, pour trouver à quelle année du cycle solaire on étoit en 1763, on ajoute 9 avec 1763, l'on divise la somme 1772 par 28, on trouve pour quotient 63 qui nous apprend que le cycle solaire a recommencé 63 fois depuis l'ere chrétienne; mais le reste de la division se trouve de 8; ainsi il y a huit années de plus que les 63 cycles complets; nous étions donc à la huitieme année, c'est-à-dire que l'on avoit *huit* de cycle solaire en 1763. Voyez aussi l'art. 1567.

1551. On trouvera ci-après (1586) le calendrier perpétuel qu'on a coutume de mettre dans les livres d'église, où les douze mois de l'année sont marqués avec des lettres à côté de chaque jour; ces lettres servent à marquer les jours de la semaine qui répondent aux quantiemes des mois, suivant un ordre qui revient tous les 28 ans. On met un A vis-à-vis du premier jour de janvier, B vis-à-vis du 2, et ainsi de suite; si l'année commence par un dimanche, comme cela est arrivé en 1758, la lettre A sera la lettre dominicale, et tous les dimanches de l'année se trouveront indiqués par un A, dans chaque mois du calendrier perpétuel. Après avoir rencontré 52 fois les sept lettres A, B, etc. dans le calendrier, c'est-à-dire, après 52 semaines qui font 364 jours, le 365e jour de l'année recommencera par un A, et sera encore un dimanche; car l'année commune commence et finit par le même jour du mois, parceque 52 fois 7 font 364. Ainsi l'année suivante commencera par un lundi, et aura son premier dimanche le 7 du mois: or, dans le calendrier, c'est un G qui répond au 7 du mois; ainsi la lettre dominicale de cette seconde année sera le G, celle de la troisieme année sera une F, et ainsi de suite dans un ordre rétrograde.

Mais quand il arrive une année bissextile, le mois de février a 29 jours ; la lettre D, qui commence le mois de mars, doit dénoter alors un lundi, si elle a été dominicale pendant les deux premiers mois de l'année : c'est la lettre précédente qui devient dominicale ; car si le 22 de février a été un dimanche, le premier de mars seroit un dimanche dans les années communes, et un lundi dans les années bissextiles : donc dans celles-ci il y a toujours deux lettres dominicales, une qui indique les dimanches pour les mois de janvier et de février, jusqu'à 28 inclusivement ; l'autre qui sert pour le 29 de février et pour les dix autres mois ; on en met deux aux 25, 26, 27 et 28, du moins suivant Clavius et l'*Art de vérifier les dates*, où l'on dit que la lettre dominicale change le jour de S. Mathias, qui est le 24 dans les années communes, et le 25 dans les années bissextiles.

Dans ce siecle-ci quand le cycle solaire est 1, l'année commence par un jeudi, comme en 1756 et 1784 ; la suivante commence par un samedi, les autres par dimanche, lundi, etc., en retardant d'un jour après les années communes, et de deux jours après les années bissextiles.

Quand le cycle solaire est 1, les lettres dominicales sont D et C, comme en 1756 ; dans les 27 années suivantes on a B, A, G, F (et E) ; D, C, B, A (et G) ; F, E, D, C (et B) ; A, G, F, E (et D) ; C, B, A, G (et F) ; E, D, C, B (et A) ; G, F, E. Après 1783 l'on recommencera D et C dans le même ordre pour 28 autres années qui formeront un nouveau cycle solaire.

1552. On peut trouver la lettre dominicale de plusieurs façons. Avant la réformation le nombre 1 du cycle solaire répondoit à GF ; depuis 1582 jusqu'à 1600, à CB ; jusqu'à 1700, à BA ; depuis 1700, à C et DC : après 1800 ce sera ED. Ainsi dans le siecle dix-huitieme l'année 3 du cycle solaire a toujours A pour lettre dominicale ; après quoi l'on recommence par la derniere G, jusqu'à l'année où l'on se trouve ; d'où il est facile en rétrogradant de trouver celle d'une année quelconque.

Une seconde maniere de trouver la lettre dominicale consiste à ajouter 5 au nombre des années de ce siecle-ci, et de plus autant d'unités qu'il y a de bissextiles dans cet intervalle ; la somme étant divisée par 7, le reste désignera la lettre dominicale de l'année, en appellant G la premiere, F la seconde, etc. Pour en sentir la raison, on remarquera que la lettre dominicale de 1700 étoit C, c'est-à-dire la cinquieme dans l'ordre rétrograde marqué au-dessus des lettres dans la table suivante, et qui est celui des lettres d'une année à l'autre. Depuis ce temps-là toutes les années ont eu une lettre ; il faut

donc prendre autant de lettres que d'années depuis 1700, et cinq de plus; et comme les années bissextiles ont deux lettres, il faut encore ajouter autant de nombres qu'il y a eu de bissextiles. Par exemple, en 1763 on ajoutera 63 avec 5 et 15, on divisera 83 par 7, on aura 6 de reste; donc la sixieme lettre B dans l'ordre rétrograde sera la lettre dominicale de 1763. S'il ne reste rien, c'est comme s'il restoit 7, et cela indique la lettre A.

1553. La troisieme maniere de trouver la lettre dominicale est celle-ci: divisez par 7 le nombre de l'année depuis 1700, augmenté de sa quatrieme partie qui désigne le nombre des bissextiles (on néglige le reste s'il y en a); retranchez le reste de 3 (ou de 3 plus 7, c'est-à-dire de 10); vous aurez le chiffre qui indique la lettre dominicale dans l'ordre inférieur de la table suivante. Ainsi pour 1757 ajoutez à 57 son quart 14, la somme 71 étant divisée par 7, le reste sera 1, qu'on ôtera de 3; car ôter de 3, ou ajouter 5, c'est la même chose, excepté que l'on compte vers la droite au lieu de compter vers la gauche. L'on aura donc pour indicateur le nombre 2, qui, dans l'ordre inférieur ci-après, ou dans l'ordre alphabétique, fait voir que B sera la lettre cherchée pour 1757. Si le reste étoit égal à 3, on se serviroit de 10, et l'on auroit 7; ce qui désigneroit la lettre G.

7	6	5	4	3	2	1
A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	4	5	6	7

Si c'est une année bissextile, cette regle donnera la seconde lettre de l'année: la premiere sera celle qui suit dans l'ordre alphabétique.

Pour sentir la raison de ce procédé, on remarquera que la lettre de 1700 étant C ou 3, et la succession des lettres dominicales se faisant dans un ordre rétrograde, il faudra retrancher une unité, et reculer d'une place pour chaque changement qui a eu lieu depuis 1700. Mais comme après sept changemens on se retrouve toujours au point d'où l'on étoit parti, il s'ensuit qu'il faut rejeter 7 autant de fois qu'il se trouvera dans le nombre à retrancher de 3. Ce nombre à retrancher n'est autre que le nombre des années écoulées depuis 1700, augmenté de son quart, à cause des bissextiles qui ont eu lieu tous les quatre ans.

Ces

Ces regles ne serviront que jusqu'en 1799 inclusivement, ou pour la premiere lettre de 1800, parceque les années 1800 et 1900 ne seront point bissextiles, comme le sont les autres années de 4 en 4, ce qui formera une interruption dans le cours ordinaire des lettres dominicales; car l'année 1800 n'aura que la lettre E, au lieu des deux lettres E et D qu'elle auroit dû avoir suivant la regle précédente: ainsi pour le dix-neuvieme siecle, on mettra, dans la premiere regle, 3 au lieu de 5, parceque E, lettre dominicale de 1800, est la troisieme dans l'ordre rétrograde. Mais, pour la troisieme regle, il faut au contraire mettre 5 au lieu de 3, parceque E se trouve la cinquieme dans l'ordre alphabétique. Voyez la table de l'article 1594, où j'ai mis les lettres dominicales pour 28 ans, soit dans le dix-huitieme, soit dans le dix-neuvieme siecle.

Les nombres que nous venons de placer au-dessous de chaque lettre servent aussi à trouver quel sera le premier dimanche de l'année; par exemple, quand la lettre dominicale est A, le premier dimanche tombe au premier janvier; quand elle est B, il arrive le 2, etc.

1554. Pour trouver la lettre qui convient à chaque jour du mois, dans une année quelconque, il suffit de diviser par 7 le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année; le reste de la division sera le nombre répondant à cette lettre, parceque les lettres se suivent sans interruption tout le long de l'année : si ce nombre est 1, on aura A; s'il est 2, on aura B, et ainsi de suite, comme dans les chiffres inférieurs de la petite table précédente. Pour connoître plus aisément le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année, on peut avoir recours à la table que nous en avons donnée, avec celles du Soleil, et encore à la suite du catalogue des étoiles. Dans cette table nous avons fait observer que, si c'est une année bissextile, il faut, pour connoître le nombre de jours, ajouter l'unité après le mois de février, puisqu'il y a un jour de plus, et qu'il se place au mois de février pour y former un 29e jour. Mais, pour trouver la lettre dominicale par le nombre de jours, il ne faut rien ajouter dans les années bissextiles; puisque, dans le calendrier perpétuel, les lettres sont les mêmes toutes les années, et qu'on n'y marque point le 29 de février: la lettre du 29, dans les années bissextiles, est la même que celle du 28 dans une année commune.

1555. Pour connoître à quel jour de la semaine répond un quantieme de mois, dans ce siecle-ci, par exemple, le 20 février 1762: on considérera que chaque année le jour de la semaine change d'une unité, parcequ'il y a 52 semaines et un jour de plus dans une année commune; ainsi à 1761 complet ajoutez le nombre de bissextiles qui

y sont renfermées, savoir 440; ôtez-en 12 jours, savoir 11, à cause du nouveau style, et 1, parceque la premiere année de notre ere commençant par le samedi qui répond à 7 ou à zéro, il falloit encore un jour pour achever la semaine; en sorte que la suivante commençoit le 2 janvier de l'année 1 de J. C. Ajoutez-y les jours écoulés depuis le commencement de l'année, c'est ici 51; divisez la somme 2240 par 7, il ne reste rien; ce qui prouve que c'est un samedi: s'il restoit 1, ce seroit un dimanche, et ainsi des autres.

On peut étendre cette regle à d'autres siecles, en n'ajoutant que le vrai nombre des bissextiles, et ôtant la différence des deux styles.

Si l'on vouloit trouver la même chose en suivant l'ancien calendrier, il ne faudroit ôter que 1, au lieu de 12, puisqu'il y a 11 jours à compter de moins, quand on suit le vieux style.

1556. Voici une table qui sert aussi à trouver quel est le jour de la semaine qui répond à chaque jour du mois, quand on connoît l'année du cycle solaire, ou la lettre dominicale.

Table pour trouver le quantieme du mois qui répond à chaque jour de la semaine, quand on connoît la lettre dominicale.

juil. 5 avril 2	sept. 7 déc. 10	juin. 4	févr. 12 mars 1 nov. 9	août 6	mai 3	janv. 11 oct. 8
1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	7 14 21 28
G	F	E	D	C	B	A
dim.	lun.	mar.	mer.	jeudi	ven.	sam.

Les chiffres d'en-haut indiquent l'ordre des mois, en supposant que le mois de mars s'appelle 1; les autres chiffres de la table indiquent les jours du mois qui répondent à un des jours de la semaine, indiqué par la lettre dominicale qui est au bas de la table. Ainsi, quand la lettre dominicale est G, comme en 1770, le dimanche arrive dans les mois d'avril et de juillet, le 1, le 8, le 15, le 22 et le 29; dans les mois de septembre et de décembre le 2, le 9, etc. Quand la lettre dominicale est F, comme en 1771, tous les nombres de la table marquent le lundi; car le nombre 1, qui répond aux mois 5 et 2, c'est-à-dire aux mois de juillet et d'avril, se trouve en effet indiquer que ces deux mois commencent par le lundi; le nombre 2, qui est au-dessous de 7 et 10, c'est-à-dire, de septembre et décembre, annonce que, dans ces deux mois, le 2 est un lundi, etc.

On trouve souvent cette table gravée sur le revers des cadrans à boussole que l'on faisoit autrefois; si les noms des mois, les lettres dominicales, et les jours de la semaine n'y sont pas marqués, elle devient alors une énigme dont j'ai cru devoir donner ici l'explication.

1557. Troisieme méthode pour trouver le jour de la semaine à chaque jour du mois dans une année quelconque. Réduisez la date au vieux style. Ajoutez à l'année sa quatrieme partie, en négligeant le reste, s'il y en a. Ajoutez le quantieme du mois, et le nombre correspondant au mois donné dans la table suivante.

janvier	5 ou 4	avril	4	juillet	4	octobre	5
février	1 ou 0	mai	6	août	0	novem.	1
mars	1	juin	2	sept.	3	décem.	3

Pour janvier et février le second nombre sert dans les années bissextiles; divisez la somme totale par 7, le reste 0 indiquera le samedi, 1 fera dimanche; 2, lundi, etc.

Exemple : Le roi est né le 23 août 1754, ou le 12, vieux style; on demande le jour de la semaine. Avec 1754 j'ajoute le quart 438, le quantieme 12, rien pour août; la somme 2204 étant divisée par 7, il reste 6 qui désigne le vendredi.

Du cycle lunaire et du nombre d'or.

1558. LE CYCLE LUNAIRE est un espace de 19 années solaires, dont 5 sont bissextiles ou de 6940 jours à-peu-près, dans lequel il arrive 235 lunaisons (1416); en sorte qu'au bout des 19 ans les nou-

velles lunes arrivent au même degré du Zodiaque, et par conséquent au même jour de l'année, que 19 ans auparavant [a]. On appelle la premiere année d'un cycle lunaire, celle où la nouvelle lune arrive le 1 de janvier, du moins suivant le calendrier grégorien. De ces 235 lunaisons, on en donne 12 à chaque année, ce qui fait 228 mois lunaires, alternativement de 29 et de 30 jours; il en reste 7 qu'on appelle *lunaisons embolismiques* ou *intercalaires :* il y en a six de 30 jours chacune, que l'on place de trois en trois ans, mais la septieme est de 29 jours seulement; on la place à la fin du cycle ou de la dix-neuvieme année, où elle forme une irrégularité. Tout cela fait 6935 jours; il en manque 5 qu'on ajoute, dans les 5 années bissextiles, à la lunaison qui renferme le vingt-neuvieme jour de février; car cette lunaison a 30 au lieu de 29, ou 31 au lieu de 30 (Clavius, *pag.* 87). La totalité fait 6940 jours, comme les 19 années dont 5 sont bissextiles. L'on appelle NOMBRE D'OR l'année du cycle lunaire, dans laquelle on se trouve.

1559. Pour faire voir plus exactement la correspondance des 235 lunaisons avec les 19 années lunaires, il faut considérer que les lunaisons étant de 29 et 30 jours, on néglige $44' 3'' 10''' 48''''$, qui, au bout du cycle, font $7^j\, 4^h\, 32'\, 27''\, 18'''$ [b]. De plus, en faisant 234 lunaisons, alternativement de 29 et 30, c'est comme si on les avoit faites de 29 et demi chacune : la derniere devroit être aussi de $29\frac{1}{2}$, au lieu de 29; car après celle-ci il ne s'en trouve plus qui puisse suppléer 12 heures pour faire 30 jours complets. On la fait de 29 seulement; si l'on ajoute les 12 heures qu'on lui ôte, avec les 7 jours 4^h, etc. retranchés ci-dessus, on aura pour l'erreur totale $7^j\, 16^h\, 32'\, 27''\, 18'''$. C'est trop pour compenser celle de $4^j\, 18^h$, faite sur les 19 années solaires; il reste $2^j\, 22^h\, 32'\, 27''\, 18'''$ qu'il faut rendre aux mois lunaires. Mais, dans le cycle de 19 ans, six lunaisons intercalaires, au lieu d'être alternativement de 29 et de 30, ont toutes été faites de 30 jours : elles ont donc pris 3 jours de trop; elles ont plus que compensé l'erreur de $2^j\, 22^h$ qui restoit ci-dessus. La différence est $1^h\, 27'\, 32''\, 42'''$ [c]; et c'est précisément l'erreur du cycle lunaire (1563).

(a) Il est vrai que l'apogée de la Lune est plus avancé de 53°; en sorte qu'il peut y avoir 9° de différence sur la longitude de la Lune, à midi : mais cela n'empêche pas que le cycle ne ramene les nouvelles lunes moyennes au même jour du mois.

(b) Clavius donne 17''' de moins, en quoi il se trompe, comme l'a remarqué M. de Lambre.

(c) Clavius donne 1''' de moins (*pag.* 87, *édit.* de 1612). Cette légere différence affecte sensiblement le reste du calcul.

Cette erreur se corrige par l'équation lunaire qui s'applique tous les 3 ou 4 cents ans (1579, 1583).

1560. Toutes les fois que la nouvelle Lune arrive le premier de janvier, comme en 1767, on recommence un cycle lunaire, et l'on a 1 pour le nombre d'or, du moins à présent. Voici la regle générale pour trouver le nombre d'or en tout temps : on ajoute 1 à l'année de notre ere, parceque, dans l'année 1 de notre ere, le nombre d'or a dû être 2 ; on divise la somme par 19 ; le reste, s'il y en a un, marque l'année du cycle lunaire où l'on se trouve, c'est-à-dire, le nombre d'or qui convient à l'année proposée. Ainsi en 1764 après avoir ajouté 1, l'on divisera 1765 par 19 ; le quotient sera 92, parceque le cycle lunaire a recommencé 92 fois : mais il restera 17 ; et cela nous apprend que le nombre d'or en 1764 est 17 : si l'on ne trouve aucun reste dans la division, c'est une preuve qu'on est à la derniere année du cycle, ou que le nombre d'or est 19. Voyez aussi l'article 1567.

1561. Il est bon d'observer qu'il y a eu autrefois deux cycles de 19 ans, appellés également nombre d'or, l'un emprunté des Hébreux, l'autre des Romains ; et l'un des deux commençoit trois ans plus tard que le nôtre (voyez l'*Art de vérifier les dates*, pag. xx de l'édition *in-folio*, 1770).

Dans la table chronologique de l'ouvrage que je cite, la premiere année de notre ere répond à 18 du cycle de 19 ans, et à 2 de notre cycle lunaire : mais le premier n'y est pas continué au-delà de l'an 1582, où il y a 6 pour le cycle de 19 ans, et 3 pour le cycle lunaire. Celui-ci est le seul qui aille jusqu'à la fin de la table ; c'est celui qui a prévalu, et à qui l'on a laissé le nom de *cycle lunaire*, suivant l'usage actuel de tous les calendriers ; et c'est celui dont nous avons déja parlé (1556).

1562. Les lunes prennent quelquefois le nom du mois où elles finissent : on appelle lune de mars, celle qui finit en mars ; et cela est une suite naturelle de la distribution des 235 lunaisons dans les 19 années. Voyez à ce sujet la *Connoissance des temps* de 1773 et 1774, *pag.* 255 ; le *Journal des savans*, déc. 1771 ; le *Journal de Paris*, 4 mars 1783 ; l'*Art de vérifier les dates*, *pag.* xxij ; l'*Encyclopédie méthodique*, au mot *Lune*.

1563. Pour savoir exactement combien le cycle lunaire differe de 19 années juliennes de 365 jours $\frac{1}{4}$ chacune, ou de $6939^{j}\ 18^{h}$, il ne s'agit que de multiplier par 235 la révolution synodique de la Lune, qui est $29^{j}\ 12^{h}\ 44'\ 3''\ 10'''\ 48''''$, suivant le calendrier grégorien ; on trouvera, suivant Clavius (*cap.* 8, *n°*. 4, *pag.* 86), 6939

jours $16^h 32' 27'' 18'''$: ainsi il y a un excès de $1^h 27' 32'' 42'''$ (a); donc, à la fin des 19 ans, les nouvelles lunes arriveront $1^h \frac{1}{2}$ plutôt, puisque le cycle finira à-peu-près $1^h \frac{1}{2}$ avant la fin des 19 ans, ce qui formera, après 312 ans $\frac{1}{2}$, la valeur de $23^h 59' 52'' 49'''$, c'est-à-dire, un jour, moins $7'' 11'''$; car $1^h 27' 32'' 42'''$ sont à 19, comme 24^h sont à 312. En calculant plus rigoureusement avec les données du calendrier grégorien, l'on aura l'anticipation exacte d'un jour sur 312 ans $\frac{1}{2}$, plus $23^j 17^h$. Pour tenir compte de cette différence, on fait une correction dans les années séculaires seulement; les 312 ans et demi font une équation d'un jour tous les 300 ans : mais ensuite tous les 2400 ans, il y a 100 ans de retard, et l'équation d'un jour est reculée d'un siecle, parceque les 12 ans et demi, omis tous les 300 ans, font un siecle après 2400 ans. C'est sur ce dernier résultat de 312 ans et demi qu'on a réglé l'*équation lunaire* (1582) d'un jour entier pour chaque espace de 300 ans, excepté la huitieme fois où l'on attend 400 ans. En conséquence après chaque espace de 2500 ans, il y a 8 jours. Il s'en faut encore presque un tiers de jour, après 481436 ans, à cause des $23^j 17^h$, qui font alors à-peu-près 100 ans; mais on néglige cette différence, parceque cette période excédoit celle de 300000 ans, pour laquelle principalement le calendrier avoit été dressé (Clavius, *pag.* 133).

1564. Il y avoit, du temps de la réformation grégorienne (1545), plusieurs astronomes qui, en suivant le calcul d'Hipparque, assuroient que c'étoit en 304 ans, et non en 312 ans $\frac{1}{2}$, qu'il devoit y avoir un jour à ajouter au cycle lunaire. Si l'on admet avec Mayer le mois lunaire, vers 1700, de $29^j 12^h 44' 2'' 8921$ (au lieu de $3'' 10''' \frac{4}{5}$), on trouve pour 235 lunaisons $6939^j 16^h 31' 19'' 6435$, c'est-à-dire, par rapport aux 19 années de $365^j \frac{1}{4}$, ou 6939^j et 18^h, un défaut de $1^h 28' 40'' 3565$ (b); or cette quantité est à 6939 jours 18^h, comme

(a) Clavius, à la page 99, n'emploie que $31'' 55'''$; et cette faute, jointe à celle de $1'''$, remarquée ci-dessus, lui fait trouver ensuite $7'' 11'''$, au lieu de $6'' 54''' \frac{1}{2}$, et 481436 ans, au lieu de 1250566 ans qu'il auroit dû trouver, suivant le calcul de M. de Lambre, qui a reconnu ces deux fautes dans l'immense ouvrage de Clavius. Au reste, ce n'est véritablement qu'au bout de 1302774 ans, que l'erreur est d'un tiers de jour; en sorte que le calendrier est plus exact que Clavius ne le croyoit.

(b) Il y a au contraire un excès de 2 heures $4' 8''$, si l'on prend 19 années solaires de 365 jours 5 heures $48' 48''$. Ainsi on calcule l'erreur du cycle lunaire, par rapport aux années juliennes qui sont trop longues : on corrige cette erreur, en ôtant un jour de l'année à chaque siecle, et la correction du cycle lunaire se trouve faite réellement en sens contraire, par rapport aux années grégoriennes; car on diminue plus que l'on n'augmente l'année, l'équation solaire étant plus fréquente.

24^h sont à 308 années communes 201 jours 3^h 89[a]. Ainsi l'erreur du cycle lunaire seroit d'un jour en 308 ans et demi, et non pas 312 ans½. Mais, comme nous n'avons à expliquer ici que le calendrier grégorien, tel qu'il a été établi, nous supposerons, avec les auteurs de ce calendrier, que la révolution de la Lune est exactement telle qu'on la trouve dans les tables prussiennes d'*Erasme Reinhold*(415): il avoit comparé les observations de Copernic avec celles de Ptolémée et d'Hipparque; il avoit dressé des tables calculées avec encore plus de soin que celles de Copernic, et elles passoient pour être les meilleures de toutes avant la publication des tables rudolphines de Képler.

Le cycle lunaire a été long-temps la seule maniere que l'on eût de trouver les nouvelles lunes de chaque mois; mais l'imperfection que nous venons de faire voir dans le cycle lunaire, lui a fait substituer celui des épactes, que nous expliquerons bientôt (1575).

1565. Les combinaisons du cycle solaire et du cycle lunaire forment la période dionysienne, qui doit ramener les nouvelles lunes aux mêmes jours de la semaine, et aux mêmes jours du mois, puisqu'à la fin de chaque cycle solaire, les jours du mois reviennent aux mêmes jours de la semaine, et qu'au bout de chaque cycle lunaire, les nouvelles lunes reviennent aux mêmes jours du mois. Si l'on multiplie 19 par 28, ou le cycle lunaire par le cycle solaire, on aura 532 ans. Cette période fut employée par *Denys le Petit*, l'an 527 (Janus, *Hist. cycli dionysiani;* Petavius, *Doct. temporum, lib. II, cap.* 67). Ce fut lui qui, en réformant les calculs du calendrier, établit pour époque de nos années celle de la naissance de J. C.; ce qui fut adopté bientôt dans toute la chrétienté. Cette période s'appelle aussi *période victorienne*, à cause de Victorinus ou Victorius qui l'avoit proposée le premier dans le cinquieme siecle, pour corriger le cycle pascal de Cyrille et Théophile (Petav. *tom. I, pag.* 116). Enfin on l'appelle *grand cycle pascal*, parcequ'après cet espace de 532 ans, les nouvelles lunes reviennent aux mêmes jours de la semaine et du mois, ainsi que les lettres dominicales; Pâques et les fêtes mobiles se retrouvoient aussi dans le même ordre, avant la réformation grégorienne, et alors on s'en servoit réellement pour cet effet. Quand on veut trouver l'année actuelle de cette période, en partant de celle où l'on avoit 1 de cycle solaire et de cycle lunaire, comme Blondel, dans son *Histoire du calendrier*, il faut ajouter 457 à l'année courante, et diviser la somme par 532, le reste est l'année de la période dionysienne. Mais, dans l'*Art de vérifier les*

(a) Ou 201 jours 4 heures; ce sont des années de 365 jours et un quart.

dates, on fait commencer cette période l'année o de J. C., qui avoit 9 de cycle solaire, et 1 de cycle de 19 ans; et cela, d'après Denys le Petit, réformateur de cette période : Victorius en avoit fixé le commencement à l'an 28; et l'on a varié beaucoup à ce sujet. Depuis la réformation du calendrier, cette période n'est plus d'aucun usage.

Du cycle d'indiction, de la période julienne, et de quelques autres périodes.

1566. Les indictions, ou especes d'ajournemens, qu'on employoit dans les tribunaux sous Constantin et les empereurs suivans, formerent une période ou un cycle de 15 ans, qui s'est perpétué sans cause, et comme une forme arbitraire de numération; les indictions commencerent au 25 septembre 312. Les empereurs grecs, et l'église de Constantinople, commençoient à compter les indictions du premier septembre; les papes, qui s'en servent aussi, commencent au premier janvier 313. Cette période n'a rien de plus remarquable que d'être citée dans les actes de la cour de Rome, et à Venise dans les actes du sénat.

Si l'on prolonge le cycle d'indiction, en remontant au-delà même de son institution, l'on voit qu'il auroit été 1, trois ans avant l'ere vulgaire. Il suffit donc d'ajouter 3 au nombre de l'année courante, et de diviser la somme par 15; le reste de la division sera le nombre du cycle d'indiction qui convient à l'année proposée. Ainsi, pour 1763, on divisera 1766 par 15; le quotient 117 nous apprend qu'il y a eu 117 révolutions de ce cycle depuis le commencement de notre ere, et le reste 11 de la division est le nombre d'indiction qui convient à 1763. On verra une autre méthode à la fin de l'article suivant.

1567. La période julienne est le produit des trois cycles, solaire, lunaire et d'indiction, ou de 28, 19 et 15, c'est-à-dire, un espace de 7980 ans, dans lequel il ne peut y avoir deux années qui aient les mêmes nombres pour les trois cycles, mais au bout duquel les trois cycles reviennent ensemble dans le même ordre. Pour savoir combien de temps il y a que cette période a commencé, il ne faut qu'ajouter 4713 à l'année de l'ere chrétienne, et l'on a l'année de la période julienne qui répond à l'année courante où l'on est.

La période julienne a été proposée par Joseph Scaliger [(a)] comme une

(a) Il naquit à Agen, en 1549. Son pere, Jules-César Scaliger, étoit né en 1484 : Ozanam et d'autres disent que c'est du nom de son pere qu'il tira celui

une mesure universelle en chronologie (*de Emendatione temporum*, 1583); nous y réduirons ci-après toutes les époques (1597). Képler et Boulliaud en ont fait usage dans leurs tables astronomiques, et sur-tout *Mercator* (*Institutiones astronomicae*, 1676, *pag*. 217).

Les époques des mouvemens célestes sont rapportées à la premiere année de la période julienne, dans Muller, et celles de la chronologie, dans le grand ouvrage de Petau, *de Doctrina temporum*. Par exemple, la premiere année de l'ere vulgaire est l'année 4714 de la période julienne; et la création du Soleil, suivant Scaliger, répondroit au 22 octobre 764 de cette période, ou à l'an 730, suivant Petau (1595).

La période julienne peut servir à trouver pour chaque année les trois cycles; car il suffit d'ajouter 4713 à l'année de notre ere, et de diviser la somme par 28, par 19, par 15: les restes sont les nombres de chaque cycle.

1568. Si, pour une année dont on connoît le cycle solaire, le nombre d'or et l'indiction, on cherchoit quelle est l'année de la période julienne, ce seroit la matiere d'un problême indéterminé arithmétiquement, mais déterminé chronologiquement; il se réduit à chercher un nombre qui, divisé par trois nombres donnés, produise trois restes donnés. Wallis en donna une solution en 1678; elle fut imprimée à la suite des œuvres d'Horoccius. On en trouve une d'Euler dans les *Mémoires* de Pétersbourg (*tom. VII, page* 46), et une dans les *Institutions astronomiques* de M. le Monnier (*page* 620). En voici une encore différente.

PROBLÊME. *Trouver un nombre qui, divisé par* 28, *donne pour reste un nombre* a; *divisé par* 19, *donne un reste* b; *et divisé par* 15, *donne un reste* c.

SOLUTION. Nommons x, y, z, les trois quotiens des divisions par 28, 19 et 15; l'on aura pour le nombre cherché $28\,x + a = 19\,y + b = 15\,z + c$. Pour résoudre en nombres entiers l'équation $28\,x + a = 19\,y + b$, ou $y = x + \frac{9x+a-b}{19}$, je suppose $m = \frac{9\,x+a-b}{19}$, ou $x = 2\,m + \frac{m-a+b}{9}$; j'égale encore cette fraction à n, et j'ai $m = 9\,n + a - b$, donc $x \left(= 2\,m + \frac{m-a+b}{9}\right) = 19\,n + 2\,a - 2\,b$; et $28\,x + a = 532\,n + 57\,a - 56\,b = 15\,z + c$.

de *Période julienne*. Mais Petau et Riccioli disent que c'est à cause des années juliennes dont il se servoit: Petau ajoute que Scaliger avoit reçu cette période des Grecs de Constantinople (I, 356).

Pour résoudre de même en nombres entiers cette équation, je la mets sous cette forme, $z = 35\,n + 3\,a - 3\,b + \frac{7n + 12a + 11b - c}{15}$, j'égale la fraction à p, j'en tire $n = 2\,p - a + b + \frac{p - 5a + 4b + c}{7}$, et faisant cette fraction $= q$, il s'ensuit que $p = 7\,q + 5\,a - 4\,b - c$, donc $n = 2\,p - a + b + q = 15\,q + 9\,a - 7\,b - 2\,c$; et $532\,n + 57\,a - 56\,b$, qui est la valeur de $15\,z + c$, sera $= 7980\,q + 4845\,a - 3780\,b - 1064\,c$; c'est aussi la valeur du nombre cherché.

Regle générale. Les produits du nombre d'or par 3780 et de l'indiction par 1064, étant ôtés du produit de 4845 par le cycle solaire (augmenté, s'il le faut, de 7980), on divisera la différence par 7980, si cela se peut; le reste de la division sera le nombre cherché, ou l'année de la période julienne.

Exemple. En 1770 les cycles étoient 15, 4 et 3; les trois produits sont 72675, 15120 et 3192, le quotient 6, et le reste de la division 6483; c'est l'année de la période julienne qui répond à 1770.

On ajouteroit le nombre 7980 pris autant de fois qu'il le faudroit, si la somme des trois produits étoit négative; mais quand le nombre positif est plus grand que les deux produits negatifs, il n'y a rien à ajouter aux trois produits, et q est égal à zéro.

1569. Quoique le cycle lunaire soit la période la plus simple de celles qui expriment avec quelque exactitude le retour de la Lune au Soleil, il y a cependant plusieurs autres périodes remarquables : telle est la période caldéenne de 18 ans et dix jours (1501); celle de 59 ans, proposée par Philolaüs et Œnopidès; et celle de 76 ans, proposée par Calippus Cyzicenus, astronome grec, qui vivoit 330 ans avant J. C. Cette période est quadruple du cycle lunaire; et, en ôtant un jour de 4 cycles, il croyoit le rendre plus exact. Il en est parlé dans Censorinus (*c.* 18); Ptolémée (*III*, 2; *V*, 3; *VII*, 2 *et* 3); Scaliger (*page* 84); Petau (*II*, 16).

La période de 304 ans fut employée par Hipparque, pour les années civiles (Riccioli, *Almag. I*, 243). Voyez sur les autres périodes l'ouvrage *de veteribus Graecorum Romanorumque cyclis ab Henrico Dodwello*, Oxonii 1701, 919 pages *in*-4°; l'*Encyclopédie*, au mot *cycle* (*tom. XVII in-fol. pag.* 767). Il faut voir aussi deux mémoires de Dominique Cassini : l'un, intitulé *Nouveau cycle solaire;* et l'autre, *sur le Calendrier, et la différence entre les cycles lunaires et solaires* (Anciens Mémoires de l'acad. 1666, *tom. I*, *pag.* 205; *tom. II*, *pag.* 198).

1570. On trouve aussi dans les anciens quelques vestiges d'une

période de 600 ans (271), que Dominique Cassini a fait valoir comme la plus exacte de toutes les périodes lunisolaires (*de l'origine de l'Astron. p.* 4; *Regles de l'astron. indienne, p.* 56). Joseph, dans ses Antiquités judaïques (*liv.* 1, *ch.* 4), dit que les patriarches n'auroient pu perfectionner l'astronomie s'ils avoient vécu moins de 600 ans, *parceque ce n'est qu'après la révolution de six siecles que s'accomplit la grande année.* Cassini observe aussi que 600 années solaires qui seroient de 365^j 5^h 51' 37" $\frac{1}{2}$ chacune, et 7421 mois lunaires (supposés de 29^j 12^h 44' 3" chacun) font de part et d'autre la même somme, savoir, 219146 jours 12^h 15' ou 18934258500"; il n'y a pour la Lune que 3" de plus; or ces périodes sont peu différentes de celles que nous avons trouvées, savoir, pour l'année, 365^j 5^h 48' 48", et pour le mois lunaire il y a 2000 ans, 29^j 12^h 44' 2"81 (1422, 1481). Ainsi, dans l'espace de 600 ans, la Lune doit revenir en conjonction avec le Soleil dans le même point du ciel (*Anciens Mém. de l'académie, tom. VIII, pag.* 5). Il fit là-dessus un livre qui n'a pas paru. (Weidler, *p.* 629; *Mém. acad.* 1733). Voy. M. le Gentil, *Mém.* 1756, *p.* 64; M. Bailly, *tom. I, pag.* 66 *et* 309; M. Goguet, *tom. III, pag.* 261. Il y a une dissertation de Mairan sur cette période de 600 ans, à la suite de ses lettres au P. Parennin (1770, *pag.* 83, 125).

J'observerai seulement que si l'on emploie la durée de l'année que nous connoissons, et le mois synodique tel que nous l'avons indiqué ci-devant, l'on aura 28^h 1' 42" de trop dans les 7421 mois lunaires; ainsi la Lune retarderoit de plus d'un jour au bout de 600 ans: mais, dans ces temps reculés, on ne pouvoit connoître l'année solaire avec une si grande précision. M. Bailly croit que cela prouve que la durée de l'année n'étoit pas la même qu'à présent (*Mém. academ.* 1773). Mais il est plus naturel de croire qu'on la connoissoit mal (*Mém. academ.* 1782.) L'erreur de la période de 18 ans, répétée quatorze fois, ne feroit, au bout de 266 ans, que 28^h 58' d'erreur; ainsi il ne vaudroit pas la peine d'y substituer celle de 600 ans.

1571. Mais il y en a une bien plus exacte, c'est la *période lunisolaire* de *Louis le Grand*, proposée par Cassini (*Regles de l'astronomie indienne*). Cette période de 11600 ans ramene les nouvelles lunes au même jour et presque à la même heure de l'année grégorienne.

1572. Le *Néros* des Caldéens n'étoit, suivant Goguet, que la période de 600 ans; mais on dispute beaucoup sur la valeur de trois périodes anciennes appellées Sossos, Néros et Saros. Bérose, prêtre de Babylone, en parloit dans son *Histoire des Caldéens*, composée 300 ans avant notre ere. Cette histoire, qui n'existe plus, fut citée par

Jule Africain, auteur du second siecle, qui composa une chronique grecque; mais elle est également perdue. George, surnommé le *Syncelle*, qui, dans le huitieme siecle, a écrit une chronographie en grec, cite un passage de Bérose, qui avoit été rapporté par Jule Africain, où il s'agit du *Sossos*, du *Néros* et du *Saros*, et c'est là le seul passage ancien où il en soit parlé. Le Syncelle cite Anianus et Panodorus qui avoient prouvé que le *Sossos* étoit de 60 jours, le *Néros* de 600 jours, et le *Saros* de 3600 jours, ou 9 années communes, dix mois et onze jours. M. le Gentil, d'après M. Fugeres, fait aussi le *Saros* de dix ans (*Mém.* 1756.) Fréret a cru que le *Saros* étoit de 19 ans et demi (*Mém. de l'acad. des inscr. tom. VI.*) Le P. Giraud de l'Oratoire pense qu'il est de 3600 mois juliens, qui font 3711 lunaisons ou 31 ans. (*Mém. de Trév. fév.* 1760.) Goguet (tom. III), et Gibert (*Mém. de Trévoux, avril* 1760), estiment le *Néros* de 600 ans. Enfin M. Dupuis croit que ce n'étoient que des périodes allégoriques tirées de la division des douze signes du zodiaque, d'abord en dix parties, puis successivement en 60, en 10, et en 60; ce qui donne 4320000 parties, comme dans la période allégorique des Indiens (391).

Quoi qu'il en soit, Suidas, et après lui Halley, ont attribué sans preuve le nom de *Saros* à la période caldaïque de 18 ans (1501).

1573. L'année lunaire est de 354 jours 9ʰ. Si l'on néglige 11' qu'il y a de moins (1481), le temps que le commencement de l'année lunaire doit mettre à revenir d'accord avec le commencement de l'année solaire se trouve de 2835 années solaires, qui font 2922 années lunaires. Cette période sert à Gibert (*Mém. de Trévoux*, 1762, *pag.* 197) pour expliquer un passage célebre, mais très obscur, d'Hérodote (*l.* 2, *c.* 42.) Cet auteur voyageant en Egypte 450 ans avant Jésus-Christ, entendit dire aux prêtres égyptiens que pendant la durée de 341 regnes qu'ils comptoient dans leur histoire, jusqu'au temps de Séthon, qui étoit sur le trône quand Sennachérib vint fondre sur l'Égypte, *le Soleil s'étoit levé quatre fois des points où il a coutume de se lever; et que deux fois il avoit recommencé son cours du côté où il se couchoit du temps d'Hérodote, deux fois il l'avoit fini du côté où il se levoit au même temps.*

Gibert pense que le mot de *soleil* doit se prendre au figuré. En effet, suivant le témoignage de *Phavorinus*, au mot ἥλιος, on disoit un soleil pour dire un jour, d'autrefois pour une année. M. G. évalue les 341 regnes à 11340 ans, à raison de 33 ans pour chacun; et il observe que, dans cet espace de temps, la période lunaire s'est accomplie quatre fois; les quatre renouvellemens de cette période don-

neront, pour ainsi dire, quatre levers du soleil, ou quatre commencemens d'année égyptienne aux commencemens de l'année lunaire; mais, dans ces 11340 ans, l'année avoit commencé deux fois dans la saison où elle finissoit au temps d'Hérodote : voilà peut-être le sens emblématique du passage. Cette conjecture paroît du moins plus soutenable que les applications forcées qu'on a voulu faire des hypotheses astronomiques à ce passage d'Hérodote. Voyez Fréret sur *la Chronologie de Newton;* Goguet, *tom.* 3, *pag.* 298; M. le Gentil, *Mém. de l'acad.* 1757, et différens volumes des *Mémoires de l'académie des inscriptions,* où ce passage d'Hérodote est discuté.

1574. La grande année appellée chez les anciens Ἀποκατάστασις ou *Restitutio,* étoit celle qui devoit ramener les phénomenes célestes et les événemens moraux dans le même ordre. On a donné ce nom à la précession des équinoxes (917), à cause du rétablissement des étoiles aux mêmes positions par rapport aux cercles de la sphere : elle est de 25696 ans (2769). Les peuples superstitieux firent de ce retour purement astronomique, un retour moral et civil des choses humaines, auquel on croit que Virgile fait allusion :

> Alter erit tum Tiphys, et altera quæ vehat Argo
> Delectos heroas : erunt etiam altera bella,
> Atque iterum ad Trojam magnus mittetur Achilles.
>
> *Eclog. IV,* v. 34.

La grande année étoit différente suivant les différens auteurs : on la trouve de neuf mille ans, de 12, de 15, de 24, de 36, de 49, de 100, de 300, de 470 mille, et même de 1753200, de 4320000, et de 6570000, (*Scaliger in canon. isagog. pag.* 252; M. de la Nauze, *Mém. de l'acad. des inscrip.* tom. XXIII.) La période indienne de 4320000 n'est qu'une allégorie (391), de même que celle des Grecs de 36525 ans (M. Dupuis, pag. 179.)

Des épactes ou de la réformation grégorienne pour les années lunaires.

1575. Le calendrier établi par Grégoire XIII en 1582 avoit pour premier objet de régler les années civiles de maniere que l'équinoxe du printemps arrivât toujours aux environs du 21 de mars; cet objet a été rempli par l'ordre des intercalations (1547.)

Mais la réformation avoit encore une autre branche, importante dans les vues de l'église; c'étoit de remettre les nouvelles lunes, et sur-tout le quatorzieme de la lune pascale, au même état où elles

avoient été en 325, au temps du concile de Nicée, et dont elles étoient éloignées de plus de quatre jours.

1576. Denys le Petit assure que, suivant une lettre des péres du concile de Nicée, on doit célebrer la fête de Pâque le dimanche *après* le 14e de la lune, si ce 14e arrive ou *le 21 de mars* ou *après le 21 de mars* [a]; ainsi la fête de Pâque ne doit jamais arriver plutôt que le 22 de mars, car la regle dit que ce sera le premier dimanche *après* le quatorzieme : cela est arrivé en 1598, 1693 et 1761, et aura lieu en 1818, 2285, etc. Cette fête n'arrive jamais plus tard que le 25 avril; car si la pleine lune tombe le 20 mars, ce ne sera pas la pleine lune pascale; on attendra celle qui suit le 21 mars, ou celle du 18 avril; et si c'est un dimanche, ce ne sera encore que le dimanche suivant, 25 avril, qui sera le jour de Pâque (1594).

Le P. Alexandre (*Hist. ecclésiast. tom. III, pag.* 378, *chap. V, dissert. V*) fait voir combien l'église a pris de soin, depuis le concile de Nicée, pour empêcher qu'il ne se glissât quelque erreur dans la célébration de la Pâque ; on s'en étoit occupé dans divers siecles (1545, 1592.)

1577. Dès l'année 228 de notre ere, S. Hippolyte, évêque et martyr, avoit fait un cycle pascal de 112 ans, composé de sept cycles de 16 ans : les auteurs ne nous en avoient donné aucune idée ; mais en 1551 en fouillant dans les champs qui sont aux environs de Rome, sur le chemin de Tivoli, on trouva dans les masures d'une ancienne église de *S. Hippolyte* une statue de ce saint qui étoit représenté assis, ayant à ses côtés ce cycle en lettres grecques depuis l'an 222 jusqu'à l'an 333. Il y a une dissertation de Bianchini sur ce cycle, imprimée à Rome en 1703, in-folio, où il parle aussi d'un cycle lunaire de César, trouvé à Rome sur un marbre antique. Il en est fait mention dans le supplément qui est à la fin du XVIIe volume de l'Encyclopédie. Il y a eu encore d'autres cycles relatifs à la fête de Pâque [b].

(a) C'est à l'imitation de l'ancienne loi (*Exod. c.* 12; *Numer. c.* 28). Cependant Bucherius ne croit pas que tout cela ait été ordonné par le concile, et l'on a beaucoup disputé à ce sujet (Tillemont, *tom. VI, pag.* 817; *Traité de la discipline ecclés.* du P. Quesnel, *tom. II, pag.* 58).

(b) On trouvera des détails considérables sur toutes les périodes qui ont servi à cet usage, dans le livre intitulé : *Dissertationes de cyclis paschalibus qui enneadecaëteride alexandrinâ nituntur, Dionysii scilicet et Bedæ, Ravennatensi Isidori felicis, Cyrilli, Theophili, Aniani, Panodori, Metrodori, Anatolii, Eusebii, synodi nicœnæ, et Athanasii, ut et de enneadecaëteridis alexandrinæ natura et constitutione, initio seu primo anno, ratione embolismi, initio singulorum annorum et hujus initii translatione, ut et de computo lunari*

Grégoire XIII ayant rassemblé à Rome des savans de divers pays, dès l'année 1576, un médecin de Calabre, nommé *Aloisius Lilius* (*Luigi Lilio*), lui présenta un projet de calendrier intitulé, *Compendium novae rationis restituendi calendarii,* qui parut très bien fait, que le pape adressa en 1577 à tous les princes chrétiens, et à toutes les universités célebres, pour le faire examiner, et qui fut enfin adopté dans le bref de la réformation (1545). C'est le calendrier des épactes.

L'ÉPACTE(a) dans son principe est ce qu'il faut ajouter à l'année lunaire (1481), pour former l'année solaire (886); la suite des épactes est la suite des différences qui se trouvent entre ces deux sortes d'années. Il y a des épactes astronomiques, destinées à trouver exactement les syzygies astronomiques moyennes en heures, minutes et secondes (art. 1732). Les épactes du calendrier sont destinées seulement à trouver, suivant l'intention de l'église, et la regle établie en 1582, les jours des nouvelles lunes ecclésiastiques; je dis suivant l'intention et la regle de l'église, parceque les nouvelles lunes ecclésiastiques ne sont pas tout-à-fait d'accord avec les nouvelles lunes moyennes de l'astronomie (1592).

L'épacte qu'on assigne à chaque année est le nombre qui indique l'âge de la Lune, au commencement de cette année, suivant le calendrier ecclésiastique; de là il suit que, si la nouvelle lune arrive le 1 janvier, l'épacte est zéro pour cette année-là : mais, l'année suivante, elle sera de 11 jours, parceque l'année lunaire n'est que de 354^j, et l'année solaire est de 365; ce qui fait que la nouvelle lune étant tombée au 20 décembre, la lune aura 11 jours le premier janvier de l'année suivante; l'année d'après l'épacte est de 22; la troisieme année elle seroit de 33, mais l'on ôte 30 pour former un mois complet; elle se réduit donc à 3. Par ce moyen les épactes suivent l'ordre naturel des multiples de onze en retranchant toujours 30; savoir 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29. Tel est l'ordre naturel et primitif des épactes, quand on suppose les mois lunaires de 29 et de 30 jours, et les années civiles de 365 jours; quand l'année est bissextile, il y a une lunaison que l'on augmente d'un jour.

1578. Pour que l'épacte de l'année serve à indiquer la nouvelle lune, tous les mois on emploie un calendrier perpétuel (1551, 1586), c'est-à-dire le calendrier des lettres dominicales, qui est joint à tous

Alexandrinorum, necnon de computo solari in genere, et Pauli Alexandrini atque Alexandrinorum in specie. Amstelædami, 1736, petit *in*-4°.

(a) Ἐπάγω, *adjicio*, j'ajoute.

les breviaires, et que l'on trouve ci-après (1586): les 30 épactes y sont à côté des jours du mois, en rétrogradant suivant cet ordre, 30, 29, 28, etc. Si la nouvelle lune arrive le 2 janvier, elle sera marquée par l'épacte 29, qui se trouvera également vers le premier de février, le 2 de mars, et vers tous les autres jours de l'année où il devra y avoir nouvelle lune : on dira que l'épacte de cette année-là est 29. L'année d'après l'épacte sera plus forte de 11 jours, parceque les nouvelles lunes arriveront 11 jours plutôt; ainsi ôtant 30 de la somme, on aura 10 pour l'épacte suivante.

Lorsque la lune avancera d'un jour, il faudra augmenter l'épacte d'une unité, pour que la nouvelle lune soit marquée un jour plutôt dans le calendrier perpétuel. Ainsi, au bout de 19 ans, on ajoute 12 au lieu de 11; et cette addition se fait toutes les fois que le nombre d'or passe de 19 à 1, parceque la derniere lunaison de chaque cycle lunaire n'est que de 29 jours au lieu de 30 (1558); quoiqu'elle soit une des sept lunaisons intercalaires, elle est la seule exceptée. Cette addition fait avancer les nouvelles lunes d'un jour.

1579. Cet ordre primitif et régulier est celui qu'on suppose à l'époque du concile de Nicée; mais en s'en éloignant, on observe deux exceptions dans cette regle, ou deux interruptions; on les appelle *équation lunaire,* et *équation solaire*. L'équation lunaire, le saut de la lune ou *proemptose* (a), vient de ce que le cycle lunaire de 19 ans est défectueux d'environ $1^h\frac{1}{2}$ (1563), les 235 lunaisons ne faisant pas tout-à-fait 19 ans; de sorte qu'au bout de 312 ans les nouvelles lunes arrivent un jour plutôt, et l'on est obligé de prendre l'épacte plus forte d'une unité. L'équation solaire ou *métemptose* (b) a lieu à cause du retranchement de trois bissextiles sur l'espace de 400 ans (1547), qui fait que la nouvelle lune arrive plus tard et qu'il faut diminuer l'épacte. De cette double inégalité il résulte que chaque siecle exige un nouvel ordre d'épactes : il y en a trente suites différentes, qui forment ce qu'on appelle *la table étendue des épactes* (planche VIII.) Ces 30 suites tiennent lieu de 30 calendriers qu'il auroit fallu avoir, et elles composent un total aussi parfait que les regles de l'église et de la société civile pouvoient l'exiger.

Les trente lignes d'épactes sont désignées par trente lettres de l'alphabet, qui descendent dans un ordre rétrograde, mais dans lesquelles on a seulement évité d'employer certaines lettres qui pouvoient occasionner de la confusion dans les caracteres : on n'a point mis le grand I pour ne point le confondre avec le petit i, de même

(a) Πρὸ ἐν πτῶσις, chûte en avant.
(b) Μετὰ ἐν πτῶσις, chûte en arriere.

de

de K avec K; on n'a pas mis L, parcequ'on l'eût pu prendre pour 50. On a rejeté la lettre O comme pouvant signifier zéro. Il y a donc 19 lettres en petits caracteres, et 11 lettres capitales.

1580. En tête de la table on trouve les 19 nombres du cycle lunaire, en commençant par 3, qui, au temps du concile de Nicée, se plaçoit vis-à-vis le premier janvier. La premiere ligne horizontale de la table, marquée P, n'est autre chose que la suite des nombres que nous avons indiqués ci-dessus (1577), en commençant par o ou * qui en tient la place (1586), sans autre interruption que celle d'un jour de plus quand le nombre d'or devient 1 (1578). La seconde ligne, marquée N, est la suite des nombres qui ont une unité de moins que la précédente, c'est-à-dire 29, 10, 21, etc. La troisieme ligne M commence par 28, et ainsi des autres jusqu'à la derniere ligne qui commence par 1, 12, etc.

Le progrès des nombres de chaque ligne est toujours par onze, comme celui de la premiere ligne; il y a dans chacune 19 chiffres qui répondent également aux 19 nombres d'or, qui croissent continuellement de XI, en retranchant 30 à chaque fois qu'ils s'y trouvent, excepté sous le nombre d'or 1, qui est l'avant-dernier de tous; car alors l'épacte augmente de 12 (1578).

1581. Pour faire distinguer laquelle des 30 lignes doit s'employer à chaque siecle, lorsqu'il se fait une interruption, en vertu de l'équation solaire et de l'équation lunaire (1579), nous allons expliquer comment on a formé *la table de l'équation des épactes* qui se trouvera ci-après (1583).

La premiere ligne marquée P dans la PLANCHE VIII fut attribuée au sixieme siecle, dans la réformation du calendrier; on supposa que les nombres d'or indiquoient exactement les nouvelles lunes pour ce siecle-là : l'on prit pour époque du calendrier l'année 550, temps postérieur à celui du concile, parcequ'on voulut que les nouvelles lunes du calendrier fussent en retard sur les nouvelles lunes astronomiques moyennes, de peur que la fête de Pâques ne vînt à être célébrée avant le XIV de la lune pascale, contre l'intention de l'église (1592); or les nouvelles lunes moyennes arrivent quelquefois un peu avant la nouvelle lune vraie, sur laquelle les Juifs se régloient; l'église a donc voulu que les nouvelles lunes moyennes du calendrier ne pussent presque jamais devancer les vraies, mais qu'elles les suivissent presque toujours.

On a pris pour racine l'année 550 (a); alors les nombres d'or indi-

(a) C'est pourtant à l'année 500 qu'on a attribué la premiere ligne des épactes P, mais on verra la raison de ces 50 ans d'anticipation (1582).

quoient les nouvelles lunes environ 16 heures plus tard qu'au temps du concile de Nicée, à cause du retardement d'un jour en 312 ans (1559); et il n'y avoit plus de danger qu'elles pussent être indiquées plutôt que les nouvelles lunes vraies. L'on attribue à l'année 500 et au sixieme siecle entier la premiere ligne de la table étendue des épactes (PLANCHE VIII). Cette ligne est marquée P dans notre table, comme dans Clavius (*p.* 110).

Au bout de 300 ans, c'est-à-dire, à l'an 800, il y eut une équation lunaire, et la Lune anticipa d'un jour dans le calendrier, les nouvelles lunes arrivant un jour plutôt; c'est donc le nombre précédent qui indiquoit les nouvelles lunes, et il faut prendre la derniere ligne a, dont les épactes sont plus fortes d'un jour. Après un autre intervalle de 300 ans, c'est-à-dire, l'an 1100, il y eut encore une équation lunaire, la Lune anticipa encore d'un jour: il faut donc pour le douzieme siecle remonter d'une ligne, et l'on aura la ligne b qui commence par II, XIII, etc. De même, en 1400, on a la ligne marquée c.

En 1582 l'on retrancha dix jours de l'année (1548), les nouvelles lunes arriverent donc dix jours plus tard; ainsi il faut descendre de dix lignes dans la table générale, et venir à la ligne D pour 1583; je dis que cela s'appelle descendre, parceque de la ligne c à la ligne a, on descend d'abord de deux lignes; et si l'on diminue encore d'un l'épacte de cette ligne, on trouve les nombres de la premiere ligne P, qui est censée descendre encore davantage; car la table générale des épactes est comme un cercle dans lequel on recommence dans le même ordre et sans interruption, lorsqu'on l'a parcouru tout entier.

En 1600, il n'y a eu ni équation lunaire, ni équation solaire, puisque la premiere avoit été employée en 1400, et que la seconde ne devoit arriver qu'en 1700, 1800 et 1900 (1547); ainsi l'on a conservé la même ligne D, qui commence par XXIII.

1582. En 1700, il y a eu une équation solaire, parcequ'on a omis une bissextile (1547), et que l'année a été plus courte d'un jour: les nouvelles lunes ont dû arriver par cette raison un jour plus tard, et, pour les indiquer un jour plus tard, il faut avoir l'épacte plus petite d'une unité (1578): ainsi, en 1700, il a fallu descendre d'une ligne dans la table, et prendre la suite des épactes qui répond à la lettre C, ou la ligne qui commence par XXII. Cela doit arriver ainsi toutes les fois que l'on omet un jour, ou qu'on passe une bissextile; ce que nous appellons équation solaire. Il auroit dû y avoir une

équation lunaire en 1700 : nous allons expliquer pourquoi elle fut remise à 1800.

L'équation lunaire ayant été employée pour l'année 1400, en 1700 il y avoit 300 années d'écoulées, et il auroit fallu encore une équation lunaire (1563); cependant comme la Lune anticipe d'un jour sur le cycle lunaire, non pas en 300 ans, mais seulement en 312 ans ½, ces 12 ans ½ avoient été omis quatre fois depuis l'an 500; savoir en 800, 1100, 1400, 1700; ainsi il y avoit 50 ans dont on avoit anticipé l'équation lunaire, en la plaçant 4 fois 12 ans ½ trop tôt. D'ailleurs, en partant de l'année 550, c'étoit en 850, 1150, 1450, 1750, qu'on devoit employer l'équation lunaire, et on l'avoit mise en 800; ainsi, ajoutant encore à 1750 les 50 ans dont on avoit anticipé, on trouve qu'en 1800 il faudra employer l'équation lunaire. Toutes les fois que les 12 ans et demi, qu'on néglige tous les 300 ans, se trouvent avoir fait 100 ans, c'est-à-dire, au bout de 8 fois 300, ou de 2400 ans, il faut renvoyer l'équation lunaire à l'année séculaire qui suivra, comme nous venons de le dire, lorsque, parvenus à 1700, nous avons rejeté l'équation lunaire à 1800; il arrivera donc toujours que l'équation lunaire sera différée au bout de 2400 ans, à compter de 1800, c'est-à-dire remise aux années 4300, 6800, 9300, 11800, et ainsi de suite, en allant toujours par 2500 : alors, au lieu d'être employée à la fin des 300 ans, elle ne le sera qu'au bout de 400 ans pour cette fois-là; par ce moyen la Lune ne remonte dans le calendrier que de 8 jours en 2500 ans (à raison de l'équation lunaire seule); au lieu qu'elle remonteroit de 8 jours en 2400 ans. Nous avons marqué ces années de retard d'un double caractere ☾ ☾ dans la table de la page 244.

L'équation lunaire employée en 1800 feroit une augmentation dans l'épacte (1578); mais, en 1800, il y aura un jour intercalaire omis, de même qu'en 1700, et par conséquent on devroit de même retrancher un de l'ordre des épactes, et descendre d'une ligne dans la table générale : ces deux effets se détruiront, les nouvelles lunes ne monteront ni ne descendront; elles demeureront aux mêmes jours; la même ligne C dans la table générale servira pour tout le XIX[e] siecle qui commence en 1800, comme elle avoit servi pour le siecle précédent.

En 1900, on omettra encore un jour intercalaire; les nouvelles lunes descendront d'un jour, et il faudra descendre à la ligne B de la table. L'année 2000 ne changera point de ligne, parcequ'il n'y a cette année-là ni intercalaire omise, ni équation lunaire. En 2100 l'on omet une intercalaire, et l'on emploie l'équation lunaire, parce-

qu'il y a 300 ans d'écoulés depuis 1800, où l'on a fait la derniere équation ; ainsi le XXII[e] siecle, qui commence à 2100, conservera la même lettre B que le siecle précédent, de même qu'on l'a vu pour l'année 1800.

En 2200, on omettra une intercalaire, et il n'y aura point d'équation lunaire; ainsi on descendra à la ligne A de la table générale. Par la même raison en 2300 on descendra à la ligne marquée u.

En 2400, on aura eu 300 ans depuis la derniere équation lunaire de 2100 : il y aura donc une équation lunaire ; mais il n'y aura point d'équation solaire : ainsi les nouvelles lunes monteront d'un jour, et l'on reviendra à la ligne A de la table générale.

2500, Equation solaire, on descendra à la ligne u.

2600, Equation solaire, on descendra à la ligne t.

2700, Equat. sol. et lun. on conservera la ligne t.

2800, Aucune équation, on conservera la ligne t.

1583. Ainsi, dans les principes de Lilius, il est aisé de continuer à l'infini la table de l'équation des épactes, si l'on a égard à l'intercalaire qu'on doit retrancher trois fois en 400 ans, et à l'équation lunaire qui doit arriver tous les 300 ans, d'abord sept fois de suite, et après cela, au bout de 400 ans seulement (1582). C'est ainsi qu'on a formé la table de l'équation des épactes, dont voici les 30 premiers siecles.

TABLE de l'équation des épactes, où l'on voit quelle ligne d'épactes on doit prendre pour chaque siecle, dans la table étendue des épactes, PLANCHE VIII.

Années.	Ligne d'Ép.	Années.	Ligne d'Ép.	Années.	Ligne d'Ép.
1582	D	☉ 2500	u	☉ 3500	p
Biss. — 1600	D	☉ 2600	t	Biss. ☾ 3600	q
☉ 1700	C	☾ ☉ 2700	t	☉ 3700	p
☾☾ ☉ 1800	C	Biss. 2800	t	☉ 3800	n
☉ 1900	B	☉ 2900	s	☾ ☉ 3900	n
Biss. 2000	B	☾ ☉ 3000	s	Biss. 4000	n
☾ ☉ 2100	B	☉ 3100	r	☉ 4100	m
☉ 2200	A	Biss. 3200	r	☉ 4200	l
☉ 2300	u	☾ ☉ 3300	r	☾☾ ☉ 4300	l
Biss. ☾ 2400	A	☉ 3400	q	Biss. 4400	l

Cette table a été continuée par Lilius, et par Clavius, jusqu'à l'an 301700, et même quelques siecles au-delà, pour faire voir qu'alors elle recommencera dans le même ordre qu'en 1700, C, C, B, B, etc. en sorte qu'ils n'avoient besoin que de 3000 siecles pour exprimer tous les changemens possibles des épactes à perpétuité, en supposant que les moyens mouvemens du Soleil et de la Lune fussent, dans les siecles à venir, tels que les tables pruteniques les supposoient, et que les variations du calendrier revinssent toutes au bout de trois cents mille ans.

1584. Cependant Clavius observe (*page* 150) qu'après l'an 8100 il doit y avoir une erreur dans la méthode de Lilius pour trouver l'équation; il pense qu'à l'an 8200 il faudroit descendre de la ligne F à la ligne D, c'est-à-dire, de deux lignes, et non pas d'une seule qu'exigeroient les regles précédentes. Il donne une méthode pour construire d'une autre maniere la table des épactes après l'an 8100; mais je ne la rapporterai pas ici, puisqu'on ne l'a point suivie dans le calendrier grégorien : d'ailleurs il sera aisé, en conservant même toute la disposition du calendrier, de monter ou de descendre d'une ligne dans la table générale, si, dans la suite des temps, l'observation prouve que les nouvelles lunes ont changé dans le calendrier.

Si l'on vouloit pousser la précision encore plus loin, il faudroit ajouter une nouvelle équation lunaire au bout de 481436 ans, parcequ'il y avoit, outre les 312 ans $\frac{1}{2}$, 23^{j} et 17^{h} (1563) qui font alors 100 ans; mais comme cet espace de temps alloit au-delà du cycle de trois cents mille ans, qu'on a regardé comme le grand cycle qui renouvelle le calendrier, on a négligé cette derniere équation lunaire : il n'y a d'ailleurs aucun calcul astronomique qui pût se trouver encore exact après une si longue période. Nous avons remarqué ci-dessus que l'erreur est encore moindre que ne trouvoit Clavius (1563).

1585. La raison du grand cycle de 300 mille ans se reconnoît par les regles précédentes. Après dix mille ans ou cent siecles, on trouve la même variété dans les lettres de la table, parceque 25 siecles produisent 8 équations lunaires, et 4 siecles ramenent les 3 bissextiles omises dans le calendrier; ainsi cent siecles ramenent le même ordre d'équations solaires et lunaires, mais non pas les mêmes lettres ou les mêmes lignes de la table. Par exemple, après 1600 qui a la lettre D, les deux années séculaires suivantes, 1700 et 1800, ont la même lettre C; les trois années suivantes, 1900, 2000 et 2100, ont la même lettre B; l'année 2200 a la lettre A, l'année 2300 la lettre u (1583), etc.

CALENDRIER PERPÉTUEL DES ÉPACTES,

SUIVANT GRÉGOIRE XIII,

Pour servir à trouver toutes les nouvelles lunes, les jours de la semaine, et les fêtes mobiles pour une année quelconque. Voyez *art.* 1551, 1578.

	JANVIER.		FÉVRIER.		MARS.		AVRIL.		MAI.		JUIN.	
Jours du mois.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.
1	*	A	XXIX	D	*	D	XXIX	G	XXVIII	B	XXVII	E
2	XXIX	B	XXVIII	E	XXIX	E	XXVIII	A	XXVII	C	25. XXVI	F
3	XXVIII	C	XXVII	F	XXVIII	F	XXVII	B	XXVI	D	XXV.XXIV	G
4	XXVII	D	25. XXVI	G	XXVII	G	25. XXVI	C	25.XXV	E	XXIII	A
5	XXVI	E	XXV. XXIV	A	XXVI	A	XXV.XXIV	D	XXIV	F	XXII	B
6	25.XXV	F	XXIII	B	25.XXV	B	XXIII	E	XXIII	G	XXI	C
7	XXIV	G	XXII	C	XXIV	C	XXII	F	XXII	A	XX	D
8	XXIII	A	XXI	D	XXIII	D	XXI	G	XXI	B	XIX	E
9	XXII	B	XX	E	XXII	E	XX	A	XX	C	XVIII	F
10	XXI	C	XIX	F	XXI	F	XIX	B	XIX	D	XVII	G
11	XX	D	XVIII	G	XX	G	XVIII	C	XVIII	E	XVI	A
12	XIX	E	XVII	A	XIX	A	XVII	D	XVII	F	XV	B
13	XVIII	F	XVI	B	XVIII	B	XVI	E	XVI	G	XIV	C
14	XVII	G	XV	C	XVII	C	XV	F	XV	A	XIII	D
15	XVI	A	XIV	D	XVI	D	XIV	G	XIV	B	XII	E
16	XV	B	XIII	E	XV	E	XIII	A	XIII	C	XI	F
17	XIV	C	XII	F	XIV	F	XII	B	XII	D	X	G
18	XIII	D	XI	G	XIII	G	XI	C	XI	E	IX	A
19	XII	E	X	A	XII	A	X	D	X	F	VIII	B
20	XI	F	IX	B	XI	B	IX	E	IX	G	VII	C
21	X	G	VIII	C	X	C	VIII	F	VIII	A	VI	D
22	IX	A	VII	D	IX	D	VII	G	VII	B	V	E
23	VIII	B	VI	E	VIII	E	VI	A	VI	C	IV	F
24	VII	C	V	F	VII	F	V	B	V	D	III	G
25	VI	D	IV	G	VI	G	IV	C	IV	E	II	A
26	V	E	III	A	V	A	III	D	III	F	I	B
27	IV	F	II	B	IV	B	II	E	II	G	*	C
28	III	G	I	C	III	C	I	F	I	A	XXIX	D
29	II	A	*		II	D	*	G	*	B	XXVIII	E
30	I	B			I	E	XXIX	A	XXIX	C	XXVII	F
31	*	C			*	F			XXVIII	D		

CALENDRIER PERPÉTUEL DES ÉPACTES,

SUIVANT GRÉGOIRE XIII,

Pour servir à trouver toutes les nouvelles lunes, les jours de la semaine, et les fêtes mobiles pour une année quelconque.

	JUILLET.		AOUT.		SEPTEMB.		OCTOB.		NOVEMB.		DÉCEM.	
Jours du mois.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.	Epactes.	Lettres domin.
1	XXVI	G	XXV. XXIV	C	XXIII	F	XXII	A	XXI	D	XX	F
2	25.XXV	A	XXIII	D	XXII	G	XXI	B	XX	E	XIX	G
3	XXIV	B	XXII	E	XXI	A	XX	C	XIX	F	XVIII	A
4	XXIII	C	XXI	F	XX	B	XIX	D	XVIII	G	XVII	B
5	XXII	D	XX	G	XIX	C	XVIII	E	XVII	A	XVI	C
6	XXI	E	XIX	A	XVIII	D	XVII	F	XVI	B	XV	D
7	XX	F	XVIII	B	XVII	E	XVI	G	XV	C	XIV	E
8	XIX	G	XVII	C	XVI	F	XV	A	XIV	D	XIII	F
9	XVIII	A	XVI	D	XV	G	XIV	B	XIII	E	XII	G
10	XVII	B	XV	E	XIV	A	XIII	C	XII	F	XI	A
11	XVI	C	XIV	F	XIII	B	XII	D	XI	G	X	B
12	XV	D	XIII	G	XII	C	XI	E	X	A	IX	C
13	XIV	E	XII	A	XI	D	X	F	IX	B	VIII	D
14	XIII	F	XI	B	X	E	IX	G	VIII	C	VII	E
15	XII	G	X	C	IX	F	VIII	A	VII	D	VI	F
16	XI	A	IX	D	VIII	G	VII	B	VI	E	V	G
17	X	B	VIII	E	VII	A	VI	C	V	F	IV	A
18	IX	C	VII	F	VI	B	V	D	IV	G	III	B
19	VIII	D	VI	G	V	C	IV	E	III	A	II	C
20	VII	E	V	A	IV	D	III	F	II	B	I	D
21	VI	F	IV	B	III	E	II	G	I	C	*	E
22	V	G	III	C	II	F	I	A	*	D	XXIX	F
23	IV	A	II	D	I	G	*	B	XXIX	E	XXVIII	G
24	III	B	I	E	*	A	XXIX	C	XXVIII	F	XXVII	A
25	II	C	*	F	XXIX	B	XXVIII	D	XXVII	G	XXVI	B
26	I	D	XXIX	G	XXVIII	C	XXVII	E	25. XXVI	A	25.XXV	C
27	*	E	XXVIII	A	XXVII	D	XXVI	F	XXV.XXIV	B	XXIV	D
28	XXIX	F	XXVII	B	25. XXVI	E	25.XXV	G	XXIII	C	XXIII	E
29	XXVIII	G	XXVI	C	XXV. XXIV	F	XXIV	A	XXII	D	XXII	F
30	XXVII	A	XXV	D	XXIII	G	XXIII	B	XXI	E	XXI	G
31	25XXVI	B	XXIV	E			XXII	C			19. XX	A

1586

RE…

…le calendrier Grégorien, …

…marquée C est celle qui a lieu depuis 1700 jusqu'à 1900

	3
P	*
N	XXIX
M	XXVIII
H	XXVII
G	XXVI
F	XXV
E	XXIV
D	XXIII
C	XXII 1786
B	XXI
A	XX
u	XIX
t	XVIII
s	XVII
r	XVI
q	XV
p	XIV
n	XIII
m	XII
l	XI
k	X
i	IX
h	VIII
g	VII
f	VI
e	V
d	IV
c	III
b	II
a	I

16	17	18	19	1	2
XXIII	IV	XV	XXVI	VIII	XIX
XXII	III	XIV	25	VII	XVIII
XXI	II	XIII	XXIV	VI	XVII
XX	I	XII	XXIII	V	XVI
XIX	*	XI	XXII	IV	XV
XVIII	XXIX	X	XXI	III	XIV
XVII	XXVIII	IX	XX	II	XIII
XVI	XXVII	VIII	XIX	I	XII
XV	XXVI	VII	XVIII	*	XI
XIV	25	VI	XVII	XXIX	X
XIII	XXIV	V	XVI	XXVIII	IX
XII	XXIII	IV	XV	XXVII	VIII
XI	XXII	III	XIV	XXVI	VII
X	XXI	II	XIII	XXV	VI
IX	XX	I	XII	XXIV	V
VIII	XIX	*	XI	XXIII	IV
VII	XVIII	XXIX	X	XXII	III
VI	XVII	XXVIII	IX	XXI	II
V	XVI	XXVII	VIII	XX	I
IV	XV	XXVI	VII	XIX	*
III	XIV	25	VI	XVIII	XXIX
II	XIII	XXIV	V	XVII	XXVIII
I	XII	XXIII	IV	XVI	XXVII
*	XI	XXII	III	XV	XXVI
XXIX	X	XXI	II	XIV	XXV
XXVIII	IX	XX	I	XIII	XXIV
XXVII	VIII	XIX	*	XII	XXIII
XXVI	VII	XVIII	XXIX	XI	XXII
25	VI	XVII	XXVIII	X	XXI
XXIV	V	XVI	XXVII	IX	XX

de la Gardette Sc.

Il nous reste sur-tout à parler de quelques artifices qu'on apperçoit dans ce *calendrier perpétuel* des épactes et des lettres dominicales. Nous avons fait observer (1578) qu'on y voit, à côté des jours du mois, les épactes 30, 29, 28, etc. et les 7 lettres A, B, C, D, E, F, G, en commençant par le premier jour de janvier, et nous en avons expliqué l'usage pour trouver les jours du mois (1551) : mais il y a trois observations à faire sur des exceptions qui se trouvent dans ce calendrier pour l'ordre des épactes.

Au lieu du nombre 30, on met un astérisque * qui tient lieu de 30 et de zéro. En effet, dans les années où il y a nouvelle lune le 2 décembre, l'âge de la lune, quand l'année finit, est de 30 jours; ainsi l'épacte devroit être 30 : mais comme la lune recommence le premier janvier suivant, l'âge de la lune est 1, le premier de janvier; ainsi l'épacte est zéro, puisqu'il ne faut rien ajouter aux jours de janvier pour avoir l'âge de la lune. L'épacte est donc 30 par rapport à la lune de décembre, et 0 par rapport à celle de janvier. Ainsi l'on met un signe ambigu qui tient lieu de l'une et de l'autre, et qui s'applique à ces deux circonstances.

Dans le calendrier perpétuel on a pratiqué six interruptions, où l'on a mis ensemble les épactes XXIV et XXV; sans cela les 12 suites d'épactes qui sont de 30 chacune, formeroient 360 jours, au lieu de 354 qu'elles doivent former, pour s'accorder avec l'année lunaire qui a 11 jours de moins que l'année solaire (1481); cette suppression de 6 jours a lieu le 5 février, le 5 avril, le 3 juin, le 1 août, le 29 septembre et le 27 novembre. Ces six jours qui, par la disposition précédente, devroient avoir XXV d'épacte, ont tout à la fois XXV et XXIV; par-là on gagne un nombre à chaque fois, et il se trouve qu'à la fin de décembre il reste 11 jours.

1587. Par ce moyen on a des lunaisons de 29 jours, quoiqu'il y ait 30 épactes : les 12 lunaisons de chaque année sont alternativement de 30 et de 29 jours (1558); aussi l'on met d'abord les 30 épactes dans le mois de janvier, ensuite 29 seulement en en réunissant deux au même jour, puis 30, et ainsi de suite; l'épacte XXIV dans février, et toutes celles qui la suivent, se trouvent remontées d'un rang au-dessus de leur place naturelle vers le commencement du mois, à cause des deux épactes XXV et XXIV qui sont réunies au 5 de février. Ainsi les lunaisons qui commencent par les 30 épactes qui précedent les deux épactes accumulées au 6 de février, c'est-à-dire, par les épactes XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, *, I, II, etc. jusqu'à l'épacte XXIV inclusivement, contiennent seulement 29 jours. Il faut dire la même chose des lunaisons qui répondent aux 30

épactes semblables qui précedent dans cinq autres endroits du calendrier la réunion de xxiv et xxv (Clavius, *pag.* 101). Cette épacte, relevée d'un jour, fait que la seconde lune de l'année a 29 jours, et répond mieux au moyen mouvement de la Lune que l'épacte xxv qui est un peu en retard (*p.* 102). On double les épactes deux jours de suite, parceque, si xxiv et xxv se trouvent dans la même ligne d'épactes, xxv et xxvi n'y sont pas (1589). (a)

1588. Dans les mois qui ont deux épactes au même jour, xxv et xxiv, on pourroit craindre qu'il n'y eût deux nouvelles lunes indiquées au même jour, dans l'espace de 19 ans, savoir l'une quand l'épacte de l'année seroit xxv, et l'autre quand elle seroit xxiv; or, il ne peut pas y avoir deux nouvelles lunes, dans les 19 ans, qui tombent au même jour du mois, puisqu'elles n'y reviennent qu'après les 19 ans révolus (1558). Pour obvier à cet inconvénient, dans la disposition des épactes de la *table étendue* (PLANCHE VIII), on a mis 25 en chiffres arabes au lieu de xxv en chiffres romains, dans toutes les lignes où les deux épactes vingt-quatre et vingt-cinq se trouvent ensemble, et peuvent revenir dans l'espace de 19 ans : ce nombre 25 est mis dans le calendrier à côté de xxvi, parceque dans ces mêmes lignes d'épactes les nombres 25 et xxvi ne peuvent pas se trouver ensemble dans l'espace des 19 ans, dès-lors que vingt-quatre et vingt-cinq s'y trouvent.

Dans les mois qui ont 25 et xxvi d'épacte au même rang, ou au même jour, il ne peut pas arriver non plus que la nouvelle lune soit indiquée deux fois au même jour en 19 ans, parceque 25 en petit caractere ne se trouve point dans les huit suites d'épactes qui contiennent vingt-cinq et vingt-six; on n'a mis dans celles-ci que le nombre romain xxv, qui, dans le calendrier, est à côté de xxiv; mais xxv et xxiv ne sont point ensemble dans ces huit lignes : ainsi l'on a toujours eu soin de faire en sorte que les deux figures qui sont ensemble dans le calendrier à un même jour, ne fussent pas dans une même suite d'épactes. Il est vrai que les mêmes nombres y sont; mais l'un est en petites capitales, l'autre en chiffres ordinaires : et cette différence de forme les distingue assez. Quelquefois on met le 25 en rouge, comme dans les bréviaires imprimés en deux couleurs.

1589. Lorsque, dans un cycle de 19 ans, l'épacte xxv concourt avec un nombre d'or plus grand qu'onze, c'est-à-dire avec les nombres d'or 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, il y a toujours dans ce même

(a) Le P. Meliton substitue les épactes des nouvelles lunes, ainsi que Rivard dans son *Traité du calendrier*, 1744 (*pag.* 64). Les épactes y sont doublées au 17 février, etc.

cycle une épacte xxiv; mais si pour lors on prend l'épacte 25 qui est d'un caractere ou d'une couleur différente, qui dans six endroits du calendrier est placée à côté de l'épacte xxvi, il ne pourra jamais y avoir deux nouvelles lunes au même jour, parceque cette épacte 25, marquée d'un autre caractere ou d'une autre couleur, répond par-tout à un jour différent de celui qui a l'épacte xxiv.

Quand, dans un cycle de 19 ans, l'épacte xxv se rencontre avec un nombre d'or plus petit que 12, ou avec les nombres d'or 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11, il ne peut pas arriver que dans le même cycle l'épacte xxiv se trouve employée avec l'épacte xxv; pour lors on prendra l'épacte xxv, qui dans six endroits est marquée au même jour que l'épacte xxiv; et puisque l'épacte xxiv n'aura pas lieu dans ce cycle-là, on ne risquera point de trouver dans le même cycle deux nouvelles lunes au même jour.

De même, quoique l'épacte 25, qui est différente en caractere ou en couleur, se trouve dans six jours de l'année à côté de l'épacte xxvi, on ne craindra pas cependant de trouver deux nouvelles lunes au même jour dans les 19 ans, parceque quand l'épacte xxv se trouve avec un nombre d'or plus grand que 11 (et ce sont les seuls cas où l'on se serve du caractere 25), l'épacte xxvi n'a jamais lieu dans le même cycle, pour indiquer les nouvelles lunes. On pourroit le démontrer rigoureusement; mais il suffit d'examiner la table étendue des épactes, PLANCHE VIII; car dans les 8 lignes marquées N, E, B, r, n, K, e, b, qui chacune répondent à un cycle lunaire entier de 19 ans (1579), on voit l'épacte 25 distinguée par les chiffres arabes sous les 8 nombres d'or, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19; l'épacte xxiv sous les onze autres, et jamais l'épacte xxvi. Mais dans les 22 autres lignes horizontales de la table où l'épacte xxv se trouve sous les 11 petits nombres d'or, depuis 1 jusqu'à 11, on trouve quelquefois l'épacte xxvi, mais on n'y trouve pas xxiv. Si donc on prend tantôt l'épacte xxv, qui est dans le calendrier à côté de xxiv, et tantôt l'épacte 25 (qui est d'un autre caractere, et placée dans le calendrier à côté de xxvi), ayant égard aux nombres d'or, petits ou grands, avec lesquels elle concourt, il n'arrivera jamais que dans le même cycle de 19 ans il y ait deux nouvelles lunes au même quantieme du mois; quoique, dans les six endroits ci-dessus marqués, il y ait au même jour xxv avec xxiv, et xxvi avec l'épacte 25 du caractere différent.

Ainsi l'épacte xxiv ne peut pas avoir lieu quand l'épacte xxv concourt avec un des onze premiers nombres d'or, mais seulement quand elle concourt avec un nombre d'or plus grand que 11; et l'épacte

XXVI n'a jamais lieu lorsque l'épacte 25, de caractere différent, concourt avec un nombre d'or plus grand que 11.

1590. On a choisi les epactes XXV et XXIV pour les accumuler ensemble, quoiqu'on eût pu choisir deux autres épactes quelconques; mais il y avoit deux raisons pour choisir celles-là : c'est à-peu-près vers ces mêmes jours que l'on employoit l'équation de la lune dans l'ancien calendrier des nombres d'or, du concile de Nicée, et l'on a cherché à s'en rapprocher le plus qu'il étoit possible dans la disposition du nouveau calendrier (*Clavius, page* 103). D'ailleurs, en choisissant ces nombres XXV et XXIV pour les mettre ensemble, presque toutes les lunaisons pascales se trouvent de 29 jours, comme le vouloient les Peres du concile de Nicée, et elles commencent toujours entre le 8 de mars et le 5 avril. Il n'y a dans le nouveau calendrier que deux exceptions à la premiere regle ; c'est lorsqu'on a pour épacte 25 ou XXIV, ce qui arrive bien rarement; il n'y a que ces deux lunes pascales qui soient de 30 jours : on voit dans le calendrier que 25 se trouve au 4 d'avril et de mai, et XXIV au 5 des mêmes mois. Ces deux lunaisons ont donc le même nombre de jours que le mois d'avril, c'est-à-dire 30. Avec toute autre épacte on rencontreroit, dans le cours de la lunaison, des épactes accumulées qui feroient perdre un jour.

Lorsqu'au temps du concile de Nicée on assigna 29 jours aux nouvelles lunes pascales, depuis le 8 mars jusqu'au 5 avril, il étoit facile d'y arranger 19 nombres d'or, de façon que tous donnassent des lunaisons de 29 jours; mais comme il y a 30 épactes, on ne sauroit les arranger toutes dans 29 jours, à moins qu'on n'en mette deux à la fois au même jour, comme cela arrive au 5 avril. Cela n'empêchera pas que la lunaison de l'épacte XXIV n'ait 30 jours, et par conséquent aussi celle de l'épacte 25 placée au-dessus ; mais plus on s'écarteroit du 5 avril, en remontant vers le commencement de mars, plus on auroit de lunaisons pascales de 30 jours. Par exemple, si l'équation de la lune, au lieu de se faire au 5 avril, se faisoit à la fin de janvier et de mars, comme *Lilius* l'avoit pratiqué dans le *Compendium* (1577), il y auroit sept lunaisons pascales de 30 jours au lieu de 2 ; en sorte qu'on seroit beaucoup plus éloigné de cette partie de l'ancien usage de l'église, qu'on a voulu respecter autant qu'il étoit possible en choisissant l'épacte XXIV qui est au 5 avril. L'on trouve même dans le calendrier grégorien les nouvelles lunes, sur-tout celles de Pâque, rapportées pour le temps du concile de Nicée aux mêmes jours où elles ont été supposées dans ce temps-là, d'après les nombres d'or de l'ancien calendrier. C'est ce qui résulte de plusieurs

longs chapitres qu'on pourra voir dans le grand traité de *Clavius*, dont il n'est possible de donner ici que les principes et les principaux résultats.

1591. Le troisieme artifice employé dans la disposition des épactes du calendrier perpétuel, consiste à avoir mis à la fin de décembre, à côté de l'épacte xx, une épacte extraordinaire 19, qui est aussi différente ou par le caractere, ou par la couleur; elle sert uniquement à marquer la nouvelle lune le dernier de décembre, lorsque l'épacte xix concourt avec le nombre d'or 19, ce qui n'arrivera plus jusqu'après l'an 8200; et lorsque des trente cycles de la table, celui qui a la lettre D sera en usage, comme il l'a été depuis la correction grégorienne jusqu'à l'année 1700 exclusivement: c'est dans cette ligne D seulement que l'épacte xix se trouve sous le nombre d'or 19. L'épacte 19, placée au 31 de décembre, doit alors indiquer une nouvelle lune, comme cela est arrivé en 1595, 1614, 1633, 1652, 1671, 1690. En effet, dès que le nombre d'or est 19, on doit ajouter 12 à l'épacte de l'année pour former celle de l'année suivante (1578), au lieu qu'on n'ajoutoit que 11 dans les autres cas; ainsi à l'épacte xix, lorsqu'elle a lieu avec le nombre d'or 19, il faut ajouter 12, et l'on a 1 d'épacte pour l'année suivante. Mais l'usage de l'épacte 1 ne se trouve dans le calendrier qu'au 30 de janvier: donc si l'épacte 19 n'étoit pas placée dans le calendrier au 31 de décembre, pour y indiquer une nouvelle lune, la lunaison de décembre ne contenant alors que 29 jours (1558), il n'y auroit point de lunaison indiquée dans le calendrier depuis le 2 de décembre jusqu'au 29 de janvier; car dans le mois de décembre il n'y a pas d'autre épacte xix que celle du 2 de décembre, et dans le mois de janvier il n'y a pas d'épacte 1 avant le 30. Cependant il y a, dans le cas dont il s'agit, une lune de 29 jours qui commence le 2 décembre, et une autre qui commence le 31 de décembre; le calcul prouve même qu'il y a en effet une nouvelle lune moyenne le 30 ou le 31 dans les années ci-dessus où le nombre d'or 19 concourt avec l'épacte xix (*Clavius*, *pag.* 104).

Mais l'exception dont il s'agit, ou l'addition de l'épacte 19 extraordinairement cumulée avec l'épacte xx, au 31 de décembre, ne fait dans le calendrier aucune confusion, parcequ'elle est à côté de l'épacte xx qui ne se trouve point dans la ligne D; il ne peut donc pas y avoir double emploi, ni deux nouvelles lunes indiquées au même jour dans l'espace des 19 ans, quoiqu'il y ait deux épactes au même jour.

1592. Les épactes ne peuvent indiquer que les nouvelles lunes moyennes, c'est-à-dire les nouvelles lunes qui auroient lieu, si la

Lune et le Soleil alloient toujours d'un mouvement uniforme, et que leur longitude moyenne fût toujours égale à leur longitude vraie; ce seroit assez pour l'usage du calendrier civil, car l'on est toujours sûr de ne pas se tromper d'un jour, même en se restreignant aux moyens mouvemens. Mais non seulement les nouvelles lunes désignées dans le calendrier par les épactes, ne sont point les nouvelles lunes astronomiques vraies qu'on observe, et qu'on trouve dans nos éphémérides; elles ne sont pas même exactement d'accord avec les nouvelles lunes moyennes; il y a souvent des retardemens qui deviennent sensibles, et on l'a fait exprès. Lors de la correction grégorienne, on voulut remettre les nouvelles lunes au même lieu où elles étoient au temps du concile de Nicée; il y avoit alors quatre jours de différence entre les nouvelles lunes moyennes et celles du cycle : dans l'exécution on n'a corrigé que 3 jours au lieu de quatre; de là vient que la pleine lune astronomique vient souvent un jour avant la pleine lune pascale, et que le calendrier n'a point à cet égard la justesse qu'on avoit eu intention de lui donner; de là vient aussi la contradiction apparente que l'on trouvera quelquefois entre les calculs rigoureux de l'astronomie, et les calculs beaucoup moins exacts du comput ecclésiastique. Par exemple, en 1783 l'épacte XXVI répondoit au 5 de mars; cependant la nouvelle lune vraie étoit arrivée le 3 à sept heures du matin : mais une partie de ces différences se corrige à la fin des 19 ans et à la fin des 300 ans où l'on place une équation lunaire.

L'erreur d'un jour que nous venons de remarquer a fait tomber la fête de Pâque, en 1704, au 23 mars, au lieu qu'elle auroit dû être le 20 avril; parceque, dans cette année, la pleine lune devoit être marquée au 20 mars, et qu'elle ne le fut qu'au 21 : or le 20 mars n'est point du mois pascal, mais le 21 en est (*Hist. de l'acad.* 1701, *pag.* 110; *J. Bernoulli Opera, tom. IV;* et l'*Encycl.* au mot *Epacte*, où l'on cite plusieurs autres exemples). La raison de ce défaut est que l'objet des réformateurs étoit de demeurer plutôt au-dessous qu'au-dessus des véritables nouvelles lunes, pour empêcher que les épactes n'indiquassent la nouvelle lune plutôt qu'elle n'arrive réellement, et que la fête de Pâque ne fût célébrée le XIV de la lune, ou même plutôt, c'est-à-dire en même temps que chez les Juifs ou chez les hérétiques quarto-décimans (Fleuri, *Hist. eccl. année* 196, *tom. I*, *pag.* 375, 518, *in*-12). Pour cet effet, on a eu plus d'égard à la pleine lune qu'à la nouvelle lune : on n'a pas craint que la fête de Pâque fût célébrée plus tard que le XXI de la lune; mais on redoutoit la célébration qui auroit pu tomber le XIV quand il se trouve un dimanche, parceque c'est le XIV au soir que choisissent les Juifs pour immoler l'agneau pascal.

Cette remarque déja faite par Clavius (a) auroit dû prévenir le reproche astronomique fait par Cassini au calendrier grégorien ; mais peut-être qu'il ne trouvoit pas cette raison suffisante pour justifier la discordance qu'on a laissée entre le calendrier et l'astronomie : en effet, elle nuit à l'exactitude du calendrier, relativement à l'usage qu'on en pourroit faire pour trouver les nouvelles lunes véritables.

Méthode pour trouver l'épacte, les nouvelles lunes et les fêtes mobiles, pour une année quelconque.

1593. Si l'on veut y employer les tables dont j'ai indiqué ci-dessus la construction, on commencera par chercher le nombre d'or (1560), parceque l'on a pris les nombres d'or qui suivent toujours un progrès uniforme pour servir à régler les irrégularités des épactes; ce nombre d'or, pris au haut de la table étendue (PL. VIII), marquera la colonne dans laquelle doit se trouver l'épacte que l'on cherche.

Pour savoir dans quelle ligne de la table, et vis-à-vis de quelle lettre il faut chercher l'épacte, on prendra, dans la table d'équation (1583), la lettre qui convient au siecle où l'on se trouve, et ce sera dans cette ligne qu'il faudra prendre l'épacte répondante au nombre d'or.

Pour avoir une regle particuliere dans ce siecle-ci et le suivant, où l'on emploie la ligne C, on multipliera par 11 le nombre d'or de l'année courante, parcequ'en partant de la fin du cycle lunaire précédent, chaque année l'épacte augmente de 11; on ajoutera 19, savoir les 18 de l'épacte qui a lieu à chaque derniere année du cycle lunaire, et 1 de plus, parcequ'elle augmente de 12 l'année suivante quand le cycle recommence ; on divisera cette somme par 30, puisque les épactes sont formées en ôtant toujours 30, et l'on aura pour reste l'épacte de l'année.

Ainsi pour avoir l'épacte de 1762, on multiplie par 11 le nombre d'or 15, on a 165; on y ajoute 19, et l'on divise la somme 184 par 30, le reste de la division est 4; c'est l'épacte cherchée.

On peut aussi multiplier par onze le nombre d'or diminué d'une unité, et diviser le produit par 30, le reste sera l'épacte, parcequ'elle est o sous le nombre d'or 1, et qu'elle augmente de 11 chaque année. Ainsi dans notre exemple $\frac{14 \cdot 11}{30} = 5$; le reste est 4.

(a) Il observe que c'étoit l'ancien usage de l'église (*pag.* 55, 350 et 352). Cependant il y a des années où le quatorzieme de la lune précede la pleine lune moyenne (*pag.* 359).

1594. L'épacte suffit pour trouver à-peu-près l'âge de la lune; car l'épacte seule, ajoutée avec le jour du mois, donne l'âge de la lune, et l'épacte étant ôtée de 30, donne le jour de la nouvelle lune dans les trois premiers mois de l'année; dans les autres mois il faut ajouter à l'épacte autant d'unités qu'il y a de mois écoulés, en commençant au mois de mars, avant que d'ajouter le quantieme, ou avant que de faire la soustraction. Ainsi pour le mois de décembre 1787 on ajoute XI avec 10; la somme 21 étant ôtée de 30 donne 9 pour le jour de la nouvelle lune, à un ou deux jours près. Pour plus d'exactitude, il ne faudroit ôter que de 29 si le mois a 30 jours, et de 30 s'il a 31 jours: on ajoute 30 pour faire la soustraction si cela est nécessaire.

Pour trouver la nouvelle lune il est plus exact de se servir du calendrier perpétuel (art. 1586), car l'épacte de l'année indique tous les jours de nouvelles lunes dans ce calendrier: ainsi pour avoir la nouvelle lune pascale, qui ne peut arriver qu'après le 7 mars, il faut voir à quel jour répond l'épacte de l'année, à compter du 8 de mars inclusivement, et ce sera celui de la nouvelle lune pascale; le quatorzieme jour, à compter de la nouvelle lune inclusivement, sera le jour de la pleine lune pascale; et le premier dimanche après cette pleine lune exclusivement, c'est-à-dire le premier jour où l'on trouvera la lettre dominicale de l'année courante (1552), sera le jour de Pâque.

Les limites pascales sont le 22 mars et le 25 avril (1576); ainsi en 1598, 1693 et 1761, la fête de Pâque est arrivée le 22 mars; elle s'y trouvera encore en 1818, 2285, 2437, 2505, etc. Au contraire, cette fête n'est tombée qu'au 25 avril en 1546, en 1666 et en 1734; et cela arrivera encore en 1886, 1943, 2038, 2190, etc.

La septuagésime est toujours neuf semaines avant Pâque, ou le 64ᵉ jour, y compris celui de Pâque; le mercredi des Cendres le 47ᵉ jour avant le jour de Pâque, en comptant l'un et l'autre.

On trouve la fête de l'Ascension en comptant 40 jours après Pâque; la Pentecôte 50; la Trinité 57 jours, et la Fête-Dieu 61 jours après Pâque; celle-ci arrive toujours le même quantieme du mois que le Samedi-Saint.

Le premier dimanche de l'avent ne peut arriver que depuis le 27 novembre inclusivement, jusqu'au 3 décembre inclusivement; ainsi ce sera toujours le dimanche compris dans cet intervalle.

Voici une table dans laquelle on voit la correspondance des cycles, des lettres dominicales, et de la fête de Pâque, pour un espace de 40 ans; on y voit qu'après 1800 on a D au lieu de C, et jeudi au lieu de vendredi, à la septieme année du cycle solaire.

Années

Années.	Cycle solaire.	Lettres dominic.	Premier jour de l'année.	nombre d'or.	Epactes.	Pâque.	Indiction.
1790	7	C	vendredi	5	XIV	4 avril	8
1791	8	B	samedi	6	XXV	24 avril	9
1792	9	A G	dimanche	7	VI	8 avril	10
1793	10	F	mardi	8	XVII	31 mars	11
1794	11	E	mercredi	9	XXVIII	20 avril	12
1795	12	D	jeudi	10	IX	5 avril	13
1796	13	C B	vendredi	11	XX	27 mars	14
1797	14	A	dimanche	12	I	16 avril	15
1798	15	G	lundi	13	XII	8 avril	1
1799	16	F	mardi	14	XXIII	24 mars	2
1800	17	E	mercredi	15	IV	13 avril	3
1801	18	D	jeudi	16	XV	5 avril	4
1802	19	C	vendredi	17	XXVI	18 avril	5
1803	20	B	samedi	18	VII	10 avril	6
1804	21	A G	dimanche	19	XVIII	1 avril	7
1805	22	F	mardi	1	*	14 avril	8
1806	23	E	mercredi	2	XI	6 avril	9
1807	24	D	jeudi	3	XXII	29 mars	10
1808	25	C B	vendredi	4	III	17 avril	11
1809	26	A	dimanche	5	XIV	2 avril	12
1810	27	G	lundi	6	XXV	22 avril	13
1811	28	F	mardi	7	VI	14 avril	14
1812	1	E D	mercredi	8	XVII	29 mars	15
1813	2	C	vendredi	9	XXVIII	18 avril	1
1814	3	B	samedi	10	IX	10 avril	2
1815	4	A	dimanche	11	XX	26 mars	3
1816	5	G F	lundi	12	I	14 avril	4
1817	6	E	mercredi	13	XII	6 avril	5
1818	7	D	jeudi	14	XXIII	22 mars	6
1819	8	C	vendredi	15	IV	11 avril	7
1820	9	B A	samedi	16	XV	2 avril	8
1821	10	G	lundi	17	XXVI	22 avril	9
1822	11	F	mardi	18	VII	7 avril	10
1823	12	E	mercredi	19	XVIII	30 mars	11
1824	13	D C	jeudi	1	*	18 avril	12
1825	14	B	samedi	2	XI	3 avril	13
1826	15	A	dimanche	3	XXII	26 mars	14
1827	16	G	lundi	4	III	15 avril	15
1828	17	F E	mardi	5	XIV	6 avril	1
1829	18	D	jeudi	6	XXV	19 avril	2

1595. Les astronomes qui calculent des éphémérides ont encore besoin de connoître les regles du calendrier pour d'autres usages ecclésiastiques ; voici les principales. Les jeûnes des Quatre-Temps, qu'on peut regarder comme des fêtes mobiles, ont été fixés par Grégoire VII aux quatre époques suivantes ; 1°. la premiere semaine de Carême ; 2°. la semaine de la Pentecôte ; 3°. le mercredi *après* l'Exaltation de la croix, ou *après* le 14 septembre, jusqu'au 21 ; 4°. la troisieme semaine de l'avent. Si Noël arrive le lundi, le mardi ou le mercredi, c'est le mercredi précédent, sinon ce sera deux mercredis avant Noël. Il paroît que les jeûnes des Quatre-Temps ont été institués à l'imitation de ceux qui étoient en usage chez les Juifs (Casali, *de veteribus sacris christianorum ritibus, Romae*, 1647, *in-fol. p.* 252, *c.* 63) ; mais plusieurs de nos fêtes paroissent avoir été tirées aussi des usages du paganisme : *Addimus praedictis, licuisse ecclesiae, quae apud ethnicos impiè superstitioso cultu agebantur feriae, easdem sacro ritu expiatas ad pietatem christianam transferre, ut majori id esset diaboli contumeliae, et quibus ipse coli voluerit, Christus et Sancti ejus ab omnibus honorarentur.* (Casali, *c.* 60, *pag.* 239.) Il cite Baronius, *in an.* 44 et 58, et Spondanus, *n°.* 36 et 29.

Les Rogations sont le lundi avant l'Ascension. La fête des cinq Plaies est le vendredi avant la Quadragésime. La *Compassion*, ou Notre-Dame de *Pitié*, est le vendredi de la Passion, excepté quand l'Annonciation se trouve ce jour-là ; alors la petite fête fait place à la plus grande, et la *Compassion* se célebre le samedi. La Susception de la couronne d'épines est le premier dimanche d'août, à moins que la Transfiguration ne la fasse renvoyer au second. Les jeûnes de vigiles qui se trouvent tomber au dimanche, se transportent au samedi précédent, quand même ce seroit une fête.

Si S. Matthias, le 24 février, ou le 25 dans les années bissextiles, est le jour des Cendres, on renvoie la fête au lendemain, comme en 1694, 1700, 1762.

Les fêtes doubles de S. Matthias, S. André et S. Thomas, qui, dans le carême et l'avent, se remettent du dimanche au lundi, ne sont point chommées dans ce cas-là ; il n'y a que l'Annonciation et la Conception, qui sont des fêtes solemnelles, qui sont fêtées le lundi. Quand l'Annonciation tombe depuis le dimanche des Rameaux inclusivement, jusqu'au dimanche de Quasimodo inclusivement, on la renvoie au lendemain de Quasimodo, comme cela est arrivé en 1758, 1766 et 1769. Quand la Conception tombe au second dimanche de l'avent, elle se renvoie au lendemain. Quand la fête de S. André concourt avec le premier dimanche de l'avent, on la célebre le len-

demain; dans tout autre cas, elle se fait le dimanche. Dans les années bissextiles la fête de S. Matthias se célebre le 25 février au lieu du 24, et sainte Honorine le 28. Dans le diocese de Paris, par un mandement de l'archevêque, et des lettres-patentes du roi, en fév. 1778, on a supprimé treize fêtes, des 24 ou 25 février, premier mai, 25 juillet, 10 et 24 août, 21 et 29 septembre, 28 octobre, 3, 11 et 30 novembre, 21 et 28 décembre; on n'a laissé que les fêtes suivantes: sainte Genevieve, 3 janvier; S. Jean, 24 juin; S. Pierre, 29; S. Louis, 25 août; S. Denis, 9 oct. S. Etienne, 26 décembre; S. Jean, 27; et quinze fêtes de mysteres, sans compter deux demi-fêtes, l'octave de la Fête-Dieu et les Morts. On avoit remplacé dans l'avent quatre jours de jeûne, mais on les a supprimés totalement en 1786. Quoique l'usage ancien soit de mettre le nom d'un saint à tous les jours du mois dans la *Connoissance des temps*, il y en a un grand nombre qui ne sont fêtés ni à Rome ni à Paris, mais dont les noms se trouvent seulement dans le Martyrologe romain: l'édition de Paris, par M. l'abbé Chatelain, est la meilleure. On peut consulter sur tous ces objets le livre intitulé, *Ordo perpetuus divini officii juxta ritum breviarii ac missalis sanctae romanae ecclesiae. Ordinabat monachus Benedictinus e congregatione S. Mauri. Divione, apud Fr. Desventes*, 1759, *in*-12; et, pour le diocese de Paris, les *Rubriques générales* qui sont en tête du bréviaire, sur lequel on compose chaque année le *Breve Parisiense*, à l'imitation de l'*Ordo divini officii*, qui s'imprime pour l'usage du bréviaire romain.

1596. On peut simplifier beaucoup la construction des almanacs par le moyen des sept calendriers qui sont dans l'*Art de vérifier les dates*, ou des trente-cinq calendriers que M. Jombert jeune a fait imprimer en 1785, et qui sont pour les 35 places différentes où Pâque peut se trouver.

Des époques les plus célebres, et de la maniere d'en compter les années.

1597. L'ÉPOQUE de la création du monde, suivant le P. Petau, d'après les calculs de la Genese, paroît être à l'an 730 de la période julienne, 3984 ans avant J. C. (*Doctrina temporum, tom. II, pag.* 282, édit. de 1705); ce qui fait 3983 suivant la méthode des astronomes (1330). Mais il y a des Grecs, comme S. Clément d'Alexandrie, qui comptent 5624 ans.

L'ERE DES OLYMPIADES commence à l'année 3938 de la période julienne, 776 ans avant l'ere chrétienne; ce qui fait 775 suivant la

forme de nos tables (1330). Le cycle solaire étoit 18, le cycle lunaire 5, l'indiction 8. Les Athéniens comptoient ces années de la nouvelle lune la plus voisine du solstice d'été, c'est-à-dire d'un des jours des mois de juin ou de juillet; il y a sur cet article quelques différences d'opinions parmi les chronologistes, mais il n'y en a point sur l'année de cette date. (Petau, liv. IX, ch. 40 et suiv.)

La fondation de Rome, selon Varron, Cicéron, Pline, Tacite, Plutarque, Censorinus, Baronius, Petau, Riccioli, se rapporte au 21 avril 3961 de la période julienne, 753 ans avant J. C. (752 suivant les astronomes.) Censorinus et la plupart des savans, les empereurs même dans les jeux séculaires, ont adopté cette maniere de compter, qui forme les années varronienes de la fondation de Rome, quoique cette ville ait été fondée deux ans plus tard selon les fragmens des fastes du Capitole de Verrius Flaccus. Voyez *Fastorum anni romani reliquiae, Fuggini*, 1779. L'année 753 avant Jésus-Christ avoit 13 de cycle solaire, 9 de cycle lunaire, et 1 d'indiction (Riccioli, *Astron. reform.* 1665, *pag.* 16; *Chronologia reformata*, 1669, *pag.* 150.)

1598. L'ere de Nabonassar, célebre par les calculs d'Hipparque et de Ptolémée, est celle de la fondation du royaume de Babylone, ou de la quatrieme et derniere monarchie de l'empire des Assyriens, Nabonassar s'étant emparé pour lors de la ville de Babylone. Cette ere commence à l'an 3967 de la période julienne, 747 ans avant J. C. (ou 746 suivant la méthode des astronomes, art. 1330.) Le commencement du mois Thoth tombe au 26 février à midi, au méridien d'Alexandrie, ou une heure 52' avant midi, au méridien de Paris. Cette année-là le cycle solaire étoit 19, le cycle lunaire 15, le cycle d'indiction 7. De cette époque se comptent les années égyptiennes de 365 jours; et après 1460 années completes, la 1461e année se retrouve commencer au 26 février.

La seconde année de Nabonassar commença de même le 26 fév. 745, et la troisieme le 26 février 744, parceque les deux premieres années étoient de 365 jours dans le calendrier julien, comme dans le calendrier égyptien; mais l'année julienne 744 avant J. C. étant bissextile, et contenant un jour de plus que l'année 3 de Nabonassar, la quatrieme commence un jour plutôt, ou le 25 février 743 avant J. C. Les trois années suivantes commencent encore le 25 février; mais la huitieme commence le 24 février 739, la douzieme le 23 février 735, et ainsi de suite.

Par cette progression qui est fort simple, j'ai construit une table de huit cents quatre-vingt-huit années qui se trouvent jusqu'à l'année 140 de J. C., où tombe la derniere observation de Ptolémée; en

voici un extrait pour l'usage des astronomes qui veulent réduire les observations de l'Almageste. J'y ai joint une table des mois égyptiens, et du nombre de jours qu'ils contiennent. On trouve aussi une table des années de Nabonassar, mais moins commode que la mienne, dans Riccioli (*Astron. ref.*). On peut voir encore la Nauze (*Académ. des inscr. tom. XIV, pag.* 334.)

TABLE du commencement des années de Nabonassar, réduites au calendrier julien, et des mois égyptiens, suivant la méthode des astronomes (1330).

Années de Nabon.	Années julien. avant l'ere vulgaire.	Années de Nabon.	Années julien. avant notre ere.	MOIS ÉGYPTIENS.		JOURS.
1	26 févr. 746	468	1 nov. 280	Θὼθ,	Thoth . . .	30
2	26 févr. 745	484	28 oct. 264	Φαωφὶ,	Paophi, ou	
3	26 févr. 744	508	22 oct. 240		Phaophi .	60
4	25 févr. 743	592	1 oct. 156	Ἀθὺρ,	Athyr ou Athir	90
8	24 févr. 739	596	30 sept. 152	Χοιὰκ, Κιακ,	Chœac ou	
12	23 févr. 735	600	29 sept. 148		Chiach . .	120
16	22 févr. 731	712	1 sept. 36	Τυβὶ,	Tybi	150
24	20 févr. 723	716	31 août 32	Μεχὶρ,	Mechir ou	
100	1 févr. 647	744	24 août 4		Mekir . .	180
104	31 janv. 643	748	23 août 0	Φαμενὼθ,	Phamenoth .	210
224	1 janv. 523			Φαρμουθὶ,	Pharmuthi, ou	
227	1 janv. 520				Pharmouthi.	240
228	31 déc. 520		Années de l'ere chrétienne.	Παχὼν,	Pachon ou pa-	
232	30 déc. 516				kon. . . .	270
348	1 déc. 400			Παῦνι,	Payni ou Pauni	300
		752	22 août 4	Ἐπιφὶ,	Epiphi ou Epi-	
		840	31 juil. 92		phi	330
		864	25 juil. 116	Μεσορὶ,	Mesori ou Mes-	
		872	23 juil. 124		sori . . .	360
		888	19 juil. 140	Cinq jours épagomenes.		365

1599. Par le moyen de cette table on réduit facilement au calendrier julien les observations qui sont dans Ptolémée. La plus ancienne

est une éclipse de lune qui commença à Babylone la premiere année de *Mardocempade*, ou la 27e de Nabonassar, le 29 du mois Thoth, une heure entiere après le lever de la lune (*Almag. IV*, 6). L'année 27 de Nabonassar commençoit le 20 février 720 avant J. C.; ainsi le 29 du mois Thoth seroit le 48e, à compter du premier de février 720 avant J. C.; il en faut ôter 29 jours que contient le mois de février, parceque cette année 720 étoit bissextile (1541); il reste le 19 mars de l'année 720, suivant notre maniere de compter, ou plutôt suivant la disposition de nos tables (1330); car les chronologistes l'appellent année 721.

Je suppose qu'on demande à quel jour répond le 17 du mois Kiak de la 486e année de Nabonassar, jour où fut faite la seconde observation de Mercure; on voit par la table précédente que l'année 486 commençoit le 28 octobre, 262 ans avant notre ere, et, par la table des mois que le 17 du mois Kiak étoit le cent septieme jour à compter du 28 octobre inclusivement; car le 28 étoit déja de l'année 486: on prendra donc quatre jours qui restent du mois d'octobre, savoir 28, 29, 30, 31, trente jours du mois de novembre, 31 du mois de décembre, 31 du mois de janvier de l'an 261, la somme est 96; il en reste onze pour aller à 107, donc le 107e étoit le 11 février 261; c'est le jour qui répond au 17 du mois Kiak de l'an 486 de Nabonassar (*Mém. acad.* 1766, *p.* 465, 480.) On remarque que, dans cette observation faite le 18 au matin, pour ceux qui comptent depuis minuit, Ptolémée a soin de dire que c'est entre le 17 et le 18, c'est-à-dire le 17 en comptant depuis midi, ou le 18 si c'étoit vers le lever du soleil, parceque, du temps de Ptolémée, le jour civil commençoit au lever du soleil. On trouve cette attention en plusieurs endroits de l'*Almageste*, *pages* 59, 225, 226, 233, etc., édit. de 1551.

1600. La mort d'Alexandre arriva le 19 juillet, l'an 4390 de la période julienne, 324 ans avant J. C. (ou 323 suivant nous), et la septieme année de la premiere période calippique. Cette époque sert à réduire les observations d'Hipparque, rapportées par Ptolémée aux années de la mort d'Alexandre. Il dit lui-même (p. 74) qu'il y a 424 ans de la premiere année de Nabonassar jusqu'à la mort d'Alexandre, et 294 jusqu'à la premiere année du regne d'Auguste. L'ere des Séleucides tombe à l'an 4402 de la période julienne, 312 ans avant J. C., ou 311 suivant nous.

1601. La premiere année de notre ere, c'est-à-dire de l'ere chrétienne ou ere vulgaire, la premiere année de Jésus-Christ, est la 4714e de la période julienne; cette année on avoit 10 de cycle solaire, 2 de cycle lunaire, 4 d'indiction romaine; c'est la 46e des an-

nées juliennes, c'est-à-dire la 46ᵉ année à compter depuis la réformation du calendrier par Jules César ; elle concourt depuis le premier janvier jusqu'au 21 avril avec l'année de Rome 753, et ensuite avec l'année 754. Avant la nouvelle lune, la plus proche du solstice d'été, elle concourt avec la quatrieme année de la 194ᵉ olympiade, et le reste de l'année est dans la premiere de la 195ᵉ olympiade. Jusqu'au 23 août à midi, elle concourut avec l'année 748 de Nabonassar, et avec l'année 324 de la mort d'Alexandre; mais dans le reste de cette année-là, on compta 749 et 325 (*Ast. ref. tab. XXII.*)

La naissance effective de J. C. tombe à la fin de l'année deux avant l'ere chrétienne, ou 4711ᵉ de la période julienne, suivant Baronius et Scaliger, et même deux ans plutôt suivant quelques auteurs; mais le P. Petau prouve assez qu'il y a là dedans beaucoup d'incertitude. (*Liv. 12, ch. 4, 5* et *6*). Le P. Alexandre, dans sa grande *Histoire ecclésiastique*, la fixe à la fin de l'année 4 avant l'ere vulgaire. (*Dissert. I, tom. III, pag. 65* et *66*.)

1602. L'ÉPOQUE DES TURCS, appellée *Hégire,* commence à la fuite de Mahomet qui sortit de la Mecque; elle tombe au vendredi 16 juillet 622, ou 5335 de la période julienne. Il y a une autre secte d'Arabes (suivie dans les tables alphonsines), qui place le commencement de l'hégire au jeudi 15 juillet. Les années arabes sont de $354^j 8^h 48'$, et les années civiles sont des années lunaires de 354 et ensuite de 355 jours; ainsi 12 années juliennes font 12 ans 130 jours $14^h 24'$. Ils partagent leurs années en cycles de 30 ans, dans lesquels ils font 19 années communes de 354 jours, et onze de 355; savoir les années 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26 et 29 de chaque cycle (Petau, pag. 410). Leur cycle a commencé en 1757 le 15 septembre, avec l'année 1171 de l'hégire.

1603. On trouve des tables détaillées de la correspondance des années arabes avec les années juliennes, dans le P. Petau (*liv. VII, c. 22*), dans Riccioli, dans le livre d'*Ulug-Beg,* intitulé *Epochae celebriores,* que Gravius ou Greaves publia à Londres en 1650, et dans le catalogue d'étoiles d'Ulug-Beg, qui fut publié avec des commentaires par Thomas Hyde, à Oxford, en 1665, et qu'on y a réimprimé en 1767. Voici la date du commencement de l'année, ou du premier jour du mois *mouharrem*, pour le temps où nous sommes, tiré de l'*Art de vérifier les dates*, Paris, 1784, *in-folio,* chez Jombert, dans lequel on a ajouté un jour à ceux de Gravius, pour se conformer à l'usage actuel des Turcs; cependant M. Cardone, professeur des langues orientales, m'a fait voir un almanac perpétuel, dressé à Constantinople, conforme à la table de Gravius. Mais M. Fonton,

premier interprete du roi à Constantinople, m'écrivoit en 1782 que, suivant l'usage actuel, l'année turque commence un jour plus tard que suivant la table de Gravius, et conformément à la table qui est dans l'*Art de vérifier les dates;* et M. le Monnier, ingénieur du roi, m'écrivoit, « L'année 1202 a commencé le 12 octobre 1787, après le coucher du soleil; en sorte que le samedi 13 octobre a été le premier jour du mois *mouharrem*) », au lieu que Gravius compte le vendredi dont il y a en effet quelques heures qui appartiennent déja au premier jour de l'année turque.

Années de l'hégire commençantes.	Années grégor.
1205	10 sept. 1790
1206	31 août 1791
1207	19 août 1792
1208	9 août 1793
1209	29 juil. 1794
1210	18 juil. 1795
1211	7 juil. 1796
1212	26 juin 1797
1213	15 juin 1798
1214	5 juin 1799
1215	25 mai 1800
1216	14 mai 1801
1218	23 avril 1803
1220	1 avril 1805
1222	11 mars 1807
1224	16 févr. 1809

On peut voir la comparaison détaillée des calendriers et des époques, usités chez les Romains, les Egyptiens, les Arabes, les Perses, les Syriens et les Hébreux; dans le commentaire sur le premier chapitre d'Alfragan, ajouté par *Christman* à l'édition de 1590 *in-8°*; dans Riccioli (*Chronol. reformata*); dans Petau, etc.

Du lever héliaque, cosmique, ou acronyque, de différentes étoiles.

1604. Les poëtes et les auteurs anciens qui ont écrit sur l'astronomie, l'agriculture et l'histoire, parlent souvent du lever et du coucher des étoiles, qu'on a appellés *apparentiae* (342), et sur-tout du lever héliaque (201). Ces passages sont souvent obscurs et même pleins de contradictions; c'est ce qui m'engage à donner ici les principes de cette matiere, afin qu'avec un peu d'astronomie on puisse entendre ces auteurs, et même les éclaircir. Commençons par le lever héliaque de Sirius qui étoit célebre parmi les Egyptiens (270, 659.) Nous avons sur cette matiere un petit ouvrage de Bainbrigius, intitulé, *Canicularia,* augmenté par Gravius, et publié à Oxford en 1648 : ce livre est fort rare actuellement. Le P. Petau a aussi traité cette matiere (*lib. III. Variar. dissertat. lib. I, c.* 2; *lib. VII, c.* 1.)

1605. Le lever héliaque de Sirius, il y a 2000 ans, arrivoit en Egypte vers le milieu de l'été, lorsqu'après une longue disparition cette

cette étoile commençoit à reparoître le matin, un peu avant le lever du soleil (201, 659); la saison qui régnoit alors, ou la situation du Soleil, étoit à-peu-près la même que celle du 12 juillet parmi nous, et c'étoit le temps où le vent étésien, soufflant du nord sur l'Ethiopie, y accumuloit les nuages et les pluies, et causoit les débordemens du Nil; aussi le lever de Sirius s'observoit avec le plus grand soin, c'étoit une des cérémonies religieuses de ce temps-là (*Spectacle de la Nature, tom. IV, pag.* 307; *Hist. du Ciel, tom. I, pag.* 42, 277).

L'année cynique des Egyptiens commençoit au lever héliaque de Sirius; mais pour ce qui est de leur année civile qui étoit continuellement de 365 jours (1598), elle ne pouvoit pas s'accorder avec l'année naturelle ou solaire, et tous les 4 ans le lever de Sirius devoit arriver un jour plus tard dans l'année civile [a]. Après un espace de 1460 années solaires, que Censorinus (*c.* 6, 8 et 18) appelle *la grande année cynique* ou *caniculaire* des Egyptiens, l'année naturelle se retrouvoit commencer à-peu-près le même jour de l'année civile. Ainsi l'an 1322 avant et 138 après J. C., c'étoit le 1er jour du mois Thoth, ou le premier jour de l'année civile (296), qui répondoit à notre 20 juillet; c'est cette période *caniculaire* ou *sothiaque* de 1460 ans dont on trouve des vestiges dans quelques anciens auteurs, et dont les modernes ont beaucoup parlé (Clem. Alexand. *Stromatum lib. I;* Riccioli, *Alm. I,* 129; *Chronol. réfor. pag.* 31; Petau, *Var. dissert. lib. II, c.* 4). Les anciens étoient en erreur dans ce calcul de plus de 36 ans, parcequ'ils ne connoissoient point l'année sydérale ou astrale qui devoit régler le cycle sothiaque; ils croyoient que 1460 années solaires étoient égales à 1461 années vagues ou civiles : mais comme l'année tropique est moindre que les anciens ne le croyoient, et l'année sydérale plus grande, la période n'étoit point telle qu'on le croyoit; l'année civile ne concouroit, au bout de 1460 ans, ni avec l'année tropique, ni avec l'année sydérale. Celle-ci étant de 365j 6h 9′ 11″4 (888), il ne faut que 1424 années sydérales pour faire 1425 années égyptiennes, formant environ 520125 jours. L'année tropique étant de 365j 5h 48′ 48″ (886), il faut 1507 années tropiques ou 1508 années communes pour ramener les saisons au même jour de

(a) Suivant Geminus qui vivoit du temps de Cicéron, les Egyptiens avoient voulu que les fêtes passassent ainsi par tous les temps de l'année naturelle (*Elem. astron. cap. de mensibus,* pag. 19 de l'édition de Petau), et il cite Eratosthenes. Mais du moins, du temps d'Hérodote, 450 ans avant Jésus-Christ, on ne connoissoit pas la différence de l'année vague à l'année solaire, et la période caniculaire de 1461 (*Mém. de l'acad. des inscriptions,* t. XXIX, pag. 114; *Mém. de l'acad. des sciences* 1782, pag. 234).

l'année, après un intervalle de 550420 jours. Ainsi la période de 1460 ans ne ramenoit point au même jour les levers des étoiles, qui n'exigeoient que 1425 ans, ni les saisons qui en exigeoient 1508. On peut voir encore sur cette matiere M. Dupuy, *Acad. des inscrip.* *XXIX*, 116.

1606. Pour trouver le temps de l'année où devoit arriver en Egypte le lever héliaque de Sirius, nous supposerons que cette étoile pouvoit être apperçue à son lever par des yeux attentifs, pourvu que le Soleil fût encore abaissé de 10° sous l'horizon, quoique Ptolémée donne en général 12° pour *l'arc d'émersion* des étoiles de la premiere grandeur (2261). Soit P le pole (*fig.* 89), ♈ C l'équateur, ♈ D l'écliptique, S l'étoile dont il s'agit. Sous une latitude de 30° telle qu'on l'observe dans la basse Egypte, on aura PZ = 60°, l'angle ACS = 60°, AS de 16° 22'; c'est la déclinaison de Sirius vers l'an 138 où commence la période sothiacale. En résolvant le triangle CAS, on trouvera CA de 9° 45' 44"; c'est la *différence ascensionnelle* (1026), qui, étant ajoutée à l'ascension droite ♈ A de Sirius pour ce temps-là 80° 16', donne l'ascension oblique de Sirius ♈ C = 90° 1' 44"; ainsi le point C de l'équateur qui se levoit en même temps que l'étoile, avoit 90° 1' 44" d'ascension droite ♈ C.

Dans le triangle ♈ CD, dont on connoît ♈ C, l'angle ♈ 23° 41', l'angle ♈ CD, supplément de la hauteur de l'équateur; on trouvera l'angle D 62° 44' $\frac{1}{2}$, et le côté ♈ D, 3ˢ 13° 2' longitude du point coascendant D, c'est-à-dire du point de l'écliptique avec lequel Sirius se leve. Si l'on suppose le Soleil au point M de l'écliptique, 10° au-dessous de l'horizon, il faudra chercher la longitude du point M.

Dans le triangle MND l'on connoît l'angle D par l'opération précédente, aussi bien que MN = 10°: on trouvera DM = 11° 16', qui, ajouté à la longitude du point D, donnera celle du point M de 3ˢ 24° 18'. Telle étoit la longitude du Soleil le jour du lever héliaque de Sirius; c'est celle qu'il a maintenant le 16 juillet. On trouve cette longitude plus petite de 12° $\frac{3}{4}$ en remontant 1460 ans plutôt, ou au commencement de la période précédente, suivant le calcul de *Bainbrigius*. Pour l'année 1775 à Paris, M. Carouge trouve 4ˢ 27° 37' 12", ce qui répond au 20 août. Au reste ces résultats ne sont pas susceptibles d'une grande précision, non plus que l'observation du lever héliaque d'une étoile; l'état de l'atmosphere, la situation de l'observateur, la latitude des différentes provinces d'Egypte y devoient apporter des différences considérables. Il y a des pays où l'on voit Sirius lors même que le Soleil est élevé sur l'horizon.

1607. Quoique le lever héliaque des étoiles fût le plus remarqua-

ble parmi les anciens, ils distinguoient encore plusieurs autres especes de levers et de couchers (*Gemini elementa*). Les modernes, à leur imitation, ont distingué le lever *cosmique*, qu'on peut appeller le lever du matin; et le coucher *cosmique* ou coucher du matin, aussi bien que le lever et le coucher *acronyques* (a), ou lever et coucher du soir. Le moment du lever du Soleil regle le lever ou le coucher cosmique: lorsque des étoiles se levent avec le Soleil, ou se couchent au Soleil levant, on dit qu'elles se levent ou se couchent cosmiquement; mais quand les étoiles se levent ou se couchent le soir, au moment où se couche le Soleil, on dit que c'est le lever ou le *coucher acronyque;* d'où il suit que le coucher acronyque suit, à 12 ou 15 jours près, le coucher héliaque, et que le lever cosmique précede de la même quantité le lever héliaque.

Avec les tables du nonagésime (1685) tous ces calculs sont très simplifiés. En effet, au moment où l'étoile est à l'horizon, sa distance au méridien est égale à 90°, plus ou moins la différence ascensionnelle (1028).

Cette distance au méridien, ajoutée à l'ascension droite, pour les trois couchers, et retranchée pour les levers, donne l'ascension droite du milieu du ciel. On calcule le nonagésime qui lui correspond; sa longitude, augmentée de trois signes, donne le lieu du Soleil au lever et au coucher cosmique : diminuée de trois signes, elle donne celui du lever ou du coucher acronyque. On ajoute au nonagésime trois signes, plus l'arc DM, pour le lever héliaque; on les ôte pour le coucher héliaque. Le sinus de DM est égal au sinus de NM divisé par le sinus de la hauteur du nonagésime, qui est l'angle D.

1608. Le P. Petau a calculé une table fort ample de ces trois sortes de levers et de couchers pour les différentes étoiles, au temps de Jules César : en voici un extrait. Pour s'en servir, il faut observer que les quatre saisons de l'année qui commencent, en 1790, les 20 mars, 21 juin, 22 septembre et 21 décembre, arrivoient, du temps de César, les 23 mars, 25 juin, 25 septembre et 23 décembre, c'est-à-dire, deux, trois et quatre jours plus tard, suivant le calendrier julien, qui fut établi à Rome 44 ans avant notre ere (Képler, *Epitome astron. Copern. pag.* 390; Petau, *tom. III*).

On trouve dans les élémens d'astronomie de *Geminus*, et dans les dissertations du P. Petau (*Doctrina temporum*, *tom. III*), plusieurs circonstances des différentes sortes de lever et de coucher,

(a) Ἀκρόνυχος, *vespertinus*. On ne doit pas écrire achronyque avec *ch*. Il y en a qui estiment que, dans le principe, acronyque signifie à *contre-temps*, et que cosmique signifie *bien ordonné*.

avec plusieurs dissertations et plusieurs tables pour trouver à différens jours de l'année le lever et le coucher de différentes étoiles; ces détails me conduiroient trop loin : je me contenterai de rapporter quelques passages des poëtes latins, pour servir d'exemple; et la table suivante pour contribuer à les éclaircir.

TABLE qui marque le lieu du Soleil en signes et degrés pour le temps du lever et du coucher de 12 étoiles principales à Rome, la premiere année de la correction julienne, 44 ans avant l'ere vulgaire.

	Lever cosmique.	Lever héliaque.	Lever acronyque.	Coucher cosmique.	Coucher héliaque.	Coucher acronyque.
Antarès.	7ˢ 14°	7ˢ 27°	1ˢ 14°	1ˢ 2°	6ˢ 3°	7ˢ 2°
L'Aigle.	8 9	8 27	2 9	3 26	9 10	9 26
Arcturus. . . .	5 14	5 26	11 14	2 3	7 11	8 3
La Chevre. . . .	11 17	0 17	5 17	8 14	1 28	2 14
Luis. de la couron.	5 26	6 10	11 26	3 4	7 15	9 4
Queue du Cygne .	7 21	8 6	1 21	5 14	11 0	11 14
Queue du Dauphin.	8 17	9 6	2 17	4 5	9 14	10 5
Prem. tête des Gem.	2 14	3 0	8 14	8 28	2 13	2 27
Aldébaran . . .	1 21	2 11	7 21	7 9	0 26	1 9
Cœur de l'Hydre .	4 11	4 25	10 11	9 4	2 16	3 4
α de la Balance. .	6 17	7 11	0 17	0 17	5 24	6 17
Regulus	4 1	4 18	10 1	10 3	2 27	4 3
Sirius.	3 23	4 8	9 23	7 19	1 6	1 19
η des Pléiades . .	0 23	1 28	6 23	7 3	0 18	1 3

1609. Hippocrate parle de ces phénomenes; il dit qu'on doit observer les levers et les couchers héliaques des étoiles, spécialement du grand Chien et d'Arcturus, de même que le coucher cosmique des Pléiades (*Hipp. de Ære*); mais cela doit s'entendre de l'influence des différentes saisons de l'année, de la chaleur, de l'humidité, et des autres qualités de l'atmosphere dans chaque mois.

Polybe, racontant la perte de la flotte romaine dans la premiere guerre punique, attribue ce malheur à l'obstination des consuls qui avoient voulu, malgré les pilotes, se mettre en mer entre le lever d'Orion et celui du grand Chien, saison toujours orageuse. Le lever héliaque d'Orion arrivoit le 26 juin, suivant Pline et Ovide; mais

celui du grand Chien arrivoit le 26 juillet, suivant Columelle : c'est donc dans le mois de juillet qu'ils avoient entrepris leur navigation.

1610. C'est sur-tout dans ses Fastes qu'Ovide parle souvent des étoiles; ce poëte annonce d'abord qu'il va chanter les principes sur lesquels étoit fondée la division de l'année romaine, le lever et le coucher des constellations :

> Tempora cum causis latium digesta per annum,
> Lapsaque sub terras, ortaque signa canam. *Fast. I*, v. 1.

1611. Après avoir parlé des douze mois de l'année et des divinités qui y présidoient, il entre dans la partie astronomique de son ouvrage, en faisant un éloge pompeux des anciens astronomes, *Felices animae*, etc. vers 297. Le lever héliaque de la Lyre est le premier dont il parle, et il le fixe au jour des nones, c'est-à-dire, au 5 de janvier :

> Signa dabunt imbres exoriente Lyrâ. *I*, v. 306.

Il faut convenir que la détermination de ce jour n'est point exacte; le lever héliaque arrivoit dès le 6 novembre; mais les poëtes ne se piquent pas d'une bien grande précision : on peut voir dans le P. Petau (*Dissertationum lib. II*, *c.* 8) beaucoup d'inexactitudes et d'erreurs dans différens passages des anciens.

1612. Ovide est plus exact, lorsqu'arrivé au 5 des ides, ou au 9 de janvier, il parle du lever héliaque de la constellation du Dauphin.

> Interea Delphin clarum super æquora sidus
> Tollitur, et patriis exerit ora vadis. *I*, v. 457.

Car la constellation du Dauphin se levoit vers les 6 heures du matin dans cette saison-là, c'est-à-dire, assez long-temps avant le Soleil, pour pouvoir être observée le matin, et c'étoit le commencement de son apparition, ou son lever héliaque : il place au 10 de juin le lever acronyque, en disant :

> Navita puppe sedens, Delphina videbimus, inquit,
> Humida cùm pulso nox erit orta die. *VI*, v. 470.

Il en parle encore au 26 juin (653). Le coucher acronyque est indiqué au 3 février.

> Quem modò cælatum stellis Delphina videbas
> Is fugiet visus, nocte sequente, tuos. *II*, v. 79.

Quand les Pléiades (*Atlantides*) se couchoient cosmiquement, ou

au lever du Soleil, la Couronne se levoit héliaquement, paroissant avant le Soleil (*Georg. I*, 222).

1613. Le coucher cosmique du Scorpion paroît indiqué par Ovide pour le premier avril au matin :

> Dum loquor, elatæ metuendus acumine caudæ
> Scorpius in virides præcipitatur aquas. *IV*, v. 163.

C'est cependant au 15 avril qu'on le trouve par le calcul, au temps de César, pour l'étoile *Antarès.* Sur le coucher du Belier, voyez *art.* 595.

Le lever héliaque du Taureau est marqué dans Virgile comme annonçant le printemps, de même que le coucher du grand Chien, vers la fin d'avril.

> Candidus auratis aperit cùm cornibus annum
> Taurus, et averso cedens Canis occidit astro. *Georg. I*, v. 217.

On a beaucoup disputé sur le sens du mot *averso* : voyez M. l'abbé de Lille, dans ses notes; le Virgile *ad usum Delphini;* Costard (*pag.* 88). On n'avoit pas remarqué que ce mot indique seulement la situation du Taureau qui se leve la tête en bas, ou à rebours (Manilius, *I*, 255; *II*, 198; *IV*, 520; *V*, 140).

Le lever héliaque des Pléiades, et le commencement de l'été, sont annoncés pour le 13 de mai; ce seroit le 21, suivant le calcul du Pere Petau.

> Pleiadas aspicies omnes, totumque sororum
> Agmen, ubi ante idus nox erit una super;
> Tum mihi, non dubiis autoribus, incipit æstas. *Lib. V*, v. 599.

J'ai parlé du Bouvier (633), d'Orion (653), du grand et du petit Chien (659, 660), des Poissons (613).

1614. Il est nécessaire, pour l'intelligence des auteurs, de connoître le rapport qu'il y avoit autrefois entre les constellations et les quatre points de l'écliptique, où commençoient les saisons. Actuellement, le Soleil entre dans le signe du Belier, et dans l'équinoxe, en commençant le printemps, le 20 de mars; mais il n'entre dans la *constellation*, c'est-à-dire, dans les étoiles qui portent le nom de Belier, que le 29 avril, car la premiere étoile γ est à 30° de l'équinoxe : ainsi les équinoxes et les solstices ont rétrogradé de 30° depuis le temps où ils étoient d'accord avec les constellations. Il faut 2149 ans pour que cette différence soit d'un signe entier, ou de 30°. Lorsqu'on remonte au siecle d'Auguste, on trouve 25° ¼, et au temps des anciens

Grecs, 1450 ans avant J. C., on trouve 45° dont les équinoxes étoient plus avancés qu'ils ne le sont aujourd'hui; le printemps n'arrivoit que lorsque le Soleil étoit dans le milieu de la constellation du Belier. On peut imaginer, en effet, que les premiers astronomes placerent les saisons, par exemple, le printemps, dans le milieu du grouppe d'étoiles qu'ils prirent pour la premiere constellation, c'est-à-dire, dans le milieu du Belier, et l'été dans le milieu de la 4ᵉ constellation ou de l'Écrevisse; c'est-à-dire qu'ils appellerent l'Écrevisse l'assemblage des étoiles au milieu desquelles se trouvoit le Soleil au temps du solstice : du moins c'est ainsi qu'on le trouve dans la sphere d'Eudoxe et d'Aratus. Mais l'établissement des constellations pourroit être beaucoup plus ancien.

1615. La position des équinoxes a dû être fort différente, suivant les temps où on l'a observée et décrite : aussi trouve-t-on des auteurs anciens qui placent les équinoxes et les solstices au commencement de chaque signe; cela vouloit dire alors, de chaque constellation : d'autres qui les mettent au 2ᵉ, au 4ᵉ, au 6ᵉ, au 10ᵉ, au 15ᵉ degré des mêmes signes; ceux-ci supposent les plus anciennes observations. Voyez M. Fréret, *Défense de la chronologie*, 1758, *pag.* 460, 467.

1616. Au temps d'Hipparque, 150 ans avant J. C., la premiere étoile du Belier étoit dans le colure même de l'équinoxe, et le Soleil entroit dans la constellation du Belier en même temps que dans l'équinoxe.

Au temps d'Hésiode, 950 ans avant J. C., les points cardinaux étoient au 8ᵉ degré des constellations, et le Soleil entroit dans les astérismes ou constellations, 8 jours avant que d'entrer dans les points de la dodécatémorie (a), qui portoient les mêmes noms; ainsi le Soleil entroit dans la constellation du Belier 8 jours avant l'équinoxe, c'est-à-dire, avant le temps où les jours étoient égaux aux nuits. Columelle (*liv. IX, chap.* 13) nous dit que les calendriers rustiques de Méton, d'Eudoxe (b), et des anciens astronomes, suivoient cette méthode, et que les jours de fêtes qui dépendoient du commencement des saisons étoient réglés sur ce pied-là; il s'y conforme lui-même; on la trouve dans Varron, Ovide, Vitruve, Pline, Hygin, dans le *Scholiaste* d'Aratus, dans Martianus Capella, et même dans les calendriers du vénérable Bede (né en Angleterre en 672), comme l'observe le P. Petau (*Dissert. liv. II, c.* 4. *pag.* 43).

1617. Le poëte Manilius, qui n'étoit qu'un compilateur, dit dans

(a) Δωδεκατημόρια, les douziemes parties, c'est-à-dire, 30 degrés du cercle de l'écliptique.

(b) A l'égard d'Eudoxe, voyez l'art. 1619.

un endroit de son poëme, que le solstice est au premier degré du Cancer (*liv. I, v.* 605), et, dans l'autre, que c'est au 15e degré *liv. III, v.* 622). Il avoit trouvé cette derniere méthode dans l'ancienne astrologie grecque, et il l'explique assez clairement, en parlant du Cancer:

> Extenditque diem summum, parvoque recessu
> Destruit, ut quanto fraudavit tempore luces
> In tantum noctes augescat. *III*, v. 622.

C'est-à-dire que le Cancer augmente la durée des jours et la diminue ensuite, mais de sorte qu'il rende à la longueur des nuits ce qu'il ôte à celle des jours; tour-à-tour il leur ôte et leur rend leur durée:

> Inque vicem nunc damna facit, nunc tempora supplet. *III*, v. 636.

C'est l'état de la sphere décrite par Eudoxe (1619). Fréret pense que la division du zodiaque avoit dû être faite, au plus tard, dans le temps auquel les levers sensibles du commencement de chaque constellation précédoient de 15 jours les points cardinaux, c'est-à-dire, les équinoxes et les solstices (1614), et il la juge plus ancienne que la sphere grecque attribuée à Chiron (255).

1618. Il croit qu'au temps d'Hésiode (294), c'est-à-dire, 950 ans avant notre ere, on avoit fait quelque changement à la sphere ancienne de Chiron (Fréret, *pag.* 460); il paroît qu'on dressa de nouveaux calendriers, dans lesquels les levers et les couchers des étoiles étoient marqués d'une maniere plus conforme au temps, que dans la sphere de Chiron. Les idées astronomiques commençoient à devenir plus communes dans la Grece, par le commerce des Orientaux. Ce calendrier fait du temps d'Hésiode fut reçu par les Grecs, et ensuite par les Romains (1616), qui l'employerent sans examen, comme s'il eût été fait pour le temps et le climat où ils vivoient. Ainsi il faut ôter environ 38° des longitudes qu'ont les étoiles en 1770, si l'on veut faire des calculs qui soient d'accord avec les passages d'Ovide, de Pline, etc. (1616), sans qu'on puisse dire néanmoins qu'ils aient suivi constamment la même regle.

1619. Mais Eudoxe, qui écrivit environ 370 ans avant notre ere (309), et Aratus, qui suivit Eudoxe, décrivirent la sphere d'après une tradition plus ancienne que le temps d'Hésiode; le P. Petau fait voir assez en détail qu'Hipparque supposoit les solstices, dans la sphere d'Eudoxe, à 15° au moins vers l'Orient du lieu où ils étoient

étoient 162 ans avant notre ere, ce qui remonteroit à l'an 1242. Newton, dans sa chronologie, pense qu'Eudoxe et Aratus suivoient la sphere de Chiron; il en fixe, à la vérité, l'époque à 936 ans avant notre ere : mais Whiston, dans la réfutation qu'il a faite de la chronologie de Newton, et Fréret, après lui (*pag.* 418, 439, 458), prouvent que la sphere décrite par Eudoxe se rapporte à l'an 1353. Maraldi la fait remonter à 1200 (*Mém. acad.* 1733); et M. Gentil, ayant discuté de nouveau cette matiere, trouve 1483 ans avant notre ere (*Mém. acad.* 1785) : mais il fait voir que la position des tropiques est beaucoup plus ancienne. Fréret conclut (*pag.* 459) que ces connoissances étoient cultivées depuis long-temps dans l'Orient; il pense que cette sphere, où les saisons étoient au 15e degré des constellations, avoit été réglée par quelques astronomes égyptiens ou phéniciens qui étoient venus avec les fondateurs des colonies orientales, ou qui avoient abandonné l'Égypte avec les pasteurs chassés par Sésostris (*pag.* 459) : M. Bailly fait voir que c'étoit d'après une tradition indienne. Il est surprenant qu'on ne fût pas plus avancé dans la Grece au temps d'Eudoxe; mais ce ne fut qu'à Alexandrie, sous les Ptolémées, que les Grecs commencerent à faire des observations : dans le calendrier même attribué à Ptolémée, on voit le lever de Sirius à sept jours différens, au quatrieme après le solstice, aux 6, 22, 25, 27, 31 et 32 (Fréret, *pag.* 487).

C'est ici que je terminerai ce que j'avois à dire du calendrier et de la chronologie; j'ai été trop court pour ceux que la curiosité porte spécialement à l'histoire, mais trop long pour ceux qui ne cherchent dans ce livre que la véritable astronomie : je reprends donc le fil des théories astronomiques, et je commence par les parallaxes qui en sont une partie essentielle, et qui conduiront ensuite au calcul des éclipses.

LIVRE NEUVIEME.

DES PARALLAXES.

1620. La Parallaxe (1140) est la différence entre le lieu où un astre paroît, vu de la surface de la terre, et celui où il nous paroîtroît, si nous étions au centre [a]; on l'appelle quelquefois *parallaxe diurne*, pour la distinguer de la parallaxe annuelle (1140).

Tous les mouvemens célestes doivent se rapporter au centre de la Terre, pour paroître réguliers; car les différens points de la surface de la Terre étant situés fort différemment les uns des autres, un astre doit leur paroître dans des aspects fort différens : c'est au centre qu'il faut se transporter, afin de voir tout à sa véritable place, et de trouver la véritable loi des mouvemens célestes; ainsi nous sommes obligés de calculer sans cesse la parallaxe, pour réduire le lieu d'une planete observée à celui que l'on devroit voir du centre de la Terre.

1621. Soit T le centre de la Terre (*fig.* 87), O le point de la surface où est placé l'observateur, TOZ la ligne verticale, ou la ligne qui passe par le zénit Z, par le point O de l'observateur, par le centre T de la Terre, et par le nadir. Une planete P, située dans la ligne du zénit, répond toujours au même point du ciel, soit qu'on la regarde du centre T, soit qu'on l'observe du point O; le point du ciel qui paroît à notre zénit marque également le lieu de l'astre dans les deux cas; ainsi *un astre qui paroît au zénit n'a point de parallaxe:* c'est le premier principe qu'il faut considérer pour la connoissance des parallaxes.

1622. Si la planete, au lieu d'être sur la ligne du zénit TOPZ, paroît sur la ligne horizontale OH, perpendiculaire à la premiere, sa distance TH au centre de la Terre étant la même que la distance TP, le lieu de la planete H, vu du centre de la Terre, est sur la ligne TH; le lieu de la planete, vu du point O, est sur la ligne OH : ces deux lignes TH et OH ne répondent pas au même point du ciel; car

(a) Si l'on regarde deux clochers dans la même direction, et qu'ensuite on monte un étage plus haut, l'on verra le clocher le plus voisin s'abaisser au-dessous de l'autre; c'est un effet sensible de la parallaxe.

au-delà du point H, où elles se croisent, elles iront en s'éloignant l'une de l'autre; ainsi, dans la sphere des étoiles fixes, elles rencontreront deux points différens, et indiqueront pour l'astre situé en H deux situations différentes; cette différence est la parallaxe.

1623. Comparons ces deux différentes situations, ou ces deux différens points, avec le point du zénit, ou le point du ciel qui est sur la ligne TOZ menée par le centre T de la Terre, et par le point O de la surface: l'angle ZOH, formé par la ligne verticale OZ, et par la ligne OH sur laquelle paroît la planete, est la *distance apparente* de l'astre au zénit: si nous étions au centre T, l'angle ZTH seroit la vraie distance de l'astre au zénit, ou la quantité de degrés dont la ligne TH, menée à l'astre, différeroit de la ligne TZ menée au zénit.

1624. La distance apparente ZOH est plus grande que la distance vraie ZTH; car dans le triangle rectiligne HTO, dont le côté TO est prolongé en Z, l'angle extérieur ZOH est égal aux deux intérieurs T et H; donc il est plus grand que l'angle T de la quantité de l'angle H: ainsi la distance apparente au zénit est plus grande que la distance vraie ZTH. La différence de ces deux distances est l'angle OHT; il s'appelle la *parallaxe horizontale*, si la ligne OH est horizontale, comme nous l'avons supposé, c'est-à-dire, si le lieu apparent de l'astre qu'on observe, est sur l'*horizon apparent* OH, qui est marqué par la tangente menée au point O de la surface terrestre. Dans le triangle TOH rectangle en O, on a cette proportion en prenant l'unité pour rayon ou sinus total; 1 : sin. OHT : : TH : OT; donc le sinus de la parallaxe horizontale est égal à $\frac{OT}{TH}$, c'est-à-dire que le rayon de la Terre, divisé par la distance de l'astre, donne une fraction (3798) qui, dans les tables des sinus, indique la parallaxe.

1625. La parallaxe d'un astre est donc l'angle formé au centre de l'astre par deux rayons, dont l'un va au centre de la Terre, et l'autre au point de la surface où est l'observateur; c'est l'inclinaison des deux lignes qui partent du centre et de la surface, pour aller se réunir au centre de la planete; enfin, c'est aussi l'angle sous lequel paroît le rayon de la Terre, ou la distance de l'observateur au centre de la Terre, lorsque cette distance ou ce rayon sont supposés vus du centre de la planete perpendiculairement, et c'est ainsi que nous l'avons déja considérée (1396).

1626. Le triangle TOH s'appelle *triangle parallactique*; il est toujours situé verticalement, puisque le côté OT étant une ligne verticale, le plan du triangle fait sur OT ne sauroit être incliné; ainsi tout l'effet de la parallaxe se fait de haut en bas, dans le plan d'un

cercle vertical : d'ailleurs il est aisé de comprendre que le centre de la Terre étant perpendiculairement sous nos pieds [a], c'est-à-dire, dans le plan de tous les cercles *verticaux*, l'effet de la parallaxe ne peut pas s'écarter de ces cercles ; ainsi la parallaxe est toute en hauteur, c'est-à-dire qu'elle abaisse les astres du haut en bas, et dans un vertical, sans faire paroître l'astre à droite ni à gauche du vertical. De là il suit que la parallaxe ne change point l'azimut d'une planete. De même dans le méridien la parallaxe ne change point l'ascension droite d'un astre, parceque le vertical est alors perpendiculaire à l'équateur, et que tous les points du vertical répondent au même point de l'équateur.

1627. Jusqu'ici nous n'avons parlé de parallaxe que pour le cas où l'astre est à l'horizon, c'est-à-dire, où l'angle ZOH est un angle droit; et nous avons appellé *parallaxe horizontale* celle qui a lieu dans ce cas-là (1624) : si la planete L se trouve plus près du zenit, en sorte que l'angle ZOL, distance de la planete au zénit, soit un angle aigu, l'angle de la parallaxe OLT deviendra plus petit; on l'appelle alors *parallaxe de hauteur.*

1628. THÉORÊME. *Le sinus total est au sinus de la distance apparente au zénit, comme le sinus de la parallaxe horizontale est au sinus de la parallaxe de hauteur;* en supposant que la distance de la planete au centre de la Terre soit la même dans les deux cas, et que la Terre soit sphérique.

DÉMONSTRATION. Dans le triangle rectangle HOT on a cette proportion, HT est à TO comme le sinus de l'angle droit O est au sinus de l'angle THO, parceque dans tout triangle rectiligne les côtés sont comme les sinus des angles opposés. Dans le triangle TOL on a de même cette proportion, TL est à TO comme le sinus de l'angle LOT est au sinus de l'angle TLO. Dans cette derniere proportion on peut mettre, au lieu de TL, son égale HT, puisque la planete est supposée toujours à même distance du centre de la Terre; ainsi l'on a ces deux proportions, en nommant R le rayon ou le sinus de l'angle droit :

$$\left.\begin{array}{l} HT : TO :: R : \text{sin. } H; \\ HT : TO :: \text{sin. } LOT : \text{sin. } L; \end{array}\right\} \text{donc } R : \text{sin. } LOT :: \text{sin. } H : \text{sin. } L.$$

Mais le sinus de l'angle obtus LOT est le même que celui de l'angle LOZ, ou de la distance apparente de la planete au zénit; donc le rayon est au sinus de la distance apparente au zénit, comme le sinus

(a) On considere ici la Terre comme une sphere; son aplatissement change quelque chose à la situation du centre, par rapport au vertical (1686)

de la parallaxe horizontale H est au sinus de la parallaxe de hauteur L.

Le sinus de la distance apparente au zénit est la même chose que le cosinus de la hauteur apparente, et le rayon est toujours supposé être l'unité; ainsi 1 : cosin. haut. :: sin. par. horiz. : sin. parall. de hauteur; donc *le sinus de la parallaxe de hauteur est égal au sinus de la parallaxe horizontale multiplié par le cosinus de la hauteur apparente.*

1629. La parallaxe horizontale de la Lune, qui est la plus grande de toutes les parallaxes des planetes, ne va qu'à un degré environ; or entre le sinus d'un degré, et l'arc d'un degré, la différence est à peine de la valeur d'un quart ou cinquieme de seconde (3464): ainsi l'on peut prendre l'arc pour le sinus, et dire en général que *la parallaxe de hauteur est égale à la parallaxe horizontale multipliée par le cosinus de la hauteur apparente.* C'est ainsi que j'énoncerai toujours à l'avenir le théorême général de la parallaxe de hauteur, dont je ferai un usage fréquent; et nommant p la parallaxe horizontale, et h la hauteur apparente, je supposerai toujours la parallaxe de hauteur $= p.$ cos. h.

1630. La parallaxe est nulle quand l'astre paroît au zénit; nous l'avons déja observé (1621), et cela se déduit encore de la valeur que nous venons de trouver; car si la distance au zénit est nulle, son sinus est égal à zéro, et la parallaxe de hauteur étant le produit de zéro par la parallaxe horizontale sera aussi égale à zéro. Au contraire la parallaxe est plus grande à l'horizon que dans tout autre cas, ou à toute autre élévation; car le cosinus de la hauteur ne sauroit être plus grand que le sinus de 90°, ou le cosinus de zéro: donc le produit de la parallaxe horizontale par le cosinus de la hauteur apparente, qui forme la parallaxe de hauteur, ne sauroit être plus grand que lorsque la planete paroît à l'horizon.

Dans le cas même où elle seroit à l'horizon réel, c'est-à-dire, où l'angle OTH seroit droit, l'angle TOH étant aigu, le sinus de TOH seroit plus petit que le rayon, et la parallaxe seroit plus petite que lorsque l'angle TOH étoit droit, c'est-à-dire, lorsque la ligne OH du lieu apparent, vu de la surface de la Terre, étoit dans l'horizon; car la distance de la planete au centre de la Terre seroit le côté du triangle, au lieu d'en être l'hypoténuse: le triangle seroit donc plus long qu'auparavant, et l'angle plus petit.

D'ailleurs on voit que la perpendiculaire sur TO, qui seroit égale à HT, dans le dernier cas étant plus longue que HO, le rayon TO paroîtroit sous un plus petit angle que quand l'angle O est droit,

et que la distance perpendiculaire est plus petite. De même quand le triangle HOT est isoscele, l'angle H est toujours plus petit que la parallaxe horizontale, parceque la perpendiculaire, abaissée de H sur TO, est alors plus longue que HO; il y a dans ce cas-là un septieme de seconde, dont la parallaxe de la Lune est moindre que la parallaxe horizontale H.

1631. La parallaxe horizontale d'un astre est d'autant plus petite, que sa distance est plus grande; car plus le point H se rapprochera du point O, plus l'angle THO augmentera. Dans le triangle THO on a cette proportion, TH : TO :: R : sin. THO; ainsi le sinus de la parallaxe est $\frac{TO}{TH}$: si l'on double TH, la valeur totale diminuera de moitié; et plus on augmentera la distance TH, plus cette fraction diminuera; donc le sinus de la parallaxe est en raison inverse de la distance. Ce qui est rigoureusement vrai pour le sinus l'est sensiblement pour la parallaxe elle-même, puisqu'elle differe très peu de son sinus; donc la parallaxe est en raison inverse de la distance de la planete à la Terre.

1632. La même démonstration auroit lieu, quel que fût l'angle TOH, par exemple au point N, pourvu que les points N et H soient sur une même ligne ONH; ainsi lorsque la hauteur apparente est supposée la même, les parallaxes de hauteur sont en raison inverse des distances. D'ailleurs la parallaxe étant $\frac{TO}{TH}$ cos. haut., on voit qu'elle est également en raison inverse de TH.

1633. La parallaxe horizontale d'un astre, et même la parallaxe de hauteur, augmente dans le même rapport que son diametre apparent. En effet, lorsqu'un astre s'éloigne, il diminue de grandeur apparente dans la proportion inverse de sa distance (1384) : mais sa parallaxe horizontale diminue de la même maniere, et dans le même rapport (1631); ainsi la parallaxe d'un astre est toujours comme son diametre : si ce diametre apparent diminue de moitié par l'éloignement de la planete, la parallaxe diminuera aussi de moitié; et le même rapport subsistera toujours entre le diametre apparent et la parallaxe horizontale d'un astre, quelle que soit sa distance.

Exemple. La parallaxe de Vénus a été observée, le 6 juin 1761, d'environ 30″, et son diametre paroissoit alors de 58″; on sera donc toujours assuré que le diametre de Vénus est à peu près double de sa parallaxe [a] : quand le diametre paroîtra de 29″, la parallaxe sera

(a) Plus exactement 1,924.

de 15, et il suffira en tout temps d'observer le diametre pour pouvoir en conclure la parallaxe.

1634. Lorsqu'on connoît la parallaxe horizontale d'un astre, il est aisé de connoître sa distance. En effet, dans le triangle rectangle THO, l'on connoît le demi-diametre de la Terre TO, qui est de 1432 lieues (chacune de 2283 toises), et l'angle HOT, qui est de 90°, puisqu'on suppose la planete dans l'horizon; si donc on connoît de plus l'angle THO, qui est la parallaxe horizontale, il sera aisé de résoudre le triangle TOH, et de connoître la distance TH; c'est ainsi qu'on a trouvé les distances des planetes en lieues (1398).

Méthodes pour trouver la parallaxe horizontale d'une planete.

1635. Les astronomes ont travaillé dans tous les temps à connoître les distances des planetes par le moyen de leurs parallaxes, et sur-tout la parallaxe de la Lune qui est la plus sensible. Les éclipses de Lune fournissent une méthode qui pouvoit être assez bonne autrefois pour trouver à-peu-près la parallaxe de la Lune. Je suppose qu'on observe à un instant précis la hauteur apparente du centre de la Lune, dans le temps du milieu d'une éclipse : on calculera pour le même temps la distance du Soleil au zénit, et son abaissement, ou sa dépression au-dessous de l'horizon (1036); l'on aura la hauteur du centre de l'ombre, qui est toujours égale à la dépression du Soleil : par le moyen de cette hauteur du centre de l'ombre, et de la latitude de la Lune, au temps du milieu de l'éclipse, que je suppose connu, on peut trouver la hauteur vraie du centre de la Lune; et cette hauteur vraie, comparée avec la hauteur apparente observée, donneroit la parallaxe de hauteur. On la trouveroit, indépendamment de la latitude et de la hauteur, en observant une éclipse qui seroit centrale, ou à-peu-près; car la durée de l'éclipse donneroit la somme des diametres de la Lune et de l'ombre, d'où il seroit aisé de conclure la parallaxe (1752).

1636. Halley, dans son catalogue des étoiles australes, publié en 1679, employoit d'une autre maniere les éclipses de Lune; il cherchoit le diametre de l'ombre par le moyen de la grandeur de l'éclipse et de sa durée : il étoit persuadé qu'en faisant ces observations avec beaucoup d'exactitude, on trouveroit aussi exactement que par toute autre méthode la parallaxe de la Lune. Mais ces méthodes sont insuffisantes actuellement.

1637. Il n'y a guere que trois méthodes suffisamment exactes

pour trouver la parallaxe : la méthode des plus grandes latitudes, celle des parallaxes d'ascension droite, et celle des différences de déclinaison, déterminées en même temps par des observateurs fort éloignés; elles ont chacune leur avantage, et nous les expliquerons séparément.

Premiere méthode. Ptolémée employa autrefois les plus grandes latitudes de la Lune, observées au nord et au midi de l'écliptique, pour reconnoître la quantité de la parallaxe (*Almag. lib. V, c.* 13); Tycho Brahé s'en servit également (*Progym. pag.* 463); Halley la proposoit de nouveau en 1679; enfin elle a été employée par M. le Monnier (1659).

1638. Supposons qu'un observateur soit situé vers 28° ½ de latitude terrestre septentrionale, et qu'il observe la Lune passer à son zénit, lorsqu'elle a 28° ½ de déclinaison boréale, et qu'elle est dans sa plus grande latitude à 5° au nord de l'écliptique. Quinze jours après, la Lune étant dans la partie opposée du ciel, et dans sa plus grande latitude australe, à 5° au-dessous de l'écliptique, elle doit être éloignée du zénit de 57°, puisqu'elle est à 28° ½ de l'équateur vers le midi, comme dans le premier cas elle étoit à 28° ½ vers le nord. La parallaxe ne changeoit rien à la premiere distance de la Lune à l'équateur, parceque la Lune étoit alors au zénit : mais la seconde distance doit paroître augmentée sensiblement par l'effet de la parallaxe, qui est considérable à 57° du zénit; ainsi tout l'effet de la parallaxe conspire à augmenter la latitude méridionale de la Lune, et à la faire paroître plus grande que la latitude septentrionale. Au lieu de 5°, elle paroîtra de 5° 50′ au moins; car si la parallaxe horizontale est d'un degré, elle doit être de 50′ à 57° du zénit (1629); si l'on trouve plus de 50′ d'excès dans cette latitude australe, ce sera une preuve que la parallaxe horizontale est plus grande qu'un degré.

Ainsi les plus grandes latitudes de la Lune, qui doivent être égales par rapport au centre de la Terre, paroissent différentes quand on les voit de la surface, la latitude méridionale étant toujours plus grande que l'autre, parceque la Lune est abaissée vers le midi par l'effet de la parallaxe, quand elle est dans sa plus grande latitude méridionale; et cette différence des deux latitudes observées nous fait connoître la parallaxe entiere qui auroit lieu à l'horizon.

1639. On peut employer cette méthode, même dans les lieux où la Lune n'est jamais au zénit; car ayant la différence des latitudes apparentes, qui est la somme des deux parallaxes de latitude, si l'une des latitudes est australe, et l'autre boréale, ou bien ayant la différence

différence des parallaxes de hauteur, à deux hauteurs connues, il sera aisé d'avoir la parallaxe horizontale. Soit P la plus grande parallaxe de hauteur, p la plus petite, Z la plus grande distance au zénit, z la plus petite, $P : p :: \sin. Z : \sin. z$, donc $P - p : p :: \sin. Z - \sin. z : \sin. z$; et $p = \frac{(P-p) \sin. z}{\sin. Z - \sin. z}$, ou $\frac{(P-p) \sin. z}{2 \sin. \frac{Z-z}{2} . \cos. \frac{Z+z}{2}}$ (3835): ainsi connoîssant la différence de deux parallaxes, il est aisé de trouver chacune séparément. Si l'on connoissoit leur somme, on auroit le signe + dans la premiere expression, et dans la seconde $\frac{(P+p) \sin. z}{2 \sin. \frac{Z+z}{2} \cos. \frac{Z-z}{2}}$.

1640. Quand on a observé la Lune dans deux temps aussi différens, on trouve nécessairement que la Lune est plus ou moins éloignée de la Terre, et qu'elle a une latitude plus ou moins grande dans une des deux observations que dans l'autre; on est obligé de tenir compte de la différence, en corrigeant une des deux observations, pour réduire la latitude à celle qu'on auroit observée, si la distance au nœud, et la parallaxe horizontale, eussent été précisément les mêmes dans les deux observations.

Pour tenir compte de l'aplatissement de la Terre dans cette méthode, il ne faut que corriger la parallaxe de hauteur, ou la distance au zénit, de la maniere qui sera indiquée ci-après (1686); et, pour avoir la parallaxe sous l'équateur, diviser la parallaxe horizontale trouvée par le rayon de la Terre au lieu donné, celui de l'équateur étant 1.

1641. LA SECONDE MÉTHODE qu'on a employée utilement pour déterminer les parallaxes, est celle des ascensions droites; elle est moins ancienne, mais elle n'est ni moins belle ni moins utile que celle des plus grandes latitudes : nous verrons qu'elle a servi à déterminer la parallaxe de Mars, et par conséquent celle du Soleil, pour la premiere fois, avec quelque précision (1719); et M. Maskelyne l'employa en 1761 à l'isle de Sainte-Hélene, même pour la Lune, malgré l'irrégularité et la vîtesse de son mouvement (*Philos. Trans.* 1764).

La méthode qui détermine les parallaxes par les ascensions droites, a sa premiere origine dans l'ouvrage de Regiomontanus, intitulé, *De cometae magnitudine longitudineque, ac de loco ejus vero, problemata XVI;* je crois ce livre imprimé en 1544, mais l'auteur étoit mort dès l'an 1476. Sa méthode est un peu compliquée; mais elle se réduit néanmoins à trouver la parallaxe de hauteur, par le moyen de la différence des temps écoulés entre deux observations.

Cette méthode fut donnée ensuite par Diggesens, ou *Digges*, auteur anglois, qui publia en 1573 un ouvrage intitulé, *Ala, seu Scala mathematica*, à l'occasion de la nouvelle étoile de Cassiopée qui parut en 1572. On trouve encore cette méthode dans la Science des longitudes de Morin, dans les Ephémérides de Képler pour l'année 1619; dans Hévélius, qui en fait un usage fréquent; dans Cassini, *Traité de la comete de* 1681; et dans l'Histoire céleste de Flamsteed, à l'occasion de Mars qui fut observé par tous les astronomes en 1672.

Pour expliquer cette méthode, je commencerai par le cas le plus simple, ce qui rendra la méthode plus claire, et les démonstrations plus aisées. Je suppose un observateur situé sous la ligne équinoxiale, observant une planete située aussi dans l'équateur; il la verra se lever, passer à son zénit, et ensuite descendre perpendiculairement à l'horizon; la parallaxe de hauteur sera tout entiere dans l'équateur, puisque l'équateur et le vertical de la Lune sont alors confondus l'un avec l'autre. Il suffiroit alors d'observer, par exemple, l'heure et la minute du lever et du coucher apparens de la Lune en A et en B (*fig.* 95); on verroit le lever trop tard, et le coucher trop tôt d'environ 4 minutes qu'il lui faut pour aller de D en A, et de B en F; ainsi la Lune seroit sur l'horizon AOB, 16 minutes moins long-temps que sous l'horizon, ce qui indiqueroit un degré pour l'arc BF, ou pour la parallaxe horizontale de la Lune. Son changement en déclinaison, et l'obliquité de la sphere, rendent cette méthode plus compliquée : mais il suffit d'observer l'ascension droite d'une planete à son lever et à son coucher; on aura la premiere trop grande, et la seconde trop petite, et l'on en déduira la valeur de la parallaxe, comme nous allons l'expliquer.

1642. Soit Z le zénit (*fig.* 90), P le pole du monde, EQ l'équateur, LMN le parallele de l'astre, M le lieu vrai, et *m* le lieu apparent, qui est plus bas que le vrai lieu M, dans le vertical ZM*m*T; si du pole P l'on tire deux cercles de déclinaison PMV, et P*mu*, l'un par le lieu vrai de l'astre M, l'autre par son lieu apparent *m*, la différence de ces deux cercles de déclinaison, l'angle MP*m* qu'ils font entre eux au pole du monde, ou l'arc de l'équateur V*u*, qui en est la mesure, sera la parallaxe d'ascension droite; or, dans le triangle PM*m*, si l'on connoît l'angle P, il ne sera pas difficile, comme nous le ferons voir, de trouver le côté opposé M*m* : ainsi de la parallaxe d'ascension droite, observée dans un temps ou dans un lieu quelconque, on déduira facilement la parallaxe de hauteur.

La question se réduit donc à observer la parallaxe d'ascension

droite, ce qui se fait de la maniere suivante : lorsqu'une planete passe dans le méridien, et que la parallaxe est nulle en ascension droite (1626), on observe la différence entre le temps du passage de la planete et celui d'une étoile au fil d'une lunette ; cet intervalle de temps, converti en degrés, à raison de 15 degrés par heure, ou de 15″ de degré pour 1″ d'heure, donne la différence d'ascension droite entre l'étoile et la planete (88, 2505).

Six heures après le passage au méridien, on observe encore la même différence de passages au fil de la lunette, et l'on en conclut la différence d'ascension droite; mais la parallaxe diminue l'ascension droite de la planete, lorsqu'elle est vers le couchant, en l'abaissant et la faisant paroître plus à l'occident, tandis que la parallaxe ne change rien à l'ascension droite de l'étoile (2807); ainsi la différence des ascensions droites ne sera plus la même que celle qu'on avoit observée dans le méridien, elle sera plus ou moins grande de toute la parallaxe d'ascension droite.

1643. Nous supposons, à la vérité, que le lieu vrai de la planete soit exactement à la même distance de l'étoile dans chacune des deux observations; c'est-à-dire, que la parallaxe soit la seule cause de la différence qu'on aura trouvée entre la premiere et la seconde observation, et que la planete n'ait eu aucun mouvement propre; mais il est aisé de corriger cette supposition : on observera deux jours de suite, au méridien, ou l'on calculera par les tables, la différence vraie d'ascension droite entre la planete et l'étoile ; on trouvera de combien elle varie d'un jour à l'autre, et par conséquent de combien elle avoit dû augmenter en 6 heures par le mouvement propre de la planete, et indépendamment des apparences de la parallaxe ; si l'observation a donné une différence plus grande que celle qu'on trouve par le calcul, elle sera l'effet de la parallaxe d'ascension droite, et l'on séparera cet effet d'avec celui du vrai mouvement de la planete.

1644. Pour conclure facilement la parallaxe horizontale de la parallaxe d'ascension droite, observée à une certaine distance du méridien, on peut se servir de cette expression générale, le sinus de la parallaxe horizontale $= \frac{\text{sin. par. asc. dr. cos. déclin. vraie}}{\text{sin. angle hor. app. cos. haut. du pole}}$.

DÉMONSTRATION. Suivant la proportion la plus simple de la trigonométrie sphérique, le triangle MPm donne sin. PM : sin. m : : sin. Mm : sin. MP$m = \frac{\text{sin. M}m\text{. sin. }m}{\text{sin. PM}}$; mais dans le triangle ZPm, sin. Z m : sin. ZPm : : sin. PZ : sin. $m = \frac{\text{sin. PZ. sin. ZP}m}{\text{sin. Z}m}$; donc, en

substituant cette valeur, on a sin. $MPm = \frac{\text{sin. } Mm \text{. sin. } PZ \text{. sin. } ZPm}{\text{sin. } Zm \text{ sin. } PM}$ $= \frac{\text{sin. parall. hor. sin. } PZ \text{. sin. } ZPm}{\text{sin. } PM}$; c'est la parallaxe d'ascension droite, dont nous ferons usage (1648); donc sinus parallaxe horizont. $= \frac{\text{sin. parall d'asc. dr cos. déclin. vraie}}{\text{sin. angle hor. appar. cos. haut. du pole}}$.

Cette formule suppose la Terre sphérique. Pour tenir compte de l'aplatissement (1686), il faut diminuer la hauteur du pole de l'angle de la verticale (1653); et l'on aura la parallaxe horizontale pour le lieu de l'observation; on la divisera par le rayon de la Terre pour avoir la parallaxe horizontale sous l'équateur.

Si cette méthode étoit employée sous l'équateur, elle donneroit immédiatement, et sans aucune hypothese, la parallaxe de la Lune pour le rayon de l'équateur, malgré l'aplatissement de la Terre. Il faut bien remarquer dans l'expression précédente que c'est la déclinaison vraie, et l'angle horaire apparent que l'on doit employer. Cette formule revient au même que la proportion donnée par Cassini, dans ses Elémens d'astronomie (*pag.* 27); mais la mienne est plus rigoureuse.

1645. On a besoin de la parallaxe d'ascension droite, aux environs du méridien, pour corriger des différences de passages entre la Lune et les étoiles, qui ne sont pas observées précisément au méridien, ou dans le fil du milieu d'une lunette méridienne (2387). Soit P le pole (*fig.* 215), Z le zénit, C le lieu vrai de la Lune, F son lieu apparent dans le vertical; l'arc EF est égal à la parallaxe d'ascension droite sur le parallele de la Lune, ou dans la région de la Lune, puisque c'est la différence entre l'ascension droite vraie, qui est marquée par le cercle horaire PCE, et l'ascension droite apparente qui répond au point F du parallele de la Lune. Or dans le triangle sphérique PCZ on a sin. $C = \frac{\text{sin. } P \text{. sin. } PZ}{\text{sin. } ZC}$, la parallaxe de hauteur $CF = p \text{. sin. } ZC$, $EF = CF \text{ sin. } C = p \text{. sin. } P \text{ sin. } PZ$; cette quantité, réduite à l'équateur (3877), et convertie en temps, est $\frac{p \text{. sin. } P \text{. sin. } PZ}{15 \text{ sin. } PC}$, en négligeant le retardement; c'est ce qu'il faut ajouter au passage de la Lune observé au fil horaire de la lunette, que je suppose sur PCE, s'il est après le vrai méridien PZH, puisqu'alors la parallaxe fait paroître la Lune trop à l'occident. Cette quantité revient au même que la formule de la parallaxe d'ascension droite; on en trouve des tables dans les Ephémérides de Vienne pour 1770.

1646. La PARALLAXE DE DÉCLINAISON Am (FIG. 90), est égale à p.

sin. Zm. cos. m, c'est-à-dire, à la parallaxe horizontale, multipliée par le cosinus de la hauteur apparente, et par celui de l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison. On verra ci-après le moyen d'éliminer l'angle m (1668). Cette formule n'est qu'une approximation.

1647. Lorsque la planete a été observée à égales distances, avant et après le méridien, on a une différence double de la parallaxe d'ascension droite, ou de la parallaxe horaire; et si les distances ne sont pas égales, on a une différence qui est la somme de deux parallaxes d'ascension droite, chacune proportionnelle au sinus de son angle horaire; comme on le voit par la formule précédente. Pour en conclure la parallaxe horizontale, il faut diviser cette différence, trouvée entre les observations, par la somme des sinus des angles horaires, ou, ce qui revient au même, l'on peut diviser la différence observée, qui est l'argument de la parallaxe, en deux parties, qui soient entre elles comme les sinus des angles horaires, ou des distances au méridien dans les deux observations, et n'employer dans la formule précédente qu'une de ces parties avec son angle horaire, pour trouver la parallaxe horizontale.

Il suffit d'observer un astre deux heures avant et deux heures après le passage au méridien, pour trouver, dans l'ascension droite d'une planete, une différence égale à sa plus grande parallaxe d'ascension droite; car elle est comme le sinus de l'angle horaire : or le sinus de la distance au méridien, qui répond à deux heures de temps, étant la moitié du rayon, on a de chaque côté du méridien une parallaxe qui est la moitié de la plus grande parallaxe d'ascension droite.

1648. Je prendrai pour exemple de cette méthode les observations de Jacques-Phil. Maraldi (*Mém.* 1722). Le 15 août 1719, Mars étant fort près d'une étoile de cinquieme grandeur, qui est à la jambe orientale du Verseau, Maraldi dirigea le fil d'une lunette de 12 pieds, suivant le parallele de l'étoile : à $9^h\ 18'$ du soir, Mars suivoit l'étoile de $10'\ 17''$ de temps; et $7^h\ 3'$ après, ou le 16, à $4^h\ 21'$ du matin, il la suivoit seulement de $10'\ 1''$. Mais, suivant les observations faites au méridien plusieurs jours de suite, Mars devoit se rapprocher réellement de l'étoile de $14''$ de temps, c'est-à-dire, qu'après l'avoir suivie de $10'\ 17''$ de temps, il auroit dû, 7^h après, en être éloigné de $10'\ 3''$, au lieu de $10'\ 1''$ que donna l'observation; donc il y avoit $2''$ de temps pour l'effet, et pour l'argument de la parallaxe : ces $2''$ doivent être réduites en parties de l'équateur, multipliées par le cosinus de la déclinaison, qui étoit de 15°, divisées par le cosinus de la latitude de Paris, ou par le sinus de 41° 10', et

par la somme des sinus des angles horaires, ou des distances au méridien, qui étoient de 49° 15′ et de 56° 39′; et l'on trouve 27″ ½ pour la parallaxe horizontale de Mars; d'où il résulte 10″ ⅕ pour celle du Soleil, la distance de Mars à la Terre étant alors $\frac{37}{100}$ de celle du Soleil.

1649. Pour déterminer plus exactement la parallaxe d'ascension droite, il faudroit mesurer la distance de la planete à une étoile, avec plus de précision que par les passages, et par les intervalles de temps. M. le Monnier proposoit de placer la lunette avec son micrometre sur un héliostate (2468) qu'une horloge feroit mouvoir avec l'astre (*Instit. astron. pag.* 434).

La difficulté qu'on trouvoit autrefois à mesurer la distance d'une planete à une étoile, et leur différence d'ascension droite, à cause du mouvement diurne, est aussi levée aujourd'hui par l'usage des héliometres (2439) qui font le même effet que l'héliostate; on a l'avantage, dans un héliometre, de mesurer la distance de la planete et de l'étoile, avec la même facilité que si l'une et l'autre étoient immobiles : mais il faut que les deux astres soient à-peu-près dans le même parallele.

Quoiqu'il soit difficile par la méthode ordinaire de s'assurer d'une seconde de temps, sur la différence d'ascension droite qu'on aura observée une fois, il est probable que si l'on répete plusieurs fois la même observation, l'on pourra s'assurer d'une demi-seconde, et même d'un tiers de seconde, qui répond à 5″ de degré. On a soin ensuite de doubler l'effet de la parallaxe, en observant la différence d'ascension droite à l'orient et à l'occident du méridien (1648), et l'on parvient à une exactitude de 2″ ou 3″ sur la parallaxe de la planete qu'on observe; aussi voyons-nous que par cette méthode on étoit parvenu à connoître la parallaxe horizontale du Soleil, à une seconde près (1741).

1650. LA TROISIEME MÉTHODE pour déterminer la parallaxe, est celle qui suppose deux observateurs très éloignés l'un de l'autre, observant tout à la fois la hauteur d'un astre dans le méridien; c'est la plus naturelle et la plus exacte, c'est celle que j'ai employée en 1751 lorsque la Caille étoit au cap de Bonne-Espérance, et que j'observois la Lune à Berlin, pour trouver sa parallaxe, qui n'avoit jamais été déterminée par une méthode aussi exacte (*Mém. de l'acad.* 1751).

Le cas le plus simple de cette méthode est celui où l'on auroit un observateur en O (*fig.* 87), et un autre en D, qui seroit éloigné du premier de la quantité OD, égale à-peu-près à un quart de la Terre:

le premier, étant en O, observeroit un astre H à l'horizon; le second, étant en D, l'observeroit à son zénit; dans ce cas, l'angle OHT, qui est la parallaxe horizontale, seroit égal à l'angle HTE, ou au complément de l'arc OD, qui est la distance des deux observateurs, ou la différence de leurs latitudes; car je les suppose placés sous le même méridien.

Il est impossible que les circonstances locales nous donnent dans la pratique un cas aussi simple que celui-là; ainsi nous allons voir ce qui arrive quand les deux observateurs sont à une distance quelconque, et que l'astre leur paroît à des hauteurs quelconques.

1651. Supposons, comme en 1751, un observateur B (*fig.* 91) situé à Berlin, et un autre en C, au cap de Bonne-Espérance; L, la Lune que nous observions tous deux en même temps dans le méridien (il n'importe que ce soit précisément au même instant, pourvu qu'on sache de combien a dû varier la hauteur méridienne, dans l'intervalle des deux passages) : CLT est la parallaxe de hauteur pour le cap, BLT est la parallaxe de hauteur à Berlin (1627); la somme de ces deux parallaxes est l'angle CLB, argument total de la parallaxe horizontale : ce seroit leur différence, si les observateurs voyoient tous deux l'astre au midi, ou tous les deux au nord. De ces deux parallaxes de hauteur, la premiere BLT est égale à la parallaxe horizontale, multipliée par le cosinus de la hauteur apparente à Berlin, ou par le sinus de la distance apparente au zénit, qui est l'angle LBA (1628); la seconde parallaxe CLT est égale à la parallaxe horizontale, multipliée par le sinus de la distance LCD au zénit du cap; donc la somme BLC, qui est la parallaxe totale des deux observateurs, est égale à la parallaxe horizontale, multipliée par la somme des deux sinus des distances observées; donc on aura la parallaxe horizontale, en divisant l'angle BLC qu'on a déduit de l'observation, ou l'argument de la parallaxe, par la somme des sinus des distances au zénit, comme on le verra dans l'exemple suivant.

1652. Cette méthode fut aussi employée pour déterminer la parallaxe du Soleil par le moyen de celles de Mars et de Vénus. Le 5 octobre 1751, le bord boréal de Mars paroissoit à 1′ 25″8 au-dessous du parallele de l'étoile λ du Verseau, au cap de Bonne-Espérance, 33° 55′ au midi de l'équateur, Mars étant à 25° 0′ du zénit. Le même jour, à Stockholm qui est à 59° 21′ de latitude septentrionale, la même différence de déclinaison entre le bord boréal de Mars, et l'étoile λ du Verseau, paroissoit de 1′ 57″7, et Mars étoit à 68° 14′ du zénit; ces deux différences de déclinaison, qui devroient être égales, different l'une de l'autre de 31″9. Si l'on divise cette

différence, égale à l'angle BLC, par la somme des sinus des distances au zénit, qui sont 0, 4226, et 0, 9287, ou par 1, 3513, l'on aura 23″6, parallaxe horizontale de Mars (La Caille, *Leçons d'astr.*).

1653. L'opération précédente suppose la Terre parfaitement sphérique; mais lorsqu'il s'agit de la parallaxe de la Lune, on ne sauroit négliger l'aplatissement de la Terre : il faut alors diminuer de quelques minutes les deux distances au zénit observées (en supposant que le zénit soit entre la Lune et le pole élevé), et multiplier le sinus de chacune par le rayon correspondant de la Terre, avant que d'employer la regle précédente.

L'ellipse BECP (*fig.* 92) représente une moitié du sphéroïde terrestre : T est le centre, TP est l'axe de la Terre, E l'équateur, B et C sont les deux observateurs que je suppose placés sous le même méridien, et observant à la fois la Lune en L : ZBM, zCN sont les perpendiculaires à la surface de l'ellipse, c'est-à-dire, les lignes verticales ou perpendiculaires à l'horizon en B et en C (2672); l'angle LBZ est la distance apparente de la Lune au zénit pour l'observateur B, LCz est la distance apparente pour l'observateur C. On calculera les angles MBT, NCT, formés par les perpendiculaires à la surface de la Terre, en B et en C, et par les rayons BT et CT, menés au centre de la Terre (2691); on les retranchera des distances au zénit, et l'on aura les angles LCD, LBA, ou les distances corrigées, dont on fera à-peu-près le même usage que nous avons fait ci-devant des distances au zénit dans la Terre sphérique (1651). Puisque TB : TL :: sin. TLB : sin. TBL, ou ABL, on aura, lorsque l'angle B sera droit, $\frac{TB}{TL}$ égal au sinus de la parallaxe horizontale à Berlin (1624); de même $\frac{TC}{TL}$ est le sinus de la parallaxe horizontale au point C; ainsi le sinus de la somme, ou de l'angle BLC, est égal à la somme des sinus des deux parties BLT, CLT, qui sont les parallaxes de hauteur pour chaque station, c'est-à-dire, $= \frac{TC}{TL}$ sin. LCD $+ \frac{TB}{TL}$ sin. LBA (3809), en supposant le cosinus de chaque parallaxe égal à l'unité; donc la distance $TL = \frac{TC \text{ sin. } LCD + TB . \text{ sin. } LBA}{\text{sin. } BLC}$; et le sinus de la parallaxe horizontale dans un autre lieu quelconque, comme E, dont on connoîtra la distance au centre de la Terre, sera égal à $\frac{TE}{TL}$, ou égal au rayon de la Terre multiplié par $\frac{\text{sin. } BLC}{TC \text{ sin. } LCD + TB . \text{ sin. } LBA}$. Dans cette formule on fait usage des deux

rayons

rayons de la Terre TB et T C dont on trouvera la valeur dans les tables, et le calcul, *art.* 2693.

1654. Nous remarquerons ici que, quand la Lune est au méridien, la parallaxe de hauteur, même dans le sphéroïde aplati, est exactement proportionnelle au sinus de la distance au zénit LBZ, diminuée de la valeur de l'angle MBT, ou ABZ, c'est-à-dire, au sinus de l'angle LBA, ou de l'angle LBT; cela est évident par la considération seule du triangle LBT (1692). Nous ferons usage de cette considération (4141).

Ces trois méthodes, qui servent à trouver en général la parallaxe d'un astre, sont applicables à tous les astres, et spécialement au Soleil et à la Lune; mais il y a des méthodes particulieres à ces deux astres : telles sont pour la Lune la méthode des éclipses (1635), pour le Soleil la méthode des quadratures de la Lune (1708), et celle des passages de Vénus sur le Soleil, qui est la meilleure de toutes (1725). L'importance des parallaxes du Soleil et de la Lune, la multitude des tentatives qu'on a faites pour les bien connoître, et l'usage que nous en ferons dans le cours de cet ouvrage, exigent que nous en traitions séparément avec un certain détail.

Parallaxe de la Lune.

1655. Les anciens avoient une idée bien imparfaite des distances des planetes et de leurs parallaxes; quoique la Lune fût celle dont il étoit le plus facile de connoître l'éloignement, on la croyoit beaucoup plus près de nous qu'elle n'est réellement.

Pythagore jugeoit la distance de la Lune à la Terre de 126 mille stades (Pline, *Hist. nat. II*, 21); et comme le stade étoit d'environ 95 toises (2632), cette distance ne va pas à 6 mille lieues, au lieu de 86 mille que nous trouvons actuellement; d'où l'on peut juger qu'au temps de Pythagore, 500 ans avant Jésus-Christ, l'on n'avoit encore fait aucune observation propre à déterminer cette distance.

Hipparque, au rapport de Ptolémée (*Alm. V*, 11), avoit entrepris, par de certaines conjectures tirées des éclipses, de trouver les distances de la Lune à la Terre; mais, par la difficulté et l'incertitude de sa méthode, il avoit trouvé des différences considérables dans ses résultats. Cependant on voit qu'il jugeoit la plus grande distance de la Lune entre 72 $\frac{2}{3}$ et 83 demi-diametres de la Terre, et la plus petite entre 62 et 72. On sait aujourd'hui que la plus grande distance est de 64 rayons de la Terre, et la plus petite de 56; Hipparque avoit donc de la distance et de la parallaxe une idée beau-

coup plus exacte qu'on ne l'avoit eue avant lui : il n'y avoit qu'un sixieme de trop dans la moyenne distance qu'il donnoit à la Lune.

1656. La distance de la Lune, suivant Posidonius, contemporain de Pompée, étoit de deux millions de stades, *vicies centum millia stadiorum* [a] (Pline, *II*, 23); cette distance revient à 87165 lieues, et elle approche beaucoup de celle que nous trouvons aujourd'hui.

1657. Ptolémée observa la Lune par le moyen de ses regles parallactiques (2278), lorsqu'elle passoit fort loin du zénit, ou qu'elle étoit dans le tropique d'hiver, à 50° 55'; il trouva, par le moyen de ses tables, que, dans le temps de cette derniere observation, la Lune n'étoit véritablement qu'à 49° 49' du zénit; d'où il conclut une parallaxe de 67 minutes (*Almag. pag.* 115). Il trouva par ce moyen la plus grande distance de la Lune de 64 demi-diametres terrestres, et la plus petite de 34, c'est-à-dire la parallaxe entre 54' et 1° 43', au lieu de 53' $\frac{3}{4}$, et 61 $\frac{1}{2}$ que nous trouvons actuellement.

1658. Les Arabes ne corrigerent point les erreurs de Ptolémée en cette partie; mais, dans les tables faites sous Alphonse, roi de Castille, on diminua beaucoup cette parallaxe, et on la réduisit entre 53' et 63'. Copernic, par des observations faites en 1522, trouva les parallaxes entre 50' et 66'. Tycho ne trouva rien à changer à la plus grande parallaxe de Copernic; il se contenta d'augmenter la plus petite parallaxe jusqu'à 56' $\frac{3}{4}$.

On peut voir dans l'Almageste de Riccioli (*I*, 226), et dans un mémoire que j'ai donné sur la parallaxe de la Lune (*Mém.* 1752), les sentimens de différens auteurs sur la parallaxe : voici seulement la table des résultats les plus modernes.

NOMS DES AUTEURS.	La plus grande parallaxe.	La plus petite parallaxe.
Halley, en 1719,	61 7	53 29
Cassini, en 1740,	62 11	54 33
M. le Monnier, *Instit. astron.* 1746,	61 8	53 29
Suivant les tables de Mayer,	61 32	53 57
Suivant mes observations (1696),	61 26	53 46

(a) Ce nombre est celui qu'on lit dans l'édition du P. Hardouin; mais ce qu'il y a de singulier, c'est que le Pere Hardouin, dans sa note sur ces mots-là, suppose qu'il n'y ait point *millia*, mais seulement *vicies centum*, c'est-à-dire 2000 stades, puisqu'il l'évalue à 250 mille pas (le stade étoit de 125

1659. Comme la méthode des plus grandes latitudes de la Lune est une des plus avantageuses pour observer sa parallaxe, les astronomes ont continué d'en faire usage aussi bien que Ptolémée; M. le Monnier, en publiant les tables de la Lune de Flamsteed en 1746, observa que cet auteur, dans ses premieres tables publiées en 1680, avoit fait la parallaxe horizontale de la Lune, au temps de ses moyennes distances, et dans les syzygies, de 58′ 2″ ½, Newton de 57′ 30″; mais, par les plus grandes latitudes de la Lune observées depuis 7 à 8 ans, il l'avoit trouvée de 57′ 2″ ½ (*Instit. astr. pag.* 185). Pour moi je l'ai trouvée de 57′ 20″, et cela, par la meilleure de toutes les méthodes, c'est-à-dire, par les observations simultanées, faites, en 1752, au cap de Bonne-Espérance, et à Berlin, dont je donnerai le résultat ci-après (1696)[a].

1660. Il ne suffit pas, dans les calculs astronomiques, de connoître la parallaxe horizontale : il faut souvent en connoître l'effet en longitude; la plupart des auteurs qui ont écrit sur le calcul des éclipses de Soleil ont employé la parallaxe en longitude pour trouver le lieu apparent de la Lune. Quoiqu'on puisse s'en passer, comme je le ferai voir dans le livre suivant, je donnerai cependant ici la méthode la plus sûre de trouver la parallaxe en longitude et en latitude, avec un exemple détaillé.

La méthode employée par Képler est celle du Nonagésime: on appelle ainsi le point de l'écliptique, éloigné de 90° des deux sections de l'horizon et de l'écliptique, ou des points qui se levent et qui se couchent; ainsi la longitude du nonagésime est moindre de 90°, ou trois signes, que celle du point *ascendant*, ou du point orient de l'écliptique, c'est-à-dire, du point situé à l'horizon du côté de l'orient, du point de l'horoscope (1058).

Cette méthode du nonagésime est naturelle. En effet, puisque c'est la longitude de la Lune qu'on calcule, il est naturel de calculer aussi la parallaxe en longitude : or elle est nulle, si le vertical où se trouve la Lune, est perpendiculaire à l'écliptique, c'est-à-dire, si la

pas), tandis que *vicies centum millia stad.* signifie 250 000 000 pas; mais il est clair qu'il faut rejeter la note du P. Hardouin, et s'en tenir au texte, *vicies centum millia*, parceque Posidonius ne pouvoit pas supposer la Lune 2000 fois plus près de nous qu'elle n'est réellement, sur-tout les observations d'Hipparque ayant été faites avant lui. D'ailleurs les anciens ne se servoient jamais de l'expression *vicies centum* pour signifier simplement deux mille: mais l'expression *vicies centum millia* est celle des anciens auteurs pour exprimer deux millions, comme je l'ai remarqué (*Mém.* 1752, *pag.* 84).

(a) Nous indiquerons aussi une méthode qui a été employée pour trouver la parallaxe de la Lune, par la longueur du pendule à secondes (3643).

Lune répond au point de l'écliptique le plus élevé sur l'horizon, qui est le nonagésime; la parallaxe est alors toute en latitude, et elle est d'autant moindre que ce point de l'écliptique est plus haut. C'est donc ce nonagésime qui doit décider de l'effet de la parallaxe, tant en longitude qu'en latitude; plus il sera haut, plus la parallaxe de latitude sera petite; plus la Lune en sera proche, plus la parallaxe en longitude diminuera.

Soit le méridien HZEC (FIG. 93), l'horizon HOBC, l'écliptique ENRTO prise dans l'hémisphere oriental, E le point culminant de l'écliptique, c'est-à-dire, le point qui passe dans le méridien, et dont l'ascension droite est celle du milieu du ciel (1014). Le point O de l'écliptique est celui qui se leve au même instant; l'arc ON étant pris de 90°, le point N est le nonagésime. Si, par le pole P de l'écliptique, et par le zénit Z, on tire un cercle PZNB, il sera tout à la fois un cercle de latitude, puisqu'il passe par le pole de l'écliptique; et un vertical, puisqu'il passe par le zénit : il sera perpendiculaire à l'écliptique en N, et à l'horizon en B; l'arc NB sera la hauteur du nonagésime : mais parceque NO est un quart de cercle, et que l'angle N est droit, le point O est le pole de l'arc NB (3864), et l'angle NOB, qui a pour mesure l'arc NB, est aussi égal à la hauteur du nonagésime. Enfin l'arc PZ, compris entre le pole et le zénit, est encore égal à la hauteur du nonagésime; car si des arcs PN et ZB, qui sont chacun de 90°, l'on ôte la partie commune ZN, il restera PZ égal à NB, qui est la hauteur du nonagésime.

Si l'angle OEC est obtus, l'arc EO de l'écliptique sera aussi plus grand que 90°; c'est ce qui arrive quand le point E est dans les signes ascendans 9, 10, etc. ou que l'ascension droite du milieu du ciel est depuis zéro jusqu'à 6^h, et depuis 18^h jusques à 24^h ou 0^h : alors le nonagésime N est dans l'hémisphere oriental, comme dans la FIGURE 93; mais quand l'ascension droite du milieu du ciel est plus grande que 6^h, et moindre que 18, l'angle OEC est aigu, et l'arc EO moindre que 90°; le nonagésime se trouve vers M dans la partie occidentale du ciel, et de l'autre côté du méridien. Tout cela doit s'entendre des pays qui, comme le nôtre, sont dans l'hémisphere boréal de la Terre. Si l'on veut une regle plus universelle, on remarquera que le triangle OEC, situé dans la partie orientale de l'hémisphere, doit être pris de maniere que son côté EC, qui est la hauteur du point culminant, n'excede jamais 90°; moyennant cette précaution, on aura toujours l'angle OEC obtus, l'arc OE plus grand que 90°, et le nonagésime à l'orient, dans les signes ascendans *en général* (1662), c'est-à-dire, dans ceux où est le Soleil, quand il va

en montant, ou qu'il se rapproche du zénit d'un jour à l'autre. Ce sera tout le contraire dans les signes descendans en général.

1661. Lorsqu'à un instant donné l'on veut connoître la hauteur et la longitude du nonagésime, on cherche l'ascension droite du milieu du ciel (1914), ou le point de l'équateur qui est dans le méridien ; ensuite la longitude du point E de l'écliptique qui y répond avec sa déclinaison, et l'angle de l'écliptique avec le méridien (898), ce qui s'exécute facilement par les tables qui sont dans mes Éphémérides (*tom. VII et VIII* [a]) : alors on a la hauteur du point culminant E, égal à la hauteur de l'équateur, plus ou moins la déclinaison. Cette hauteur de l'équateur doit être augmentée de 11′ 23″ à Paris, si l'on veut avoir égard à l'aplatissement de la Lune (1692).

Ainsi, dans le triangle EOC rectangle en C, connoissant la hauteur CE du point culminant, et l'angle CEO du méridien avec l'écliptique dans ce point-là, on cherchera l'angle EOC, en disant, R : cos. CE : : sin. E : cos. O (3885), c'est-à-dire, *le rayon est au cosinus de la hauteur du point culminant, comme le sinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien est au cosinus de la hauteur du nonagésime.* Si la hauteur CE surpasse 90°, c'est-à-dire, si CE est obtus, on aura O plus grand aussi que 90°, à moins qu'on ne prenne le triangle OEH, qui est du côté du pole.

1662. On a ensuite dans le triangle OEC cette autre proportion, R : cotang. CE : : cos. E : cotang. OE (3884) : mais l'arc NE de l'écliptique, compris entre le point culminant et le nonagésime, est le complément de OE, ou de l'arc compris dans l'autre hémisphere, depuis le méridien jusqu'à l'horizon opposé ; ainsi l'on aura R : cot. CE : : cos. E : tang. NE, c'est-à-dire, le rayon est *à la tangente de la hauteur du point culminant, comme le cosinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien est à la cotangente d'un arc*, qu'il faut ajouter à la longitude du point culminant E, si ce point est dans les signes où le Soleil monte, et retrancher dans les autres signes, pour avoir la longitude du nonagésime N. Si le côté EC, et l'angle E, sont de même espece, le nonagésime se trouvera sur le prolongement de OE ; s'ils sont d'espece différente, il se trouvera sur le côté lui-même, et on ajoutera l'arc au point culminant (voyez l'exemple, *art.* 1677). Les signes dans lesquels le Soleil monte sont ceux où il se trouve quand il se rapproche du zénit, ou que sa hauteur méridienne augmente d'un jour à l'autre. Ainsi un pays de la Terre, situé à 10°

(a) Ces tables donnent l'ascension droite qui répond à la longitude ; mais si l'on veut avoir la longitude qui répond à l'ascension droite, on cherche avec 90° de plus, et l'on ôte 90° de la quantité trouvée.

de latitude dans l'hémisphere boréal, aura les signes ascendans depuis le Capricorne jusqu'à 26 degrés du Belier, et depuis le Cancer jusqu'à 4 degrés de la Vierge : il faut faire une proportion pour le trouver.

Ce sont ces signes ascendans pris *en général* qu'il faut employer dans la regle précédente; et il faut rectifier ainsi le passage de La Caille (*art.* 1131). Il dit qu'on ajoute au point culminant, lorsque ce point est dans le premier et dernier quart de l'écliptique : il faut ajouter cette restriction, à moins que CE ne surpasse 90°.

En effet cotang. OE est positive, et NE additif, quand l'angle E et le côté CE sont de même espece. CE est toujours moindre que 90°, hors de la zone torride; E est toujours aigu dans les signes ascendans; donc, hors de la zone torride, NE est additif dans les signes ascendans : mais, dans les signes descendans, E est obtus, cos. E négatif; par conséquent cotang. OE est négative, et NE soustractif.

Dans la zone torride, il peut se faire que CE soit obtus, et cot. CE négative, ce qui fait changer le signe de cot. OE et celui de l'arc NE.

Cette considération de l'espece de CE est peut-être plus commode que celle des signes ascendans pris en général.

1663. M. Trembley et M. Cagnoli emploient le triangle PDZ (FIG. 93), formé au pole du monde D, au pole de l'écliptique P, et au zénit Z : l'on connoît PD, obliquité de l'écliptique; DZ, complément de la hauteur du pole; et l'angle ZDP, différence entre 270° et l'ascension droite du milieu du ciel; on cherche l'angle DPZ, qui est la différence entre 90° et la longitude du nonagésime, et le côté PZ, égal à la hauteur du nonagésime. Nous donnerons ci-après l'exemple (1677).

On peut résoudre ce triangle par le moyen de la perpendiculaire ZX, abaissée du zénit (3915); car la tang. du premier segment DX = cos. D. tang. DZ; le second segment PX = PD — DX; enfin cos. ZP = $\frac{\cos.\ DZ\ .\ \cos\ PX}{\cos.\ DX}$; mais il faut observer la regle des signes (3916). Il n'y a que onze log. à chercher, au lieu de 14 qu'exige la premiere méthode (1662), qui cependant se réduit à 6, quand on emploie les tables qui donnent la déclinaison du point culminant, et l'angle de l'écliptique avec le méridien (1661); ainsi, avec ces tables, je préfere la premiere méthode.

1664. M. de Lambre calcule le nonagésime en résolvant le triangle YOQ (FIG. 93), dans lequel on connoît Q hauteur de l'équateur,

et YQ complément de l'ascension droite du milieu du ciel ; il cherche l'angle O, hauteur du nonagésime, et YO, complément de sa longitude. Nous parlerons des tables du nonagésime (1685), avec lesquelles on peut se dispenser de ces calculs, à moins qu'on ne demande une extrême précision.

Quand on a la longitude du nonagésime, et la longitude de la Lune, on prend leur différence, qui est la distance au nonagésime (1678) ; cette différence, jointe avec la hauteur du nonagésime et la latitude de la Lune, suffit pour trouver la parallaxe en longitude et en latitude, par les formules suivantes.

Soit L le lieu vrai de la Lune (FIG. 93), S son lieu apparent dans le vertical ZLS, PLR le cercle de latitude qui passe par le lieu vrai de la Lune, PST celui qui passe par le lieu apparent, LR est la latitude vraie, ST la latitude apparente ; et ayant pris PI égal à PL, l'arc IS est la parallaxe de latitude, l'arc RT de l'écliptique est la parallaxe de longitude.

Si l'on nomme p la parallaxe horizontale de la Lune, on aura la parallaxe de hauteur LS égale à p sin. ZS (1629) ; dans le triangle rectangle ISL, sensiblement rectiligne et rectangle, on a IL = SL. sin. S ; pour réduire IL à l'écliptique, ou pour avoir TR, qui est la parallaxe de longitude, il faut diviser IL par le sinus de PL ou PI (3877), c'est-à-dire par le sinus de la latitude vraie ; donc la parallaxe de longitude $TR = \frac{p . \sin. ZS . \sin. S}{\sin. PI}$. On employoit ordinairement la latitude apparente ; mais il est plus exact et plus commode d'employer PI, ou le cosinus de la latitude vraie, comme on le verra dans l'article 1679 ; c'est celle qui a déja servi dans l'article précédent : on trouve 1″7 de moins que si l'on employoit la latitude apparente dans l'exemple que nous donnerons.

1665. Dans le même triangle on a aussi IS = IL . cot. S (3801) = p . sin. ZS . sin. S . cotang. S. C'est la parallaxe de latitude, il faut faire évanouir l'angle S des deux expressions précédentes.

La parallaxe de longitude renferme sin. S : mais en mettant pour sin. ZS sa valeur $\frac{\sin. PZ . \sin. P}{\sin. S}$ (3907), on aura $\frac{p \sin. PZ . \sin. P}{\sin. PI}$; c'est la parallaxe de longitude (Kies, *Mém. de Berlin*, 1749).

La parallaxe de latitude renferme la cotang. de l'angle S ; or, dans le triangle PZS, l'on suppose connus deux côtés, et l'angle compris ; savoir, PZ, PS, et l'angle P, c'est-à-dire la hauteur du nonagésime, les distances apparentes de la Lune au pole de l'écliptique et au nonagésime ; on a donc (3951) tang. $S = \frac{\sin. ZPS}{\cot. PZ . \sin. PS - \cos. P . \cos. PS}$,

ou cot. S $= \frac{\text{cot. PZ. sin. PS.} - \text{cos. P. cos. PS}}{\text{sin. P}}$; et multipliant le numérateur et le dénominateur par tangente PZ, cotangente S $= \frac{\text{sin. PS.} - \text{cos. P. cos. PS. tang. PZ}}{\text{sin. P. tang. PZ}}$; cette valeur, multipliée par p. sin. ZS. sin. S, donnera celle de IS, qui est la parallaxe de latitude, égale à $\frac{p\text{. sin. PS. sin. ZS. sin. S.} - p\text{. cos. P. cos. PS. sin. ZS. sin. S. tang. PZ}}{\text{sin. P. tang. PZ}}$; mais sin. ZS $= \frac{\text{sin. PZ. sin. P}}{\text{sin. S}}$ (3907). Substituant cette valeur dans l'expression de la parallaxe en latitude IS, on aura la suivante : $\frac{p\text{. sin. PS. sin. S. sin. PZ. sin. P}}{\text{sin. P. tang. PZ. sin. S}} - \frac{p\text{. cos. P. cos. PS. sin. S. tang. PZ. sin. PZ. sin. P}}{\text{sin P. tang. PZ. sin. S}}$.

Effaçant tous les termes qui se détruisent, la formule se réduit à $\frac{p\text{. sin. PS. sin. PZ}}{\text{tang. PZ}} - p\text{. cos. P. cos. PS. sin. PZ}$; mais sin. PS = tang. PS. cos. PS (3805); ainsi l'on pourra la mettre sous cette forme : IS $= p\text{. cos. PS. sin. PZ} \left(\frac{\text{tang. PS}}{\text{tang. PZ}} - \text{cos. P}\right)$.

1666. A la place des lettres nous pouvons mettre les choses qu'elles expriment ; par exemple, sin. PS est la même chose que le cosinus de la latitude apparente ST ; sin. PZ est le sinus de la hauteur du nonagésime (1660) ; l'angle P, ou NPT, est la distance apparente de la Lune au nonagésime, puisque cet angle est mesuré par l'arc TN de l'écliptique, compris entre la Lune et le nonagésime : ainsi les expressions précédentes de TR et de IS se changeront en celles-ci : par. longit. $= \frac{\text{par. hor. sin. dist. app. au non. sin. haut. du non.}}{\text{cos. latit. vraie}}$, et par. lat. = par. hor. sin. haut. du non. sin. lat. ap. $\left(\frac{\text{cotang. latit.}}{\text{tang. haut. du nonag.}} - \text{cos. dist. app. au non.}\right)$. Ici ce n'est plus la latitude vraie, comme pour la parallaxe de longitude (1664), mais la latitude apparente.

Si l'on nomme p la parallaxe horizontale, l la latitude, d la distance apparente de la Lune au nonagésime, h la hauteur du nonagésime ; on aura la parallaxe de longitude $= \frac{p \text{ sin. } d \text{. sin. } h}{\text{cos. } l}$.

1667. On aura aussi la parallaxe de latitude $= p$ sin. h. sin. l $\left(\frac{\text{cot. } l}{\text{tang. } h} - \text{cos. } d\right)$. Dans cette formule c'est la latitude apparente qu'on emploie.

Cette expression se réduit à celle-ci, encore plus commode pour l'usage, p cos. h. cos. $l - p$ sin. l. sin. h cos. d, parceque sin. l. cot. l = cos. l, et $\frac{\text{sin. } h}{\text{tang. } h}$ = cos. h. Je dis qu'elle est plus commode,

parc equ

parceque, dans le calcul (1678), on se contente d'abord, si l'on veut, de la premiere partie p cos. h. cos. l, et même de p cos. h; car en supposant l de $5°\frac{3}{4}$, il n'y a jamais plus de $19''$ d'erreur à craindre dans cette supposition, lors même que la parallaxe est de $61'\frac{1}{2}$.

1668. Cette formule, qui donne la parallaxe en latitude, peut la donner en déclinaison (1646), si l exprime la déclinaison apparente, h la hauteur de l'équateur, et d la distance au méridien, ou l'angle horaire apparent.

1669. La formule qui exprime la parallaxe en latitude est composée de deux parties. La premiere, qui est p cos. h cos. l, ne dépend point de la distance de la Lune au nonagésime; et c'est la partie principale de la parallaxe en latitude : dans le calcul des éclipses de Soleil, la latitude de la Lune étant extrêmement petite, son cosinus est sensiblement égal au rayon ou à l'unité; ainsi l'on a pour la premiere partie de la parallaxe en latitude p cos. h. Pour avoir exactement cette premiere partie de la parallaxe en latitude, dans tous les cas, il faut *multiplier la parallaxe horizontale de la Lune par le cosinus de la hauteur du nonagésime, et par le cosinus de la latitude apparente.*

1670. La seconde partie de la parallaxe en latitude est p sin. l sin. h cosin. d; on la trouve, en *multipliant la parallaxe horizontale par le sinus de la latitude apparente de la Lune, le sinus de la hauteur du nonagésime, et le cosinus de la distance apparente de la Lune au nonagésime.* Cette seconde partie est très petite, parceque le sinus de la latitude de la Lune, qui est un des facteurs, est à peine un dixieme de l'unité, lors même que la latitude de la Lune est la plus grande; cette seconde partie devient comme nulle dans les éclipses de Soleil, où la latitude apparente n'est jamais que d'un demi-degré, et sin. l environ un centieme. Dans des éclipses d'étoiles où la latitude de la Lune seroit de $6°$, et la Lune située dans le nonagésime, à $58°\frac{1}{2}$ de hauteur, la parallaxe horizontale étant de $1°$, cette seconde partie seroit de $5'\,21''$, et ne pourroit se négliger.

On peut encore simplifier cette seconde partie de la parallaxe en latitude, en considérant qu'elle est égale à la parallaxe en longitude, trouvée ci-dessus (1665), multipliée par le sinus de la latitude apparente de la Lune, et divisée par la tangente de la distance apparente au nonagésime. En effet, si la parallaxe de longitude est égale à $\frac{p \text{ sin. } d. \text{ sin. } h}{\text{cos. } l}$, ou simplement p sin. d. sin. h dans les éclipses, on a $p = \frac{\text{par. long.}}{\text{sin. } d. \text{ sin. } h}$. Substituant cette valeur de p dans l'expression

p sin. h sin. l. cos. d, elle deviendra $= \frac{\text{par. long. sin. } l\text{. cos. } d}{\text{sin. } d}$: mais $\frac{\text{cos. } d}{\text{sin. } d}$ $=$ cotang. d; donc on a par. long. sin. l. cot. d pour la seconde partie de la parallaxe en latitude dans les éclipses de Soleil.

Hors des éclipses on a $p = \frac{\text{par. longit. cos. } l}{\text{sin. } d\text{. sin. } h}$, donc la seconde partie de la par. de latit. $= p$ sin. h sin. l cos. $d = \frac{\text{par. long. cos. } l\text{. sin. } l\text{. cos. } d}{\text{sin. } d}$ $=$ par. long. sin. l. cot. d. cos. l. seconde partie de la parallaxe en latitude hors des éclipses, dans laquelle le cosinus appartient à la latitude vraie.

1671. On doit retrancher cette quantité de la premiere partie, p cos. h. cos. l, trouvée ci-dessus (1669); si ce n'est dans le cas où la distance apparente de la Lune au nonagésime, et sa distance apparente au pole élevé de l'écliptique, sont de différente espece, c'est-à-dire, l'une aiguë et l'autre obtuse; car alors la seconde partie de la formule est additive, parceque sin. l change de signe dès lors que la latitude de la Lune est méridionale (en supposant l'observateur dans nos régions septentrionales); et cos. d et cot. d changent, quand la distance au nonagésime surpasse 90° (3794). Il ne peut y avoir de difficulté pour le cas où la Lune seroit située entre le zénit et le pole du monde élevé sur l'horizon; car le calcul de la formule donneroit une quantité à soustraire d'une autre plus petite, c'est-à-dire une parallaxe négative; et cela même avertiroit que la Lune est entre le zénit et le pole élevé, ou que la parallaxe diminue la distance au pole élevé, au lieu de l'augmenter, comme on le supposoit dans l'*art.* 1665 : il pourroit arriver aussi que les deux quantités fussent négatives, et il faudroit les ajouter.

1672. On peut mettre la parallaxe de latitude sous cette forme, p (cos. h sin. dist. au pole — sin. h. cos. d cos. dist. au pole) : la distance au pole ne pouvant passer 180°, le sinus sera toujours positif; et le premier terme ne sera négatif que quand la hauteur du nonagésime passera 90°, ou qu'il sera entre le zénit et le pole. Mais h ne change point dans le second terme; ainsi celui-ci pourra continuer d'être négatif, à moins que d ne passe 90°, ou que la latitude ne soit australe; si un de ces deux cas arrive séparément, la seconde partie deviendra positive. En observant ainsi la regle des signes, on aura celui de la parallaxe, et on l'appliquera, suivant son signe, à la distance de la Lune au pole boréal de l'écliptique, à moins que l'observateur ne fût dans l'hémisphere austral de la Terre.

De même pour la parallaxe de longitude $\frac{p \text{ sin. } d\text{. sin. } h}{\text{sin. dist. au p.}}$, en prenant

toujours *d* égal à la longitude de la Lune, moins celle du nonagésime, sin. *d* sera positif, tant que la différence sera moindre que 180°, et la parallaxe s'ajoutera avec la longitude de la Lune. On en verra l'usage (1866, 1970).

1673. Si la seconde partie doit être en général ôtée de la premiere, quand la Lune est du côté du pole élevé, cela vient de ce que la latitude boréale de la Lune, dans nos régions boréales, rapproche la Lune du zénit, et par conséquent diminue sa parallaxe; ainsi le terme qui marque presque tout l'effet de la latitude doit se retrancher dans ce cas-là.

1674. La seconde partie de la parallaxe en latitude renferme cos. *l*, c'est-à-dire qu'elle est multipliée par le cosinus de la latitude vraie; et il est nécessaire d'y avoir égard dans les éclipses d'étoiles fixes par la Lune; car la latitude pouvant aller à 6°, l'on pourroit commettre une erreur de 20″ sur la parallaxe, en supposant le cosinus de la latitude égal au rayon.

1675. Cette formule peut être sujette à une erreur de deux secondes environ, comme l'ont remarqué M. Lexell et M. Carouge; et cela vient de ce que la perpendiculaire LI (FIG. 93) tombe plus près du pole que le point L. Mais il est facile de corriger cette erreur par deux moyens : le premier consisteroit à employer un troisieme terme dans la formule; en voici le calcul.

La différence entre l'hypoténuse et le côté d'un triangle sphérique LPI dont l'angle P est fort petit (4046), est $\frac{1}{2}$ LI² cot. PL, ou $\frac{1}{2}$ LI² tang. lat. : on mettra pour LI l'angle LPI multiplié par le sin. PL, ou la parallaxe de longitude par le cos. de la latitude de la Lune; le sinus au lieu du produit de la tang. et du cosinus; et au lieu du produit du sinus par le cosinus, on substituera la moitié du sinus du double (3817); on divisera par l'arc égal au rayon (3499), et l'on aura enfin le carré de la parallaxe de longitude, divisé par quatre fois l'arc égal au rayon, et multiplié par le sinus du double de la latitude. Le logar. constant 4,08352 s'ajoute avec deux fois celui de la parallaxe de longitude, et une fois celui du sinus de la latitude double, et l'on a celui de la correction cherchée, qu'il faut ôter de la parallaxe en latitude, toutes les fois que la Lune n'est pas à plus de 90° du pole P de l'écliptique.

Voici une table calculée d'après cette formule pour corriger la parallaxe de latitude; on l'a étendue jusqu'à 30°, pour qu'elle puisse servir à corriger la parallaxe de déclinaison, en supposant qu'on lise en tête de la table, déclinaison, au lieu de latitude; et dans la

premiere colonne à gauche, parallaxe d'ascension droite, au lieu de parallaxe de longitude.

Correction de la parallaxe de latitude, Arg. LATITUDE APPARENTE.

Par. de longit.	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	9°	12°	15°	18°	21°	24°	27°	30°
0′	0″0	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00	0″00
10	0.0	0.02	0.05	0.04	0.06	0.08	0.09	0.14	0.18	0.22	0.26	0.29	0.32	0.35	0.38
20	0.0	0.06	0.12	0.18	0.24	0.30	0.36	0.54	0.71	0.87	1.02	1.17	1.30	1.41	1.51
30	0.0	0.14	0.27	0.41	0.55	0.68	0.82	1.21	1.60	1.96	2.31	2.63	2.92	3.18	3.40
40	0.0	0.24	0.48	0.72	0.97	1.21	1.46	2.16	2.83	3.49	4.10	4.67	5.18	5.65	6.05
50	0.0	0.38	0.76	1.15	1.52	1.89	2.27	3.37	4.44	5.45	6.41	7.30	8.11	8.82	9.45
60	0.0	0.55	1.09	1.64	2.19	2.73	3.27	4.85	6.39	7.85	9.23	10.51	11.67	12.71	13.60

Cette correction est soustractive de la parallaxe de latitude, si la latitude est boréale; elle est additive dans le cas contraire.

Mais la meilleure maniere de corriger la formule, est sans doute celle de M. de Lambre, qui consiste à employer, au lieu de cos. *d* (1670), le cosinus de la distance vraie, augmentée de la moitié seulement de la parallaxe en longitude, ce cosinus étant divisé, si l'on veut, par celui de cette moitié de la parallaxe en longitude (1683).

1676. EXEMPLE. Le 7 avril 1749 j'observai l'immersion d'*Antarès* à 1ʰ 1′ 20″ du matin, temps vrai, à l'observatoire de la marine qui est à l'hôtel de Clugny, ou 13ʰ 3′ 33″, temps moyen; on demande pour ce moment la parallaxe de longitude et de latitude. Je suppose qu'on ait calculé pour le même temps le lieu du Soleil et celui de la Lune par les tables, et qu'on connoisse la hauteur du pole avec l'obliquité de l'écliptique.

Lieu du Soleil par les tables de La Caille,	0ˢ	17°	19′	29″
Lieu de la Lune par les tables de Mayer,	8	5	31	42
Latitude australe de la Lune,		3	47	59
Obliquité de l'écliptique pour ce temps-là,		23	28	22
Hauteur du pole du lieu de l'observateur,		48	51	14
Hauteur de l'équateur,		41	8	46
On diminueroit la hauteur du pole de 11′ 23″, si l'on vouloit avoir égard à l'aplatissement (1694).				
Ascension droite du Soleil calculée (910),		15	58	2
Le temps vrai, 13ʰ 1′ 20″, réduit en degrés,		195	20	0
Somme ou ascension dr. du milieu du ciel (1014),		211	18	2

Ou en en retranchant 180°,	31° 18′ 2″
La déclinaison méridionale qui répond à cette ascension droite (895),	12 42 48
L'angle de l'écliptique avec le méridien qui répond à la même ascension droite, 31° 18′ 2″ (895),	70 6 9
La long. qui répond à la même ascension droite,	33 32 22
Ajoutant les 180° qu'on avoit retranchés de l'ascension droite du milieu du ciel, on a la longitude du point culminant de l'écliptique (895), ou du point qui est dans le méridien,	7ˢ 3 32 22
La hauteur de ce point culminant de l'écliptique, ou la différence entre sa déclinaison, 12° 42′ 48″, et la hauteur de l'équateur, 41° 8′ 46″, est de	28 25 58

On prendroit leur somme, si la déclinaison du point E étoit du côté du pole élevé.

Le rayon est au sinus de 70° 6′ 9″, qui est l'angle CEO (FIG. 93), comme le cosinus de la hauteur du point culminant, 28° 25′ 58″, est au cosinus de la hauteur du nonagésime, ou de l'angle NOB (1661), qui se trouve de 34° 13′ 14″. On cherchera aussi le logarithme de la tangente de CE. On fera ensuite cette proportion : la tangente de la hauteur CE, 28° 25′ 58″, est au rayon comme le cosinus de l'angle E, 70° 6′ 9″, est à la tangente de l'arc NE de l'écliptique, compris entre le nonagésime et le méridien : cet arc se trouvera de 32° 9′ 10″; étant ôté de la longitude du point culminant, 7ˢ 3° 32′ 22″, puisque ce point est dans les signes descendans (1662), il donnera la longitude du nonagésime 6ˢ 1° 23′ 12″. Voici l'ordre et la disposition du calcul.

T. longit. ⊙	17° 19′ 29″	9,4940693	Cotang. Asc.	31° 18′ 2″	10,2160801
Cos. obl. écl.	23 28 22	9,9624875	Cos. obl. écl.		9,9624875
Tang. asc. dr.	15 58 2	9,4565568	Cot. long. E	33 32 22	10,1785676
T. vr. en degr.	195 20 0		Ajoutez 180°		
Som. p. culmi.	211 18 2	Otez 180°			
Sinus asc. dr.	31 18 2	9,7156084	Sin. ang. E	70 6 9	9,9732677
Tang. obliq.	23 28 22	9,6377373	Cos. haut. CE	28 25 58	9,9441748
Tang. décl.	12 42 48	9,3533457	Cos. haut. non.	34 13 14	9,9174425
Haut. équat.	41 8 46				
Haut. CE	28 25 58	du point culmin.			
Cosin. asc. dr.	31 18 2	9,9316885	Cosin. E	70 6 9	9,5319133
Sin. obliq.	23 28 22	9,6002248	Otez tang. CE	28 25 58	9,7335483
Cos. ang. E	70 6 9	9,5319133	Tang. NE	32 9 10	9,7983650
			ou	1ˢ 2° 9 10	
Otez de la longitude du point culminant E. . .				7 3 32 22	
Reste la longitude du nonagésime N.				6 1 23 12	

1677. Voici un exemple de l'autre méthode (1663) par les analogies de Neper (3984, 3987).

Soit la hauteur du pole corrigée (1694), 48° 35′ 20″; l'obliquité PD, 23° 28′ 22″; l'ascension droite du milieu du ciel, 211° 18′; l'angle D, 58° 42′, dont la moitié est 29° 21′; la somme de PD et DZ 64° 53′, la demi-somme 32° 26′ 30″, la différence 17° 56′ 20″, la demi-différence 8° 58′ 10″. Voici le calcul dans lequel j'ai ajouté les complémens arithmétiques des logarithmes soustractifs (4107).

Cot.	29° 21′	0,2500150		0,2500150
Sin.	8 58 10″	9,1928676	Cos.	9,9946565
Comp. sin.	32 26 30	0,2704783	Comp. cos.	0,0736894
Tang. demi-différ. an.		9,7133609	Tang. demi-som.	0,3183609
	27° 19′ 55″			64° 20′ 19″

Tang.	8° 58′ 10″	{ Sin.	9,1928676
		{ Com. cos.	0,0053435
Sin. demi-diff.	64 20 19		9,9549027
Com. sin. demi-diff.	27 19 55		0,3380502
Tang. ½EZ (3987)	17 12 58	. . . .	9,4911640

EZ = 34° 25′ 56″, hauteur du nonagésime.

Ajoutant la demi-somme et la demi-différence des angles, pour avoir le plus grand angle E, avec 90°, on a 181° 40′ 14″ pour la longitude du nonagésime.

1678. Pour avoir la distance de la Lune au nonagésime, il faut prendre la différence entre la longitude de la Lune et celle du nonagésime, en ôtant la plus petite de la plus grande; mais si la différence surpasse 6 signes, il faut ôter la plus grande de la plus petite, en ajoutant 12 signes à celle-ci : par ce moyen la différence cherchée sera toujours moindre que 6 signes, et la Lune sera à l'orient du nonagésime, si c'est le nonagésime que l'on a retranché; la Lune sera occidentale, si c'est sa longitude qu'on a ôtée de celle du nonagésime, soit qu'on ait employé ces longitudes toutes seules, soit qu'on en ait augmenté une de 12 signes. Dans notre exemple, on ôte 6ˢ 1° 23′ 12″, de 8ˢ 5° 31′ 42″, il reste 64° 8′ 30″ pour la distance de la Lune au nonagésime; la Lune est orientale : on verra l'usage de cette considération (1866). On y peut suppléer, si l'on observe la regle des signes (1672).

Connoissant la hauteur du nonagésime, et sa distance à la Lune, nous allons chercher les parallaxes de longitude et de latitude par les formules précédentes (*1665 et suiv.*)

Log. paral. horiz. p, 57′ 16″ ou 3436″	3,5360532
Log. sin. de la hauteur du nonag. h, 34° 13′ 14″	9,7500299
Log. sin. dist. de la Lune au nonag. 64° 8′ 30″	9,9541823
Log. de p. sin. h sin. d.	3,2402654
Otez le log. du cos. de la lat. vraie, 3° 47′ 59″	9,9990442
Reste le log. de 29′ 3″, paral. de longit. à-peu-près	3,2412212

On ajoutera cette parallaxe avec la distance vraie de la Lune au nonagésime, 64° 8′ 30″, et l'on aura la distance apparente, 64° 37′ 33″, qu'il faudra employer dans le calcul de l'article 1679.

Logarit. de la parallaxe horiz. p, 57′ 16″	3,5360532
Log. cos. de la hauteur du nonagésime, 34° 13′ 14″	9,9174425
Log. de 47′ 21″, paral. de latitude à-peu-près	3,4534957

On ajoutera cette parallaxe, 47′ 21″, avec la latitude vraie de la Lune, 3° 47′ 59″, parceque la latitude de la Lune est opposée au pole élevé de l'écliptique, et l'on aura la latitude apparente 4° 35′ 20″, qu'il faudra employer dans un des calculs suivans, pour plus d'exactitude.

1679. Logarit. de la paral. horiz. ou de p, 3436″	3,5360532
Log. sin. h, haut. du nonag. 34° 13′ 14″	9,7500299
Log. sin. d, ou dist. apparente de la Lune au nonagésime, 64° 37′ 33″	9,9559419
Log. p. sin. h sin. d.	3,2420250
Otez le log. cos. latit. vraie, 3° 47′ 59″	9,9990442
Reste le log. de la parallaxe de longitude plus exacte 1749″8, ou 29′ 9″8	3,2429808

On emploîra les mêmes nombres pour la parallaxe en latitude, excepté que c'est la latitude apparente qui doit y entrer.

Logarithme p. . . .	3,5360532	Log. p.	3,5360532
Logarith. cos. h. .	9,9174425	Log. sin. latit. ap. .	8,9031205
Log. cos. lat. ap. .	9,9986056	Log. sin. h.	9,7500299
Log. 2832″, . . .	3,4521013	Log. cos. dis. ap. d.	9,6319790
C'est la premiere partie de la parallaxe en latitude (1667).		Log. 66″2.	1,8211826
		Seconde partie (1670).	

Ces deux parties de la formule étant ajoutées ensemble, parceque la distance de la Lune au pole boréal, et sa distance au nonagésime, sont de différente espece (1671), on aura la parallaxe totale en latitude 2898″3, ou 48′ 18″3.

1680. Si l'on veut pousser l'exactitude encore plus loin, on ajoutera le troisieme terme $0''5$ (1675), et l'on aura $48'\ 18''8$ pour la parallaxe de latitude, en supposant la Terre sphérique. On trouveroit deux dixiemes de plus, en employant plus exactement la latitude apparente, et l'on auroit $48'\ 19''0$.

1681. La formule de la parallaxe de latitude étant composée de trois termes (1675), plusieurs auteurs ont cherché à la simplifier, entre autres M. Lexell, en 1774 (*Ephém. de Berlin* 1777); M. Trembley; (*Essai sur la Trigon.*) M. Cagnoli (*Trigon. p.* 417), et plus récemment encore M. de Lambre.

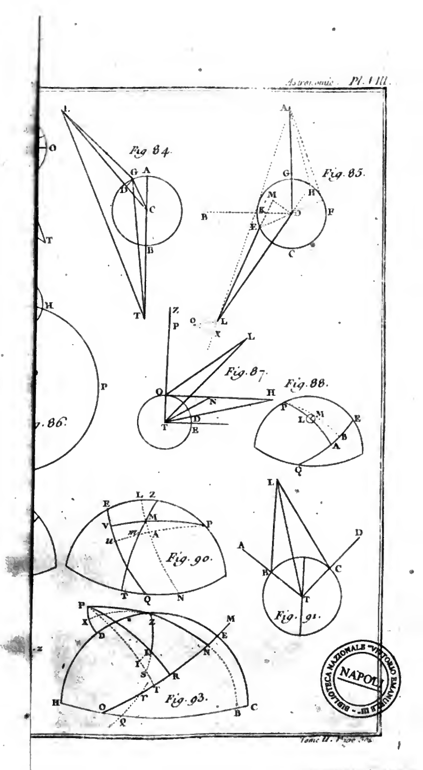
Voici la formule de M. Cagnoli : Paral. de latit. $=$ par. long. cos. lat. vr. cos. lat. ap. $\frac{\text{cot. haut. non.} - \text{cos. (dis. vr. au non.} + \frac{1}{2}\text{par. long.) tang. lat. vr.}}{\text{sin. dist. vraie au nonagésime}}$,

Cette formule ne pourroit servir, si la parallaxe de longitude étoit nulle, ou très petite; mais, dans ce cas, on pourroit se servir de l'ancienne (1670) : le troisieme terme, qui y manque, seroit alors comme nul.

Je me contenterai de démontrer une nouvelle formule que M. de Lambre m'a communiquée le 4 mars 1786, et qui me paroît la plus commode : Soit D la distance vraie au nonagésime, d la distance apparente, L et l les latitudes vraie et apparente, P la parallaxe de longitude déja trouvée, on aura la paral. de latit. $= \left(\frac{p.\ \text{cos.}\ h.\ \text{sin.}\ d}{\text{sin. D}} - \frac{\text{P. sin. L cos.}(D + \frac{1}{2}P)}{\text{sin. D}}\right)$ cos. l. Pour la démontrer, il faut d'abord prouver que tang. $l = \frac{\text{tang. L. sin.}\ d}{\text{sin. D}} - \frac{p\ \text{cos.}\ h\ \text{sin.}\ d}{\text{cos. L sin. D}}$. Pour cela soit L (FIG. 96) le lieu vrai de la Lune, S le lieu apparent, P le pole de l'écliptique, Z le zénit; les triangles PZL, PZS donnent (3944) cos. Z $= \frac{\text{cos. PL} - \text{cos. PZ. cos. ZL}}{\text{sin. PZ. sin. ZL}} = \frac{\text{cos. PS} - \text{cos. PZ. cos. ZS}}{\text{sin. PZ. sin. ZS}}$; donc cos. PL. sin. ZS $-$ cos. PZ cos. ZL sin. ZS $=$ cos. PS sin. ZL $-$ cos. PZ cos. ZS sin. ZL; ou cos. PL sin. ZS $-$ cos. PS sin. ZL $=$ cos. PZ. cos. ZL sin. ZS $-$ cos. PZ. cos. ZS. sin. ZL $=$ cos. PZ. sin. (ZS $-$ ZL) (3811) $=$ cos. PZ. sin. LS $=$ cos. PZ. sin. p. sin. ZS. Divisant tout par sin. ZS, on a cos. PL $- \frac{\text{cos. PS. sin. ZL}}{\text{sin. ZS}} = p$ cos. PZ. Mais sin. ZL $= \frac{\text{sin. PL. sin ZPL}}{\text{sin. Z}}$, et sin. ZS $= \frac{\text{sin. PS. sin. ZPS}}{\text{sin. Z}}$; donc $\frac{\text{sin. ZL}}{\text{sin. ZS}} = \frac{\text{sin. PL. sin. ZPL}}{\text{sin. PS. sin. ZPS}}$ (a); donc p cos. PZ $=$ cos. PL $- \frac{\text{cos. PS. sin. PL. sin. ZPL}}{\text{sin. PS. sin. ZPS}} = p$ cos. $h =$ sin. L $-$

(a) Cette valeur donne un moyen fort simple de trouver le diametre apparent par le moyen du diametre horizontal (1510), sans calculer la hauteur de la Lune (1873).

tang.


Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 93.

$\frac{\text{tang. } l.\text{cos. L sin. D}}{\text{sin. D}}$; ainsi tang. $l = \frac{\text{sin.L. sin.} d - p.\text{cos.} h.\text{ sin.} d}{d \text{ cos. L sin. D}} = \frac{\text{tang. L. sin.} d}{\text{sin. D}}$ $- \frac{p \text{ cos. } h \text{ sin.} d}{\text{cos. L. sin. D}}$. C'est l'expression de la latitude apparente dont nous avons besoin ; elle est de M. Lexell. J'ai mis p pour sin. p.

Tang. L — tang. $l = \frac{\text{sin. (L} - l)}{\text{cos.L.cos.} l}$ (3843) $=$ tang. L $- \frac{\text{tang. L. sin.} d}{\text{sin. D}} + \frac{p \text{ cos. } h.\text{sin. } d}{\text{cos. L sin. D}} = \frac{p.\text{ cos. } h.\text{ sin. } d}{\text{cos. L sin. D}} -$ tang. L $\left(\frac{\text{sin } d - \text{sin. D}}{\text{sin. D}}\right) = \frac{p \text{ cos. } h.\text{sin. } d}{\text{cos. L. sin. D}} - \frac{\text{tang. L. 2 sin. } \frac{1}{2}(d - \text{D}) \text{ cos. } \frac{1}{2}(d + \text{D})}{\text{sin. D}}$ (3835). Mais $\frac{1}{2}(d + \text{D}) = \text{D} + \frac{1}{2}\text{P}$; donc $\frac{\text{sin. (L} - l)}{\text{cos. L. cos. } l} = \frac{p \text{ cos. } h.\text{sin. } d - 2 \text{ sin } \frac{1}{2}\text{P cos. (D} + \frac{1}{2}\text{P) sin. L}}{\text{cos. L. sin D}}$; et sin. (L $- l$) $=$ $\frac{p \text{ cos. } h.\text{ sin. } d - 2 \text{ sin. } \frac{1}{2}\text{P cos. (D} + \frac{1}{2}\text{P) sin. L}}{\text{sin. D}}$ cos. l; ou mettant les petites quantités à la place de leurs sinus, on a enfin parallaxe de latitude $= \left(\frac{p \text{ cos. } h.\text{ sin. } d}{\text{sin. D}} - \frac{\text{P sin. L. cos. (D} + \frac{1}{2}\text{P)}}{\text{sin. D}}\right)$ cos. l.

Exemple. Avec les données de l'art. 1678:

p,	57' 16"	3,536053	P,	29' 10"	3,24298 neg.	Cos. lat. app.	9,998594
Cos. h,	34° 13 14	9,917442	Sin. L,	3° 47 59	8,82131 neg.	48' 28" 4	3,463654
Sin. d,	64 37 40	9,955949	Cos. (D + ½P)		9,63581	48 19. 0	3,462248
Comp.sin.D	64 8 20	0,045818	. . . .		0,04582	Paral. de latit. exacte.	
	47' 32" 7.	3,455262		+ 55" 7.	1,74592		
				47 32, 7			
Par. lat. à-peu-près				48' 28, 4			
Latitude vraie				3° 47 59			
Latit. appar. à-peu-près . . .				4 36 27			

Cette parallaxe de latitude exacte dans la sphere est la même que dans l'exemple précédent (1680).

1682. On pourroit chercher par cette formule la parallaxe de déclinaison (1668); mais cette valeur ne seroit pas assez approchée, si la déclinaison étoit fort grande; il faudroit y employer le cos. de la déclinaison apparente, trouvée à peu-près par l'opération que nous venons d'indiquer; on sent bien qu'alors D et d seroient les distances de la Lune au méridien, L et l les déclinaisons, et P la parallaxe d'ascension droite, trouvée comme la parallaxe de longitude.

1683. Les expressions précédentes ont fourni aussi à M. de Lambre une méthode élégante pour éviter le troisieme terme de la parallaxe en latitude (1675), et perfectionner l'ancienne formule que nous avons employée. Puisque p cos. $h = $ sin. L $- \frac{\text{tang.} l \text{ cos. L sin. D}}{\text{sin. } d}$, on aura, en divisant par cos. L, tang. L $- l = \frac{p \text{ cos. } h}{\text{cos. L}} + \frac{\text{tan. } l \text{ sin. D}}{\text{sin. } d} -$

$\text{tang.}\, l = \frac{p \cos. h}{\cos. L} - \text{tang.}\, l \left(1 - \frac{\sin. D}{\sin. d}\right) = \frac{p \cos. h}{\cos. L} - \tan. l \left(\frac{\sin. d - \sin. D}{\sin. d}\right)$ $= (3835) \frac{p \cos. h}{\cos. L} - \frac{2 \,\text{tang.}\, l \sin. \frac{1}{2}(d - D). \cos. \frac{1}{2}(d + D)}{\sin. d} = \frac{p \cos. h}{\cos. L} -$ $\frac{2 \sin. \frac{1}{2}P \cos.(D + \frac{1}{2}P) \,\text{tang.}\, l}{\sin. d} = (3817) \frac{p \cos. h}{\cos. L} - \frac{\sin. P \cos.(D + \frac{1}{2}P) \tan. l}{\cos. \frac{1}{2}P . \sin. d}$. Donc $\text{tang. L} - \text{tang.}\, l = (3843) \frac{\sin. (L - l)}{\text{cosin.} L . \cos. l} = (1666) \frac{p \cos. h}{\cos. L} -$ $\frac{\sin. p \sin. h . \cos.(D + \frac{1}{2}P) \tan. l}{\cos. L \cos. \frac{1}{2}P}$; et $\sin. (L - l)$ ou le sinus de la parallaxe en latitude $= p \cos. h \cos. l - p \sin. h \sin. l \frac{\cos. (D + \frac{1}{2}P)}{\cos. \frac{1}{2}P}$. Ainsi il suffiroit de mettre $\frac{\cos. (D + \frac{1}{2}P)}{\cos. \frac{1}{2}P}$, au lieu de $\cos. d$, dans la formule (1667), pour la rendre rigoureusement exacte.

1684. Pour trouver la parallaxe de longitude par le moyen du nonagésime, Riccioli (*Astr. reform. Praecep.* pag. 21) emploie une table intitulée, *Parallaxis mecoplatica* [a] : en tête de la table est la parallaxe horizontale; dans la colonne latérale, la hauteur du nonagésime; et dans la table, on a une parallaxe de longitude, $p \sin. h$, qui auroit lieu, si la Lune étoit à l'horizon même; car les nombres de la table croissent comme les sinus. Dans la même table, avec cette parallaxe en longitude, et la distance de la Lune au nonagésime, on trouve la parallaxe $p \sin. d \sin. h$; elle n'a besoin d'aucune correction, si la Lune est près de l'écliptique, comme dans les éclipses de Soleil; mais il faut y ajouter une petite correction, à cause de cos. L, si la Lune a une latitude. Cette correction ne va qu'à 8″ pour 5° ¼ de latitude, et 31′ de parallaxe en longitude. C'est la réduction au grand cercle dont j'ai donné une table à la fin des tables de la Lune.

Pour trouver la parallaxe de latitude, Riccioli cherche d'abord la hauteur du nonagésime de l'orbite de la Lune, en ajoutant à la hauteur du nonagésime une latitude de l'orbite lunaire, prise avec la distance du nonagésime au nœud; et dans la même table, avec la parallaxe horizontale de la Lune et le complément de cette hauteur du nonagésime, il trouve la parallaxe de la Lune en latitude p cosin. h, qui est plus exacte que si l'on avoit employé la hauteur simple du nonagésime, mais qui ne l'est pas autant que la formule.

1685. On abrégeroit beaucoup les opérations des articles 1676 et 1677 par le moyen des tables du nonagésime et de sa hauteur; j'en ai publié pour Paris, et les principaux observatoires de l'Europe, dans la *Connoisssance des temps* de 1767, etc. Leur forme

(a) Μῆκος, longitude; πλάτος, latitude.

est plus commode que celle des tables qui se trouvent dans Ptolémée, Copernic, Magini, Muler, Képler, Rénérius, Boulliaud et Riccioli; elles ne supposent que l'ascension droite du milieu du ciel (1014). Par exemple, le 6 avril 1749 à $13^h\,1'\,20''$ de temps vrai, la somme du temps vrai et de l'ascension droite du Soleil (a), étant réduite en degrés, est de $211°\,18'$ (1676). On cherche dans la table, vis-à-vis de 210° ou de $14^h\,0'$, et, ayant pris les parties proportionnelles, on trouve $6^s\,1°\,23'$ pour la longitude du nonagésime, et $34°\,14'$ pour la hauteur du nonagésime à Paris, à peu-près comme dans les calculs précédents (1677). La différence vient de ce que la table est faite pour la latitude de l'observatoire royal.

Il faudroit corriger ces tables du nonagésime pour avoir égard à l'aplatissement de la Terre, en diminuant la latitude (1692). M. Méchain a donné cette correction dans la *Connoissance des temps* de 1791; on peut la trouver par de simples parties proportionnelles aussitôt qu'on a des tables pour différentes hauteurs du pole; on la peut calculer aussi par les analogies différentielles.

Si l'on fait $\frac{\text{sin. obl. cos. asc. dr.}}{\text{sin.} h} = \text{sin. } x$, on aura le changement de la longitude du nonagésime, égal à celui de la latitude multipliée par $\frac{\text{sin. } x}{\text{sin. H}}$ (4002), et celui de la hauteur du nonagésime égal à celui de la latitude multipliée par $-\cos. x$ (3999). Si l'on suppose la latitude constante, et l'obliquité O variable, on a $d\text{N} = d\text{O} \cos.\text{N}. \text{cotang}. h$ (4000) et $dh = d\text{O} \sin.\text{N}$ (3999). Ces variations sont celles du triangle ♈OQ (FIG. 93), en faisant $\text{OQ} = x$; sin. x est négatif dans le second, et le troisieme quart d'ascension droite, parcequ'alors le cos. asc. dr. est négatif.

M. Pierre Levêque, professeur à Nantes, a calculé des tables du nonagésime sur le même argument pour tous les degrés de latitude; elles ont paru à Avignon en 1776 en 2 vol. *in*-8°. M. de Lambre a fait à son usage pour Paris une table du nonagésime pour toutes les minutes de degré de l'ascension droite du milieu du ciel, et il y a employé les dixiemes de seconde, et les variations pour un changement de latitude et d'obliquité; mais elle n'est pas encore imprimée. On trouveroit aussi la longitude du nonagésime par les tables des Maisons (1062), et par celles des ascensions obliques; elles sont dans tous les anciens livres d'astrologie. (*Connoiss. des mouv. cél.* 1767). Les tables du nonagésime, calculées pour tous les dé-

(a) Elle est toute calculée dans la *Connoissance des temps*, puisque c'est le complément à 24 heures de la distance de l'équinoxe au Soleil (991).

grés, pourroient servir aussi pour trouver la longitude et la latitude par le moyen de l'ascension droite et de la déclinaison (905), puisqu'elles résolvent également un triangle dont on a deux côtés et l'angle compris (1663).

Parallaxe dans le sphéroïde aplati.

1686. La Terre ayant la figure d'un sphéroïde aplati vers les poles (2682), les différens points de la Terre ne sont pas à la même distance du centre; et la parallaxe horizontale de la Lune, qui dépend de la distance qu'il y a du centre de la Terre à la surface, ne sauroit être la même dans ces différens points.

Newton considéra le premier la différence qui en résulte sur les parallaxes de la Lune (*Princ. liv. III, prop.* 38, *cor.* 10). Depuis ce temps-là, Manfredi, Grammatici, Maupertuis dans son Traité de la parallaxe de la Lune, Euler dans les Mémoires de Berlin pour 1749, et de l'Isle (*Mém. acad.* 1757), donnerent des méthodes pour tenir compte de l'aplatissement dans les calculs astronomiques.

Toutes ces méthodes étoient sujettes à l'inconvénient d'une extrême longueur; elles exigeoient une précision scrupuleuse et fatigante dans le calcul trigonométrique; en sorte que les astronomes n'employoient point encore cette considération de l'aplatissement de la Terre dans le calcul des éclipses. Je cherchai à renfermer l'effet de l'aplatissement de la Terre dans une petite équation, qui ne changeroit rien à la méthode ordinaire de calculer les parallaxes, et qui pourroit se prendre sans aucune partie proportionnelle, ou se négliger suivant les cas, et je donnai ces formules avec des tables dans les Mémoires de l'académie pour 1756. M. du Séjour a donné une méthode analytique pour les éclipses, dans laquelle il fait entrer aussi la figure de la Terre sans alonger sensiblement le calcul (*Mém. acad.* 1764; *Traité analytique*, etc.). M. de la Grange a donné des formules dans les éphém. de Berlin 1782, et M. Trembley les a démontrées dans son *Essai de Trigonométrie sphérique*. Mayer, Lexell et M. Maskelyne en ont donné également.

1687. L'ellipse POE (FIG. 94) représente un méridien de la Terre, P le pole élevé, O le lieu de l'observateur, ON la verticale, ou la perpendiculaire à l'horizon et à la surface de la Terre en O; CNH la méridienne, ou une ligne horizontale qui est la commune section du méridien avec l'horizon; CON l'angle de la verticale avec le rayon CO, qui est à Paris de 14′ 51″ dans l'hypothese de Newton pour l'aplatissement de la Terre (1694, 2692). La perpendiculaire ON

est sensiblement égale au rayon CO, à cause de la petitesse de l'angle CON ; la parallaxe qui auroit pour base ON seroit plus petite d'un cent-millieme que la parallaxe horizontale, qui a pour base CO : mais on peut négliger ici cette différence, qui ne va qu'à un trentieme de seconde. Si l'observateur O étoit situé en N, il verroit encore la Lune L dans le même vertical où il la voit du point O, et au même point d'azimut sur l'horizon : mais cet azimut où la Lune paroît, vue du point O ou du point N, quand la Lune n'est pas au méridien, est différent de celui où elle paroîtroit, si on l'observoit du centre C de la Terre; les rayons menés du point C et du point N jusqu'à la Lune, font alors un angle que j'appelle la PARALLAXE D'AZIMUT, qui porte toujours la Lune du côté du pole élevé.

La hauteur de la Lune, vue du point N, differe de la hauteur vue du point C d'une quantité CLN, qui est la correction de la parallaxe de hauteur.

1688. J'employois ci-devant ces deux quantités pour réduire le lieu vrai de la Lune à son lieu apparent; j'en avois fait de petites tables très commodes (*Mém.* 1756) : mais, comme dans le calcul des éclipses on peut se passer de la hauteur apparente et de l'azimut vu du point O, je préférerai ici la méthode qui donne directement la parallaxe OLC, en diminuant simplement la latitude du lieu O de la petite quantité CON; je rapporterai seulement les expressions de ces quantités et de celles qui en étoient déduites pour la longitude et la latitude. Nommant p la parallaxe horizontale pour le lieu O, a le petit angle CON de la verticale avec le rayon, z l'azimut de la Lune et h sa hauteur, l'on a la parallaxe d'azimut qui répond à CN, p sin. a. sin. z, et l'équation en hauteur, p sin. a. sin. h. cos. z.

1689. Pour appliquer ces corrections aux parallaxes d'ascension droite de longitude, etc. je réduisois la parallaxe horizontale au point K où la verticale ONK rencontre l'axe de la Terre, et la réduction NK est p sin. a tang. hauteur du pole. Cette augmentation alloit jusqu'à 17″ pour Paris, quand on supposoit la parallaxe de 58′, et l'aplatissement de $\frac{1}{230}$.

1690. L'équation de la décl., ou l'angle CLK, est $\frac{p \text{ sin. } a \text{ cos. déclin.}}{\text{cos. haut. du pole}}$ ou pour Paris 23″ cos. décl.

De cette équation de la déclinaison je déduisois celle de la longitude 23″ sin. obl. cos. longit. L'obliquité étant de 23° 28′, cette quantité est de 9″ cos. longit.

1691. Enfin l'équation de la latitude, que j'avois déduite aussi de celle de la déclinaison, étoit 23″ $\left(\frac{\text{cos. obliq.}}{\text{cos. latit. } ☾} - \text{sin. déclin. tang.}\right.$

lat. ☾) qui se réduisoit, du moins à 1″ près, à $\frac{p \text{ sin. } a \text{ cos. obliq.}}{\text{cos. haut. du pole}}$, ou à une correction constante de 21″ qu'on ôtoit de la parallaxe en latitude, calculée pour Paris sur CK.

La correction est nulle pour l'ascension droite, puisque le point O et le point K sont dans le même cercle de déclinaison passant par le centre C.

Les démonstrations de toutes ces formules sont dans mes précédentes éditions; mais elles sont un peu longues; et comme je ne m'en servirai point pour les éclipses, je les supprime ici pour passer à une méthode plus simple.

1692. Cette méthode, qui fut employée pour la premiere fois par Mayer dans les Mémoires de Gottingue publiés en 1753 (*tome II*), consiste à prendre le rayon de la Terre CO au lieu de la ligne verticale ZON. On ne fait point usage du zénit apparent qui est sur la ligne verticale NOZ, mais l'on prend le zénit moyen qui est sur le rayon COA (M. Lexell l'appelle zénit vrai), et l'on calcule la parallaxe par rapport à la ligne COA; l'on a également la parallaxe OLC, qui est la vraie différence entre les lieux vrais et apparens ou vus du centre C de la Terre et du lieu O de l'observateur. A la vérité, cette différence n'est pas dans un vertical, et ne feroit pas trouver la hauteur apparente et l'azimut apparent, qui se rapportent à la verticale ZOK, puisque le plan COL n'est pas vertical : mais on ne fait pas usage dans la pratique de l'astronomie de la hauteur apparente, si ce n'est dans le méridien (4141), et la méthode dont il s'agit ici s'y employoit déja. Ainsi, le zénit supposé A, offrant plus de facilité pour le calcul ordinaire des parallaxes, il est naturel de s'en servir : c'est aussi ce qu'ont fait M. Lexell, M. de la Grange, M. Maskelyne, M. de Lambre (*Mém. de Stock.* 1788), et M. Cagnoli (*Trig. p.* 414).

Pour trouver la parallaxe dans le sphéroïde aplati, il ne faut donc que diminuer la hauteur du pole de 11′ 23″ à Paris (1653), ou, en général, de l'angle que fait la verticale avec le rayon de la Terre, dont nous donnerons une table, et prendre pour parallaxe horizontale celle qui convient au rayon de la Terre pour la latitude du lieu : on traite alors la parallaxe comme dans la sphere.

1693. Si l'on imagine que CO soit le rayon d'une sphere, l'observateur O aura son zénit en A au lieu de l'avoir en Z sur la verticale KOZ, voilà toute la différence : le zénit, les hauteurs et les azimuts, sont changés ; mais tous les astres, vus du point C et du point O, auront les mêmes positions relatives, et l'angle de parallaxe OLC sera toujours le même. Rien ne nous oblige à rapporter l'astre au point Z

plutôt qu'au point A; il suffit de rapporter l'équateur ou l'écliptique au même point A, et pour cela il suffit de diminuer la latitude du lieu O de la quantité AOZ; c'est ce que nous ferons dans le calcul des éclipses (1867, 1876, 1978, 4141), et cela nous tiendra lieu de toute réduction à raison de l'aplatissement de la Terre.

1694. L'angle de la verticale avec le rayon mené de Paris au centre de la Terre, est de 11′ 23″ (2691), en supposant l'aplatissement de la Terre égal $\frac{1}{300}$; il étoit de 14′ 51″ quand on supposoit avec Newton et la plupart des astronomes, que l'aplatissement étoit $\frac{1}{230}$: c'est celui dont nous avons long-temps fait usage dans nos calculs; on en trouvera la table dans les deux hypotheses, parmi celles de la Lune. Le sinus de cet angle est égal à l'aplatissement de la Terre multiplié par le sinus du double de la latitude (2692). Nous donnerons aussi une table de la quantité dont il faut diminuer la parallaxe sous l'équateur pour la réduire à chaque latitude, avec la méthode pour la calculer (2693).

Des inégalités de la parallaxe de la Lune, et de sa quantité absolue.

1695. La parallaxe horizontale et le diametre de la Lune sont dans un rapport constant (1633), qui est celui de 11 à 6; quand la Lune s'éloigne de nous, son diametre diminue (1384), et sa parallaxe horizontale diminue aussi dans le même rapport (1631): ainsi les trois inégalités dont j'ai parlé à l'occasion du diametre de la Lune (1507), ont lieu de même dans la parallaxe; elles sont plus grandes dans le même rapport qui est encore celui de 11 à 6 (1702).

Après qu'on eut observé les changemens du diametre de la Lune, il fut aisé de reconnoître ceux de la parallaxe; mais Ptolémée et les anciens, qui faisoient tourner la Lune dans un excentrique ou dans un épicycle, avoient déja pensé qu'elle devoit être plus ou moins éloignée de nous, et avoient établi une inégalité dans la parallaxe, quoiqu'ils ne connussent pas celle des diametres. Tous les auteurs qui ont suivi, ont distingué la parallaxe de l'apogée de celle du périgée.

Picard, vers 1666, reconnut qu'il y avoit encore deux autres inégalités sensibles dans le diametre apparent de la Lune, et par conséquent dans sa parallaxe (1507). Ces inégalités répondent à l'évection (1435), et à la variation (1445); et l'on sent assez que l'attraction du Soleil, en changeant la vîtesse de la Lune autour de la Terre, ne peut manquer de changer aussi sa distance, comme le calcul de

l'attraction l'a fait voir : ainsi la valeur de ces inégalités a été déterminée et par l'observation et par la théorie.

1696. Clairant emploie dans ses tables de la parallaxe 10 équations (*Mém. acad.* 1752, *Connoiss. des mouv. célest.* 1765) : on les applique à une constante qui est de 57′ 5″ sous l'équateur, et 56′ 58″ pour la latitude de Paris ; c'est à-peu-près celle que j'avois déja déterminée, en appliquant aux parallaxes que j'avois observées à Berlin, les équations nécessaires ; ce qui me donnoit à chaque fois la constante qu'il s'agissoit de trouver (*Mém. acad.* 1756, 1788).

1697. J'ai reconnu en même temps que le diametre horizontal de la Lune est à sa parallaxe pour Paris, comme 32 46″6 sont à 60′. J'ai déterminé ce rapport en comparant avec ces parallaxes les diametres de la Lune que j'ai observés plusieurs fois avec un héliometre de 18 pieds (*Mém. de l'ac.* 1788). J'ai donné une table de la parallaxe, qui répond à chaque diametre, dans la *Connoissance des temps* de 1764. Il y en a une dans les tables de Berlin ; mais le rapport n'est pas exactement celui que je donne ici, parceque j'ai diminué la parallaxe en diminuant l'aplatissement de la Terre (3764), et que j'ai aussi diminué le diametre de la Lune.

1698. La parallaxe 56′ 58″ n'est pas celle qui tient un milieu entre la plus petite 53′ 46″, et la plus grande 61′ 25″ (car ce milieu est de 57′ 36″) ; mais la parallaxe 56′ 58″ est celle qui répond à la distance moyenne de la Lune à la Terre, et qui differe de 57′ 36″ pour deux raisons. Premièrement, si l'on ne considere que l'orbite elliptique de la Lune, dont l'excentricité est environ 0, 055036, on trouvera que, si la parallaxe est de 56′ 58″ dans les moyennes distances pour le rayon moyen de la Terre, elle sera de 60′ 17″ dans le périgée, et de 54′ 0″ dans l'apogée : la premiere differe de la constante 56′ 58″, de 3′ 19″ ; la seconde n'en differe que de 2′ 58″, parceque le même changement sur la distance produit sur l'angle de la parallaxe un plus grand effet quand la Lune s'approche de nous que quand elle s'en éloigne. La distance moyenne est un milieu arithmétique entre la distance apogée et la distance périgée : mais la parallaxe est en raison inverse de la distance ; ainsi la parallaxe 56′ 58″, qui répond à la distance moyenne, est une moyenne harmonique entre celles qui répondent aux distances apogée et périgée : or le milieu harmonique differe beaucoup du milieu arithmétique. Par exemple, les premiers nombres qui expriment les vibrations des principaux accords de la musique, 2, 4, 6, sont en proportion arithmétique ; d'où l'on conclut que les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, qui expriment les longueurs des cordes, sont en proportion harmonique. Ces dernieres quantités, qui peuvent se représenter

représenter par les fractions décimales 0, 50; 0, 25; 0, 17, sont bien loin de la progression arithmétique, puisqu'il faudroit que la moyenne fût 0, 33, et non pas 0, 25. Voilà une premiere raison par laquelle la constante 56′ 58″ differe déja de 10″ du milieu que l'on prendroit entre la parallaxe apogée et la parallaxe périgée.

La seconde raison, c'est que l'attraction du Soleil peut augmenter la parallaxe périgée de 1′ 5″; et qu'elle ne peut diminuer la parallaxe apogée que de 12″, parceque son effet est plus considérable quand la Lune est près de la Terre, et que les attractions du Soleil et de la Terre conspirent à rapprocher la Lune de nous, que quand la Lune est fort éloignée, et que le Soleil tend à l'éloigner encore. Cette seconde raison fait que la parallaxe moyenne entre la plus grande et la plus petite est encore plus forte de 26″½, que si les équations de la parallaxe faisoient autant pour la diminution de la parallaxe constante 56′ 58″ que pour son augmentation. Les autres équations y contribuent encore; voilà pourquoi la parallaxe 57′ 36″, qui tient le milieu, est plus grande de 38″ que la constante. Il en est de même du diametre de la Lune (1506).

1699. Suivant les tables de Mayer, la plus grande parallaxe de la Lune (lorsqu'elle est dans son périgée et en opposition), est de 61′ 32″ environ; la plus petite parallaxe, qui a lieu dans l'apogée en conjonction, est de 53′ 52″, sous la latitude de Paris; il n'y avoit qu'environ 3″ de moins dans la premiere édition de ses tables, faite en 1753, dans le temps où je venois de donner le résultat de mes observations de Berlin, comparées avec celles de la Caille au cap de Bonne-Espérance en 1751 et 1752; Mayer l'a augmentée de 3″, et il est en cela d'accord avec M. du Séjour (*Traité analyt.* p. 547); mais mon résultat est un peu moindre.

La table de la parallaxe dans Mayer n'étoit pas exactement conforme à ses données; M. de Lambre l'a recalculée (*Con. des temps*, 1791) avec 57′ 11″ 4 pour l'équateur : elle ne seroit que 57′ 5″, suivant moi, plus petite de 6″ 4, dont 4″ 7 viennent de l'aplatissement de la Terre que je fais plus petit, et 1″ 7 des observations différentes, ou des conséquences tirées des observations. Cette diminution exige aussi qu'on diminue de 0″2 la premiere équation.

1700. Suivant la formule de Mayer, la parallaxe sous l'équateur, ou la parallaxe équatoriale, est 57′ 11″ 4, avec toutes les équations suivantes; elles sont placées dans l'ordre de leurs quantités, en commençant par les plus grandes : mais on voit à côté l'ordre des tables, qui est le même que celui des équations de la Lune, et qu'on a choisi pour rendre le calcul plus commode.

TABLE XIX.	57′ 11″4 —	3′ 7″7	cos. anomal. ☾.
	+	10,0	cos. 2 anomal.
	—	0,3	cos. 3 anomal.
V.	—	37,3	cos. Arg. évection.
	+	0,3	cos. 2 Arg. évection.
XX.	+	26,0	cos. 2 dist. ☾☉
	—	1,0	cos. dist. ☾☉
	+	0,2	cos. 4 dist. ☾☉
IX.	+	2,0	cos. 2 (apog. ☾ — ☉)
	+	0,2	cos. 3 (apog. ☾ — ☉)
VI.	+	1,0	cos. (Arg. évect. + anom. ☉)
XXI.	+	0,8	cos. (2 arg. lat. — anom. ☾ corrig.)
III.	—	0,8	cos. (2 dist. ☾☉ — anom. ☉)
II.	—	0,7	cos. (2 dist. ☾☉ + anom. ☉)
VII.	+	0,6	cos. (Arg. évect. — anom. moy. ☾)
X.	+	0,4	cos. 2 (☊ — ☉), ou 2 (☉ + supp. ☊)
I.	+	0,3	cos. anom. moyenne ☉
VIII.	+	0,2	cos. (anom. moy. ☾ — anom. moy. ☉)
IV.	+	0,1	cos. (2 dist. ☉☾ + anom. moy. ☾)

Au lieu de 57′ 11″ 4 qui est la parallaxe sous l'équateur, on a, suivant Mayer, 57′ 2″ ½ pour la latitude de Paris : c'est la parallaxe que j'avois déterminée (*Mém. acad.* 1752, 1753 et 1756, *pag.* 378), et que Clairaut avoit adoptée dans la derniere édition de ses tables (1696) : elle étoit en nombres entiers 57′ 3″; celle qui étoit employée dans les tables de Mayer est plus petite d'une demi-seconde ; mais mes nouvelles tables supposent la parallaxe pour Paris 56′ 58″3 ; il faudroit y ajouter 2″ 6, si l'on vouloit avoir celle qui répond au rayon moyen de la Terre, ou au rayon d'une sphere égale à la Terre (2701) : c'est cette parallaxe moyenne 57′ 1″ dont je ferai usage.

Cette diminution de la parallaxe, dans mes nouvelles tables, m'a paru indispensable, comme je l'ai fait voir dans mon quatrieme mémoire sur la parallaxe de la Lune, qui est dans le volume de l'académie pour 1788, parceque les mesures des degrés de la Terre en différens pays, les expériences du pendule, et les recherches des géometres sur la théorie de la figure de la Terre (3764), ont concouru à prouver que l'aplatissement de la Terre est moindre que je ne le supposois.

1701. La Caille, plusieurs années après son retour du Cap, voulut aussi examiner le résultat de toutes les observations qui avoient été faites en correspondance avec lui ; il conclut de 40 observations

faites en 22 jours différens à Berlin, à Paris, à Greenwich, à Stockholm, à Bologne, que la plus grande parallaxe horizontale de la Lune périgée et syzygie, est de 61′ 23″ 1 à l'égard d'un observateur placé sous le pole, et de 61′ 41″ 7 sous l'équateur; en supposant l'aplatissement $\frac{1}{300}$ du diametre de l'équateur, il trouvoit la constante (1696) 56′ 56″ 0 sous le pole, et 57′ 13″ 1 sous l'équateur (*Ephémérides de* 1765 — 74; *Mém. de* 1761, *pag.* 51) : c'est 1″ 2 de plus que moi, en réduisant son résultat à la même hypothese.

Dans l'hypothese de Bouguer (2697), la Caille trouve la constante (1696) de 56′ 56″ sous le pole, de 57′ 14″8 sous l'équateur. M. du Séjour, ayant examiné de nouveau les observations faites en 1751 et 1752 au Cap et en Europe (*Mém.* 1782, *pag.* 343), trouve 2″ 8 de plus que moi, ou 56′ 56″ 5 pour le pole. Il observe que, si l'on reduisoit l'aplatissement à $\frac{1}{300}$, il faudroit diminuer la parallaxe polaire de 1″ 8, et que, si on le portoit à $\frac{1}{301}$, il faudroit l'augmenter de 1″1. Au reste ces différences sont peu sensibles, eu égard à la nature des observations qui ont servi à déterminer la parallaxe (voy. son *Traité analytique, pag.* 527, 547).

Mais si l'on prend un milieu entre nos trois résultats, on aura 57′ 5″ sous l'équateur, 56′ 53″2 sous le pole, 57′ 1″ pour le rayon moyen, et 56′ 58″3 pour Paris.

La Caille trouvoit le rapport du diametre horizontal de la Lune à la parallaxe horizontale sous le pole, égal à celui de 30′ à 54′ 41″$\frac{1}{2}$, en supposant le diametre de la Lune tel qu'il paroît avec une lunette ordinaire de six à sept pieds. Ce rapport differe un peu du mien, parceque j'ai employé des diametres de la Lune mesurés avec une lunette de 18 pieds, qui sont plus petits de 2″ ou 3″ que ceux de la Caille, mesurés avec des lunettes de six pieds, soit que la différence vienne réellement de l'effet des lunettes, soit qu'il y ait moins d'exactitude et plus de difficulté à observer avec une petite lunette telle qu'il l'a employée (1388, 1395).

1702. Le rapport entre le diametre horizontal de la Lune et sa parallaxe pour Paris est celui de 32′ 46″6 à 60′. Pour le rayon moyen, c'est celui de 32′ 45″2 à 60 minutes; c'est aussi celui de 30′ à 54′ 57″4. Ce rapport est sensiblement et en nombres ronds celui de 30′ à 55′ ou de 6 à 11; ainsi le rayon de la Lune est $\frac{3}{11}$ du rayon moyen de la Terre. En calculant plus rigoureusement, c'est 0,020425; multipliant cette fraction par le rayon de la Terre 1432 $\frac{1}{2}$ lieues, on aura celui de la Lune. Le cube de la même fraction est $\frac{1}{49}$; donc le volume ou la grosseur de la Lune est la 49e partie du volume ou de la grosseur de la Terre. Cependant comme la densité de la Lune est

moindre que celle de la Terre (3570), il se trouve que la masse, la quantité de matiere, le poids, ou la puissance attractive dans la Lune, est environ 66 fois moindre que dans la Terre, comme on l'a reconnu par son action sur les marées (3569, 3780).

1703. La parallaxe de la Lune pour le rayon moyen de la Terre (2701) par un milieu entre la plus grande et la plus petite, est de 57′ 39″; si l'on divise le rayon moyen de la Terre, supposé de 3269511 toises (2701), par le sinus de 57′ 36″, on aura la distance moyenne de la Lune en toises; et, divisant par 2283, on aura 85403 lieues. La plus grande distance, ou celle qui répond à la plus petite parallaxe 53′ 49″, est 91485; mais la distance qui répond à la plus grande de toutes les parallaxes pour le rayon moyen, ou à 61′ 29″, est 80079 lieues; ainsi la distance qui tient le milieu entre les extrêmes est 85782; mais ce qu'on peut plutôt appeller la distance moyenne, est celle qui répond à la constante 57′ 1″ indépendante des inégalités : celle-là est 86351 lieues.

1704. Pour sentir le degré de certitude que comporte ce résultat, il suffira de remarquer que la parallaxe de la Lune est connue certainement à 4″ près (1701); chaque seconde de parallaxe produit à peine 25 lieues sur la distance; ainsi nous sommes assurés de ne pas nous tromper de 100 lieues sur 86 mille que contient la distance de la Lune à la Terre; nous ne connoissons pas aussi bien celle qu'il y a de Constantinople à Paris.

De la parallaxe du Soleil, et de sa distance à la Terre.

1705. Après avoir vu combien les anciens s'étoient trompés sur la distance de la Lune à la Terre (1655), quoique facile à déterminer, on ne sera pas étonné de voir qu'ils n'eussent aucune idée de celle du Soleil, du moins avant le temps d'Hipparque. C'est surtout ici que les anciens devoient dire comme Pline : *Incomperta haec et inextricabilia, sed tam prodenda quànt sunt prodita. . . . . Nec ut mensura, id enim velle pene dementis otii est, sed ut tantùm aestimatio conjectandi constet animo* (lib. II, c. 23).

Les opinions anciennes sur la distance du Soleil à la Terre sont rapportées dans Plutarque (*de placitis Phil. III*, 31); et dans Pline (*lib. II, c.* 21). On voit que Pythagore, d'après les proportions harmoniques, supposoit le Soleil trois fois aussi loin que la Lune, ou seulement de 16 à 18 mille lieues, au lieu de 34 millions qu'on a trouvés de nos jours.

1706. On ne connoissoit donc point la distance et la parallaxe du Soleil avant Aristarque de Samos (318, 1708), qui, vers l'an 264

avant l'ere vulgaire, trouva que la parallaxe n'alloit pas au-delà de 3', en sorte que la distance du Soleil surpassoit 1146 demi-diametres terrestres; c'étoit avoir beaucoup fait, et l'on a été 1800 ans avant que de trouver rien de mieux.

1707. Posidonius, deux cens ans après, donnoit au demi-diametre de la Terre 38182 stades, suivant le calcul de Riccioli, et à la distance du Soleil 502000040: cela feroit 13148 demi-diametres de la Terre, au lieu de 23984 que nous trouvons actuellement. C'étoit beaucoup pour ce temps-là de ne se tromper pas de moitié; mais on ne peut encore l'attribuer qu'au hasard d'une heureuse conjecture. Il faut même supposer une interprétation favorable du texte de Pline, pour trouver cette valeur aussi approchée : *Posidonius non minùs 40 stadiorum a Terra altitudinem esse in qua nubila ac venti nubesque proveniant . . . . . . sed a turbido ad Lunam* VICIES CENTUM MILLIA *stadiorum, inde ad Solem quinquies millies. Eo spatio fieri ut tam immensa ejus magnitudo non exurat terras.* L'expression *quinquies millies*, qui exprime la distance de la Lune au Soleil, signifie 5000 stades, suivant quelques commentateurs: mais le P. Riccioli observe que, suivant la coutume des auteurs latins, il faut sous-entendre *centena millia;* ce qui fait 500 millions de stades depuis la Lune jusqu'au Soleil; à quoi ajoutant la distance de la Lune aux nuages 2 millions de stades, et celle des nuages à la Terre 40 stades, on trouve 502 millions et 40 stades pour la distance du Soleil selon l'hypothese de Posidonius. Il y a des éditions où on lit 400 stades pour la hauteur des nuages; mais le texte est visiblement altéré, car les anciens ne pouvoient pas supposer 20 lieues pour la distance des nuages, que l'on voit si souvent toucher le sommet de nos montagnes. Cependant Riccioli a fait cette espece de faute, en mettant 400 au lieu de 40, et l'imprimeur en a ajouté une autre, en mettant un chiffre de trop dans la somme (Pline, *II*, 23; Riccioli, *Almag. novum*, *tom. I*, *pag.* 111).

Pline pensoit que la distance du Soleil devoit être 12 fois aussi grande que celle de la Lune, parceque la durée de sa révolution est 12 fois aussi longue; mais cette conséquence n'avoit aucun fondement.

1708. Aristarque avoit compris que le rayon de la Terre étoit une base insensible, par rapport à la distance qu'on vouloit mesurer, parceque la Terre, vue du Soleil, paroît sous un trop petit angle; il imagina donc d'employer la distance de la Lune à la Terre, qu'il étoit plus facile de connoître par la parallaxe, et de chercher l'angle sous lequel cette distance devoit paroître, vue du Soleil; sa

méthode se trouve dans un ouvrage de lui (318), que Commandinus publia en 1572, et Wallis en 1688 : elle est ingénieuse, et ne suppose que l'observation exacte de la quadrature de la Lune.

Lorsque la Lune est à moitié éclairée, ou lorsque la ligne qui sépare la lumiere de l'ombre sur le disque lunaire, est droite, en sorte qu'on voie sur le disque de la Lune un demi-cercle parfait, alors le rayon qui va du Soleil à la Lune SV (FIG. 82), est nécessairement perpendiculaire au rayon TV, par lequel nous appercevons la Lune; car toutes les fois que cet angle devient différent de l'angle droit, son sinus verse differe du rayon, et la partie éclairée ne sauroit être égale au rayon du disque lunaire (1409) : si dans le même instant on mesure l'angle STV entre la Lune et le Soleil, ou l'angle d'élongation (1141), on connoîtra deux angles du triangle STV, et par conséquent le troisieme angle S : or le côté TV, distance de la Lune à la Terre, étoit supposé connu (1655); ainsi il étoit facile de trouver la distance TS du Soleil à la Terre.

Cette méthode parut à Képler, en 1618, digne d'être employée par Galilée et Marius, qui se servoient alors des lunettes, et, dans ses éphémérides pour 1619, il exhorte les philosophes à faire leurs efforts pour déterminer par ce moyen la parallaxe du Soleil, qui jusqu'alors avoit été conclue de la grandeur des éclipses de Lune, et de celle de l'ombre de la Terre dans ces éclipses, avec des incertitudes et des variétés prodigieuses (1711).

1709. Ce qui rend insuffisante la méthode d'Aristarque, c'est d'un côté la difficulté de déterminer exactement le temps où l'angle V est droit, de l'autre la petitesse de l'angle S; la Lune peut faire dans son orbite un arc de 10′, et l'angle V changer d'autant, sans que la grandeur apparente de sa partie éclairée augmente de 2″ ½ par rapport à nous : or l'angle TSV n'est pas de 10′, et 2″ ½ ne peuvent point se distinguer; ainsi l'on ne peut pas s'assurer de cet angle par le moyen de la partie éclairée.

Pour faire bien sentir la vérité de cette objection, considérons que la partie visible de l'hémisphere éclairé de la Lune est égale au sinus verse de l'angle V (1409); et supposons que l'angle SVT soit plus petit de 10′ que l'angle droit, comme si l'angle à la Terre STV étoit lui-même un angle droit : le sinus de 10′ est de 29 parties, le diametre étant de 20 mille; et ces 29 parties ne nous paroissent que 2″ ½, puisque le diametre entier ne paroît que de 30′; ainsi la partie lumineuse que nous voyons, n'aura diminué que de 2″ ½, nous ne verrons sur le disque lunaire aucune différence sensible; la Lune paroîtra aussi bien dichotome que lorsqu'elle étoit exactement en

quadrature : cependant alors l'élongation T sera de 90°; et l'angle V paroissant de 90°, puisque la Lune paroît dichotome, on trouvera zéro au lieu de 10', pour la valeur de l'angle S. Il seroit également possible de trouver une quantité négative, c'est-à-dire, moins que rien, pour la parallaxe du Soleil.

1710. Cependant Vendelinus ayant observé souvent à Majorque, en 1650, ces quadratures de la Lune, le matin et le soir, crut trouver que la dichotomie de la Lune, arrivoit lorsque l'angle T étoit de 89° 45', et même un peu plus grand, c'est-à-dire que l'angle VST n'étoit pas de 15', et la parallaxe du Soleil de 15″ (*Ricc. I*, 109 et 731). Riccioli, après beaucoup d'observations semblables, assuroit que l'angle au Soleil étoit de 30', ou du moins n'en différoit que de très peu de minutes; il supposoit la parallaxe de 28″ à 30″; il ne pouvoit pas encore se résoudre à la faire aussi petite que Posidonius et Vendelinus (*I*, 734). De là il résulte que la méthode d'Aristarque pouvoit bien nous apprendre que la parallaxe du Soleil n'étoit pas au-dessus d'une demi-minute; mais il étoit difficile de s'assurer d'une plus grande précision. (M. le Monnier, *Instit. astron. pag.* 452.)

1711. Ptolémée employa, pour déterminer la distance du Soleil, la méthode d'Hipparque, fondée sur l'observation des éclipses de Lune; et cette méthode lui auroit fait découvrir la distance du Soleil, si elle n'eût pas été prodigieusement grande par rapport à celle de la Lune, qu'il employoit dans cette recherche (*Alm. V*). Soit AO le diametre du Soleil (FIG. 99), GB celui de la Terre, APO le cône d'ombre que produit la Terre dans les éclipses de Lune. La durée des éclipses avoit fait connoître que CE, c'est-à-dire, la largeur du cône d'ombre, traversé par la Lune, étoit d'environ $1^\circ \frac{1}{3}$, ou deux fois et $\frac{3}{5}$ le diametre du Soleil, c'est-à-dire, $\frac{13}{5}$ du diametre du Soleil. Il supposoit le diametre AO du Soleil de $31' \frac{1}{3}$, aussi bien que celui de la Lune pleine et apogée, la distance TL de la Lune à la Terre de $64 \frac{1}{6}$ demi-diametres terrestres; il n'étoit pas difficile d'en conclure par la trigonométrie rectiligne, que la distance TS du Soleil devoit être de 1210 fois le demi-diametre TB de la Terre; et il s'ensuivoit que la parallaxe du Soleil devoit être de 2′ 50″; ainsi Ptolémée croyoit le Soleil 20 fois plus près de nous qu'il ne l'est réellement, et Copernic le rapprocha encore.

Pour trouver le rapport de TB à TS, Ptolémée fait TM = TL, et dans le triangle TMQ il trouve MQ; parceque MQ : CL :: 5 : 13 par observation, il trouve CL; mais puisque TM = TL, LC + MR = 2 TB, d'où ôtant LC et MQ, il reste QR. Ptolémée considere ensuite qu'à cause des triangles semblables, on a TS : SM :: TA : AQ

:: TB : QR. Mais TB et QR sont déja connus par les deux opérations précédentes ; ainsi l'on a le rapport de TS à SM, et celui de la distance de la Lune à celle du Soleil; d'où Ptolémée conclut que TB est à TS, comme 1 est à 1210 (Ptol. *lib. V*; Riccioli *I*, 107). Riccioli réduit cette méthode aux regles ordinaires de la trigonométrie rectiligne ; mais j'ai mieux aimé indiquer ici la maniere dont les anciens procédoient pour déduire le rapport des inconnues aux quantités données par les rapports de celles-ci entre elles. Cette méthode est expliquée dans M. Le Monnier, et dans Street; elle avoit été employée par Albategnius (*cap.* 30); Régiomontanus (*Epit. Alm. lib. V*); Copernic (*lib. IV, cap.* 19); Longomontanus (*Astr. dan. lib. I; Theoricor. cap.* 9); Boulliaud (*Astr. phil. lib. IV*). Mais Lansberge fait voir que Albategnius, Copernic et Tycho, s'étoient trompés dans leurs données, et avoient admis des choses incompatibles et incohérentes (Riccioli, *I*, 107).

1712. Tycho employoit la distance du Soleil de 1142 demi-diametres de la Terre (*Progymn. pag.* 97). Il dit ensuite que les éclipses de Lune prouvent suffisamment que la parallaxe horizontale du Soleil est de trois minutes, mais en convenant que cette détermination n'étoit pas sans incertitude (*pag.* 415 et 463). En effet, il dit ailleurs (*Progymn. pag.* 414) qu'il a mesuré quelquefois avec soin la parallaxe de Mars en opposition, pour savoir s'il étoit plus près de nous que le Soleil (comme cela devoit être, suivant l'hypothese de Copernic et la sienne); et il ajoute qu'il parlera, dans un temps plus convenable, de ce qu'il a trouvé à ce sujet : mais ce qui me persuade que ses efforts avoient été inutiles, c'est qu'il réfute ensuite (*pag.* 661) *Th. Digges*, qui avoit donné une méthode pour trouver les parallaxes (1641); il lui oppose la difficulté qui naît des réfractions, et du mouvement propre de Mars; il ajoute seulement qu'il croit y être parvenu par un autre moyen dont il parlera dans une autre occasion : mais probablement Tycho n'avoit point, sur la parallaxe du Soleil ou de Mars, de résultat dont il fût bien assuré ; il avoit seulement adopté le résultat de Copernic.

1713. Képler apperçut, avec la sagacité qui lui étoit ordinaire, que la parallaxe de Mars étoit absolument insensible, à plus forte raison celle du Soleil : il l'avoit d'abord supposée de 2', il la réduisit à une minute (*Epit. astr. Copern. pag.* 479).

1714. Halley, en rendant compte de l'observation du passage de Mercure sur le Soleil, qu'il avoit faite à l'isle de Sainte-Hélene, en 1677, jugeoit la parallaxe de 25''; cependant il en trouvoit 45'', en comparant le mouvement de Mercure en longitude, observé de 31'

14''

14″ $\frac{1}{3}$, dans l'espace de 5ʰ 14′ 20″, avec le mouvement calculé par les tables de Street, qu'il trouvoit de 30′ 50″ seulement: cette différence de 24″ $\frac{1}{2}$ lui paroissoit être l'effet de la parallaxe de Mercure, d'où il suivoit que celle du Soleil devoit être de 45″. Il convient que les élémens qu'on emploie dans cette recherche y jettent beaucoup d'incertitude; mais il ajoute que la même méthode, appliquée au passage de Vénus, donnera un résultat plus certain (2045).

1715. Halley convenoit que les plus habiles astronomes de son temps ne croyoient pas que la parallaxe fût de 45″; mais il pensoit qu'ils n'avoient que des probabilités sur cette matiere. Cependant lui-même la jugeoit plus petite: une de ses raisons étoit celle de Street, qui supposoit la parallaxe du Soleil entre 10″ et 20″, parceque, disoit-il, si elle étoit seulement de 10″, Vénus seroit plus grande que la Terre, ce qui n'est pas probable, la Terre ayant la Lune qui tourne autour d'elle, et ce satellite étant la marque d'une prééminence et d'une grandeur au-dessus de Vénus. Si la parallaxe du Soleil alloit à 20″, alors Mercure seroit plus petit que la Lune; cependant il n'y a pas d'apparence qu'une planete principale, ou du premier ordre, soit moindre qu'une planete du second ordre; toutes ces raisons étoient bien peu concluantes.

Mais la parallaxe de Mars en opposition n'avoit pas paru sensible avec les plus grands instrumens de Tycho-Brahé; cela persuadoit à Halley qu'elle n'étoit pas d'une minute, d'où il s'ensuivoit que celle du Soleil ne passoit pas 25″; et il dit qu'après avoir tout examiné, il est très persuadé que la parallaxe du Soleil est d'environ 25″. Telles étoient les incertitudes des astronomes sur la parallaxe du Soleil, avant que les observations, faites par l'académie des sciences, eussent prouvé que cette parallaxe n'alloit pas à plus de 10″.

1716. Cassini, dans une lettre écrite au marquis Malvasia, en 1662, et dans un mémoire qui a pour titre, *les Elémens de l'astr. vérifiés par le rapport des tables aux observations de M. Richer*, publié en 1684, dit qu'on avoit proposé deux hypotheses, qui, sur les hauteurs méridiennes du Soleil, faisoient à-peu-près le même effet dans les climats d'Europe; de sorte qu'il n'y avoit pas de moyen assez certain de distinguer évidemment, par observation, quelle étoit la véritable hypothese. La premiere supposoit la parallaxe du Soleil insensible ou au-dessous de 12″, et dans cette hypothese les réfractions étoient invariables pendant toute l'année: dans l'autre on supposoit la parallaxe d'une minute, comme Képler; mais cette supposition obligeoit de changer la réfraction dans le cours de l'année. Les observations des quadratures de la Lune et de la parallaxe de Mars dans ses oppo-

sitions, favorisoient la premiere hypothese, que nous savons actuellement être conforme à la vérité; mais la distance du Soleil à la Terre qui en résultoit étoit prodigieuse. Cassini s'étoit arrêté à la derniere hypothese dans les observations de l'équinoxe du printemps qu'il publia à Bologne en 1656, après avoir tracé la méridienne de S.-Pétrone; cependant il balançoit encore entre ces deux hypotheses, en 1662, comme on le voit dans les *Ephémérides* de Malvasia pag. 155; et il souhaita, en 1671, que cette incertitude fût levée par le voyage de Caïenne: ce fut un des objets de l'instruction dont on chargea Richer (602, 2669).

1717. Les premieres tentatives qui furent faites en France pour trouver la parallaxe de Mars, sont dans l'ouvrage de Cassini, que j'ai cité. Il compare les observations que Richer avoit faites à Caïenne, le 5 septembre, le 9 et le 24, avec celles que Picard et Romer faisoient en même temps à Paris; et il trouve que Mars y avoit paru plus abaissé de 15″, par rapport à l'étoile, qu'à Caïenne; ce qui donnoit la parallaxe horizontale de Mars $25''\frac{1}{2}$, et celle du Soleil de $9''\frac{1}{2}$: cela donnoit pour sa distance à la Terre 21712 demi-diametres de la Terre.

1718. La même année Cassini, aidé de Romer et Sédileau, employa, pour chercher la parallaxe de Mars, la méthode des ascensions droites (1642), en comparant les observations faites quatre heures avant le passage au méridien, et quatre heures après; on trouvoit le plus souvent une différence de 2″ de temps entre la variation apparente et celle qui devoit avoir lieu réellement; d'où Cassini tiroit la parallaxe de Mars de 24 ou 27″.

Le 9 septembre 1672, la nuit même de l'opposition de Mars, il étoit près de deux petites étoiles sur le même parallele, qui servirent pour les observations de plusieurs jours. Entre $8^h\ 36'$ du soir et $15^h\ 56'$, la variation apparente de l'ascension droite de Mars en temps fut observée de $21''\frac{1}{2}$; le changement véritable déduit des mouvemens journaliers ne devoit être que de $19''\frac{3}{4}$; la différence de $1\frac{3}{4}$ étoit l'accélération apparente, causée par l'effet de la parallaxe; Mars passoit au méridien à $12^h\ 8'$, sa déclinaison étant de $10°\ 34'$. Il est aisé d'en conclure (1648), avec Cassini, que la parallaxe horizontale de Mars étoit de $24''\frac{3}{4}$.

Les mêmes recherches furent continuées jusqu'à la fin de septembre; car, comme les différences cherchées étoient petites, il falloit un très grand nombre d'observations. Cassini convient qu'il est arrivé quelquefois qu'on n'a pas trouvé de différence entre les mouvemens horaires apparens et les véritables, et quel-

quefois même un peu de différence contraire à l'effet de la parallaxe : on s'arrêtoit, dit-il, à ce qu'on trouvoit plus souvent, et par des observations plus choisies.

1719. On manqua, en 1672, l'observation la plus décisive : le 1 octobre Mars passa sur la moyenne des trois étoiles ♃ dans l'eau du Verseau, et il la cacha par son disque à 10^h du soir, comme on le trouve par la comparaison des observations faites le même jour; mais les nuages déroberent cette curieuse observation. On mesura cependant, la même nuit, plusieurs distances de Mars à cette étoile, qui servent à trouver le temps de cette conjonction : mais en les comparant ensemble, on y trouve de petites différences irrégulieres; quelques unes ne donnent point de parallaxe, d'autres en donnent trop, et d'autres sont même en sens contraire à l'effet de la parallaxe. Cassini soupçonnoit que ces différences pouvoient venir de quelque réfraction dans l'atmosphere de Mars (2275).

1720. Picard, à Brion en Anjou, observa les mêmes différences d'ascension droite le premier octobre 1672; il trouva la parallaxe de Mars absolument nulle en comparant son observation avec celle de Caïenne; mais, en comparant ses observations entre elles, par la méthode de angles horaires (1647), il la trouva double de celle de Cassini; tout cela prouve combien ces observations sont délicates, et provient peut-être aussi de l'inflexion (1992). La Hire observa aussi Mars à Paris avec assiduité depuis le 22 septembre 1672 jusqu'au 29 octobre suivant; pendant ce temps-là il le vit passer vers un grand nombre de petites étoiles qui sont dans l'eau d'*Aquarius*, et il trouva de si grandes variétés dans les résultats, qu'il jugea la parallaxe insensible, comme on le voit dans ses tables, *pag.* 6 : « A peine avons-nous trouvé, dit-il, une parallaxe sen- « sible dans le Soleil; ainsi l'on peut en sûreté la négliger si on « le juge à propos. Si cependant on veut employer pour le Soleil « une parallaxe de 6″, on aura la distance moyenne du Soleil à la « Terre de 34377 demi-diametres terrestres. »

1721. Flamsteed, qui avoit fait les mêmes observations à Derby, écrivoit qu'ayant mesuré la distance de Mars à deux étoiles, il avoit reconnu que sa parallaxe n'étoit certainement pas de 30″, et que la parallaxe du Soleil n'étoit pas de plus de 10″ (*Philos. trans. n°.* 89, *pag.* 5118). Quelques mois après, il étoit persuadé que la parallaxe de Mars ne passoit pas 25 secondes, et que celle du Soleil étoit au plus de 10″ (*Ib. pag.* 6100).

1722. En 1704 et 1719 Maraldi profita de la situation de Mars périgée pour observer sa parallaxe, il la trouva de 23″;

d'où résultoit la parallaxe du Soleil de 10 secondes. (*Mém. acad.* 1706, 1722).

Pound et Bradley firent aussi, en 1719, de semblables observations avec une lunette de 15 pieds. Halley rapporte qu'il les vit observer souvent, et que dans toutes leurs observations ils ne trouverent jamais la parallaxe du Soleil plus grande que 12″, et jamais moindre que 9″.

Cassini, en 1736, observa pendant plusieurs jours, à Thury, près Paris, Mars qui étoit en opposition et fort près de l'étoile μ des Poissons; il trouva la parallaxe du Soleil entre 11″ et 15″.

1723. La Caille, ayant fait un voyage au Cap de Bonne-Espérance pour y travailler au catalogue des étoiles (716), en profita pour faire sur la parallaxe de la Lune et sur celle du Soleil un grand nombre d'observations. Il a comparé à ses observations celles qui avoient été faites à Greenwich par Bradley, à Bologne par Zanotti, à Paris par Cassini de Thury et M. le Gentil, à Stockholm et Upsal par Wargentin et Strommer, à Hernosand par Schenmark avec des quarts de cercles de six pieds, ou des lunettes de 7 à 8 pieds, garnies de micrometres; ces observations, faites depuis la fin du mois d'août jusqu'au 6 octobre 1751, étant toutes réduites au 14 septembre 1751, jour de l'opposition de Mars au Soleil, donnent des résultats qui sont tous compris entre 24 et 34 secondes; mais par un milieu pris entre 27 résultats, la Caille trouve 26″8 pour la parallaxe horizontale de Mars ce jour-là. La distance de Mars à la Terre étoit alors à celle du Soleil, comme 3841 à 10047; d'où il résulte que la parallaxe horizontale du Soleil étoit alors de 10″$\frac{1}{4}$, et que, dans la moyenne distance du Soleil, elle seroit de 10″ 2 ou 10″$\frac{1}{5}$. Il examine ensuite 41 observations faites par d'autres astronomes, et trouve encore le même résultat.

Dans le temps où la Caille étoit au Cap, Vénus se trouva aussi dans sa conjonction inférieure, le 31 octobre 1751, et elle fut observée au Cap et en Europe; il est vrai que le temps fut très peu favorable aux observations; mais la Caille en a calculé cinq qui donnent la parallaxe du Soleil de 9″8, 9″85, 10″4, 10″5, et 11″4: ainsi, prenant un milieu, on a 10″38 pour la parallaxe horizontale du Soleil dans sa moyenne distance par les observations de Vénus; et toutes compensations faites, la Caille termine ses recherches là-dessus (*Introd. aux Ephémérides de 1765—1774, pag. 1*), en disant qu'on peut établir comme une quantité certaine, à moins d'un quart de seconde près, que la parallaxe horizontale du Soleil dans sa distance moyenne à la Terre, est de 10″$\frac{1}{4}$.

1724. M. du Séjour, en discutant ces observations, trouve 9″5 (*Traité analyt.* p. 568). Il est vrai que les observations de M. Garipuy n'ont donné que 8″½ (*Mém. de l'ac. de Toulouse, tom. I*); mais elles n'ont été publiées que depuis qu'on connoît d'ailleurs la parallaxe. La théorie de la Lune, comparée avec les observations, donnoit une parallaxe plus petite, Mayer ne la trouvoit pas de 8″ (3631). On auroit pu la chercher par le moyen de quelque comete (3156), mais l'occasion ne s'en étoit pas présentée.

1725. Tel étoit l'état de nos connoissances sur la distance du Soleil quand les passages de Vénus sur le Soleil sont arrivés en 1761 et 1769. Si l'on a toujours mis au nombre des époques mémorables celles des progrès de l'esprit, tout ce qui nous procure des connoissances nouvelles est pour nous un événement célebre : le passage de Vénus étoit un de ces phénomenes rares, prédit et attendu depuis plus d'un siecle; il n'avoit jamais été observé depuis qu'on en connoissoit l'importance. C'étoit cependant de tous les phénomenes célestes celui dont on devoit espérer la plus exacte détermination de la parallaxe du Soleil, et par conséquent de toutes les distances des planetes à la Terre (2151). Ces passages nous ont fait connoître que la parallaxe du Soleil est à-peu-près de 8 secondes et demie ; car l'observation faite au Cap en 1761 a donné la parallaxe de 8″6 pour le jour de l'observation, suivant Short (*Phil. trans.* 1763), et suivant M. Pingré, *Mém. académ.* 1761 ; ce qui fait presque 8″8 pour les moyennes distances ; et par les observations faites à la Baie d'Hudson en Californie, et à l'isle de Taïti, je trouve 8″6 pour la parallaxe du Soleil dans les moyennes distances du Soleil et les moyennes latitudes terrestres (2151). Il y a treize centiemes de seconde de plus ou de moins dans le périgée et dans l'apogée, et deux centiemes de seconde de plus ou de moins sous l'équateur ou sous les poles. M. Pingré trouve 8″8 (*Mém.* 1772), M. du Séjour, 8″84 (*Mem.* 1781, *pag.* 330; *Traité analyt.* p. 486). Mais M. Lexell trouve 8″6 comme moi (2151.)

1726. L'extrême petitesse de la parallaxe du Soleil fait qu'on peut, dans un grand nombre d'occasions, la négliger, et supposer que les rayons qui vont du Soleil à tous les points de la Terre sont paralleles entre eux, de la même maniere que si le Soleil étoit à une distance infinie de nous, puisque des lignes qui font entre elles un angle si petit ne different pas de celles qui seroient exactement paralleles, ou qui ne feroient point d'angle : c'est la supposition que nous ferons dans les préliminaires du calcul des éclipses (1782).

1727. La distance du Soleil à la Terre est plus petite au mois de décembre qu'au mois de juin d'une trentieme partie, parceque l'ex-

centricité de l'orbite terrestre est de o, 0168 (1216, 1278). Voilà pourquoi la parallaxe horizontale du Soleil doit être d'un quart de seconde plus grande au mois de janvier qu'au mois de juillet.

Lorsqu'on a une table des distances du Soleil à la Terre (1249), il suffit de diviser la parallaxe moyenne 8″6 par la distance actuelle du Soleil pour avoir la parallaxe du Soleil dans un temps donné. On trouvera la parallaxe du Soleil à chaque jour de l'année et à chaque degré de hauteur dans la *Connoissance des temps* de 1783.

1728. La parallaxe du Soleil étant connue, sa distance absolue est aisée à trouver (1634) : car le sinus de 8″6 est au rayon, comme le demi-diametre de la Terre est à la distance du Soleil ; et comme le rayon d'un cercle est 23984 fois plus grand que le sinus de 8″6, il s'ensuit que la distance du Soleil est de 23984 fois le rayon de la Terre, ou environ 34 357 480 lieues communes de France, de 2283 toises chacune. Les distances des autres planetes sont aisées à conclure de celles-ci (1222.)

1729. J'ai annoncé (1098) que, même suivant Tycho, le Soleil étoit plus gros que la Terre ; cela suit évidemment de la quantité qu'il supposoit pour la parallaxe du Soleil, qui étoit de 3′ (1712) ; le demi-diametre du Soleil étant supposé de 15′ vu de la Terre, et celui de la Terre de 3′ vu du Soleil, il s'ensuit que le Soleil devoit être cinq fois plus large que la Terre, ou 125 fois plus gros et plus pesant, même dans les principes de Tycho ; en sorte qu'il faisoit tourner autour de la Terre un corps bien plus gros qu'elle ; ce qui est contre les idées de physique dont il s'appuyoit pour combattre le système de Copernic.

On peut actuellement comparer entre elles les distances du Soleil et de la Lune, et reconnoître que la distance moyenne de la Lune est 398 fois plus petite que celle du Soleil, comme nous l'avons supposé (1409) ; les parallaxes seules suffisent pour donner ce rapport ; celle de la Lune est 57′ 1″ (1700) ; ainsi elle contient 398 fois la parallaxe du Soleil supposée de 8″6 ; donc la distance du Soleil est dans le même rapport, c'est-à-dire 398 fois plus grande que la distance moyenne de la Lune à la Terre.

Les parallaxes et les distances des autres planetes se peuvent conclure facilement du rapport des distances donné par la loi de Képler 1224. On les trouvera dans la table (1398.)

Les principes que nous venons d'établir sur les parallaxes, nous conduiront maintenant aux calculs des éclipses de Lune et de Soleil, qui seront l'objet du livre suivant, et qui ont peu de difficulté, quand on entend bien le calcul des parallaxes.

LIVRE DIXIEME.

DU CALCUL DES ÉCLIPSES.

1730. Les éclipses [a] ont toujours formé pour les hommes un spectacle frappant; la maniere de les prédire leur paroît être l'objet le plus important des recherches de l'astronomie : c'est du moins la preuve sur laquelle on juge souvent des progrès de cette science, et de l'exactitude des astronomes.

Il est vrai que les éclipses ne sont importantes pour nous, que parcequ'elles sont un moyen de déterminer les inégalités de la Lune, et les longitudes des différens lieux de la Terre : mais cet objet est assez considérable pour mériter des détails; ajoutons à cela l'intérêt que le public y prend, l'usage où sont les astronomes de les calculer toutes avec le plus de soin qu'il est possible, et l'emploi que les historiens en ont fait; tout cela exige qu'on apprenne dans un livre d'astronomie toutes les méthodes les plus exactes pour calculer les éclipses, avec toutes les choses remarquables qui peuvent y avoir rapport.

Il arrive souvent 6 éclipses dans une année, comme en 1790, 4 de Soleil et 2 de Lune; il y en a même eu 7 en 1787, 4 de Soleil et 3 de Lune, mais elles ne peuvent guere être visibles dans le même pays. Dans d'autres années il n'y a que deux éclipses de Soleil, aucune de Lune; et cela se trouve en 1767, 1781, 1785, 1792. Ordinairement, dans l'espace de 18 ans, il y a 70 éclipses, 29 de Lune et 41 de Soleil, visibles en quelque endroit de la Terre.

On trouvera, dans l'*Art de vérifier les dates*, un catalogue des éclipses pour trois mille ans, fait par M. Pingré. Les mille ans avant J. C. sont aussi dans les Mémoires de l'académie des inscriptions, *tom.* 42. Dans les Tables de Berlin, on trouvera le catalogue de toutes les éclipses dont il est parlé dans les historiens.

1731. Le premier calcul préliminaire dans une éclipse est celui de la conjonction moyenne : lorsqu'on ignore le temps où il y aura des éclipses et qu'on veut s'en instruire, on est obligé de calculer

(a) Ἐκλείπω, *deficio*, parceque, dans les éclipses, le Soleil ou la Lune paroissent perdre leur lumiere.

toutes les conjonctions et toutes les oppositions qui arriveront dans l'année, et de choisir celles qui peuvent être écliptiques; c'est-à-dire, où la Lune sera assez près de l'écliptique, et à une latitude assez petite pour qu'il puisse y avoir éclipse. On a calculé diverses tables propres à trouver aisément chaque conjonction moyenne : nous avons vu que le *Saros* de Halley, ou la période caldéenne de Pline, ramene ordinairement les éclipses dans le même ordre, au bout de 18 ans (1501); ainsi cette période fournit déja un moyen pour prévoir à-peu-près les jours où il peut y avoir une éclipse de Lune ou de Soleil, quand on connoît celles qui ont eu lieu 18 ans auparavant. La période de 521 ans est encore plus exacte (1503).

1732. On peut aussi reconnoître les syzygies écliptiques par la méthode des épactes, et c'est la voie la plus naturelle et la plus générale. Les épactes astronomiques, dont nous nous servons pour cet effet, ne sont autre chose que l'âge de la Lune au commencement de l'année, ou le nombre de jours qui restoit depuis la derniere conjonction moyenne de l'année précédente, jusqu'au commencement de l'année actuelle, si elle est bissextile, ou à la veille, si c'est une année commune (1326). Par exemple, il y a eu conjonction moyenne le 26 décembre 1761, à $1^h\ 13'\ 28''$, la longitude moyenne du Soleil étant égale à la longitude moyenne de la Lune; depuis ce moment-là jusqu'au 31 de décembre, à midi, pour lequel sont calculées les époques des années communes, il y a 4 jours $22^h\ 46'\ 32''$; c'est là ce qu'on appelle Épacte astronomique de 1762. Cette épacte étant retranchée d'une révolution moyenne de la Lune au Soleil, 29 jours $12^h\ 44'\ 3''$, nous apprend que la premiere conjonction moyenne de 1762 arrivera le 24 janvier, à $13^h\ 57'\ 31''$ de temps moyen, puisque 4 jours 22^h, qui restent de l'année précédente, avec 24 jours 13^h du mois de janvier, font l'intervalle de 29 jours 12^h, qu'il doit y avoir d'une conjonction à l'autre.

1733. Pour calculer l'épacte d'une année, il suffit de retrancher la longitude moyenne du Soleil de celle de la Lune, et de convertir le reste en temps lunaire, à raison de $12°\ 11'\ 27''$ par jour, qui est la différence des mouvemens diurnes du Soleil et de la Lune. Ainsi l'époque du Soleil pour 1762 est 9 signes $10°\ 6'\ 6''$, et celle de la Lune 11 signes $10°\ 26'\ 2''$; celle du Soleil étant retranchée de cette derniere, il reste 2 signes $0°\ 19'\ 56''$, que la Lune parcourt en $4^j\ 22^h\ 46'\ 32''$ de temps; ces 4^j font l'épacte de 1762, parcequ'il a fallu 4^j à la Lune pour s'éloigner du Soleil de deux signes, et qu'au moment de l'époque de 1762, il y avoit quatre jours que la conjonction étoit passée. Il est aisé de trouver le temps qui répond à une différence quelconque

quelconque de longitude, dès que l'on sait que pour 360° il faut 29^{j} 12^{h} 44′ 3″ (1421).

1734. On trouve à la fin de nos tables de la Lune celle des épactes, calculée par M. de Lambre. On en trouve de pareilles dans les tables de la Hire, et de Cassini, et dans Riccioli (*Astron. reformata*). Après les épactes des années qui servent d'époques, on voit celles d'un nombre quelconque d'années; jusqu'à 2000, vis-à-vis des années et des centaines d'années, il y a des nombres qu'on peut appeller le *changement des épactes*, et qui s'ajoutent à l'épacte d'une année pour avoir celle d'une autre année : ainsi vis-à-vis d'une année on trouve 10 jours 15^{h}, qui est l'âge de la Lune à la fin de l'année, quand la conjonction est arrivée au commencement; de même vis-à-vis de 60, on trouve 3 jours 7^{h} 17′ 34″; c'est le temps qui répond à la différence entre le mouvement du Soleil en 60 ans, ou 27′ 36″, et celui de la Lune 40° 44′ 9″, suivant Mayer. Cette différence 40° 16′ 33″ répond à 3 jours 7^{h}; c'est la quantité dont la Lune est plus éloignée de sa conjonction à la fin des 60 ans, qu'elle ne l'étoit au commencement; en sorte que l'on ajoute ces 3 jours 7^{h} à l'épacte de l'époque proposée pour avoir l'épacte à la fin des 60 ans.

On ajoute pour chaque année. . .	10^{j}	15^{h}	11′	26″5838
Pour dix ans	19	17	42	17, 4939
Pour cent ans.	25	4	38	38, 2108

Il en est de même des changemens de chaque mois, qu'on appelle *épactes des mois.* Supposons que la conjonction soit arrivée le 1er de janvier, l'épacte du mois de janvier est zéro; car puisque l'épacte de l'année marque l'âge de la Lune, le 31 décembre, et que nous appellons zéro le 31 décembre, il n'y a rien à y ajouter pour le mois de janvier. L'épacte de février sera l'âge de la Lune au commencement de février, en supposant que la Lune ait commencé le 31 décembre; c'est donc l'excès de 31 jours sur une lunaison entiere, ou un jour 11^{h} 15′ 57″. Pour comprendre la raison de cette épacte du mois de février, on considérera que, si l'épacte de l'année étoit nulle, ou 0^{j} 0^{h} 0′, la conjonction seroit arrivée le 31 décembre précédent, à midi (*art.* 1736); et celle du mois de janvier, qui arrive 29 jours 13 heures plus tard, tomberoit au 29 janvier, à 13 heures; il resteroit du mois de janvier un jour et 11 heures : et c'est l'épacte du mois suivant. Cette épacte, ôtée de 29^{j} 13^{h}, fait voir que la conjonction suivante arrivera le 28 février, à deux heures; il s'en faut deux heures qu'il ne reste quelque chose de ce mois-là : ainsi l'épacte du mois de mars seroit *moins* deux heures, ou,

ce qui revient au même, 29 jours 11 heures 15′ 57″. On trouvera de même les changemens des autres mois, tels qu'ils sont dans la table.

1735. De là suit la regle pour trouver une nouvelle Lune. Ajoutez ensemble l'épacte des années et celle du mois, retranchez la somme d'une révolution ou de plusieurs, en sorte que le reste soit moindre que 29^j, et ce reste marquera le jour, l'heure et la minute de la conjonction moyenne pour ce mois-là. Si l'année est bissextile, il faut, dans les deux premiers mois, retrancher un jour de la somme des épactes, avant de faire la soustraction, parceque les époques des années bissextiles étant pour le premier janvier, à midi, sont trop avancées d'un jour, jusqu'à ce que le jour intercalaire, placé à la fin de février, ait rétabli les choses dans leur ordre naturel.

On demande la conjonction moyenne du mois d'avril 1764; on ajoutera ensemble les nombres suivans, tirés de la table des épactes.

Epacte de l'année 1700	9^j	21^h	50′	8″
Changement pour 60 ans	3	7	17	34
Pour quatre ans	14	0	1	44
Pour le mois d'avril	1	9	47	52
Somme à ôter	28	14	57	18
Révolution entiere.	29	12	44	3
Conjonction moyenne.	0	21	46	45

C'est-à-dire le 31 mars, à 21^h 46′ 45″.

1736. Lorsque le jour de la conjonction moyenne se trouve zéro, comme dans cet exemple, il faut prendre le dernier jour du mois précédent; ainsi la conjonction que nous venons de trouver, est celle du 31 mars, à 21 heures, quoique nous ayons employé l'épacte du mois d'avril : il faudroit avoir un jour dans la somme des épactes, pour pouvoir dire que c'est le premier d'avril; tant qu'il n'y a que zéro de jours pour le mois d'avril, on ne peut pas dire que nous soyons en avril, car on compte 1 aussitôt que le mois commence.

1737. Pour trouver les pleines lunes ou oppositions moyennes, il faut considérer qu'elles arrivent plus tard que les conjonctions moyennes, d'une demi-révolution ou de 14^j 18^h 22′ 1″; ainsi il suffira d'ajouter ces 14 jours au temps d'une conjonction moyenne, pour trouver l'opposition qui la suit, ou d'en ôter 14 jours pour avoir l'opposition qui précede. On peut aussi trouver le temps d'une opposition, en retranchant de 14^j 18^h 22′ 1″, la somme des

épactes; car si l'épacte, ou ce qui reste du mois précédent, à compter de la nouvelle lune, est de 5 jours, il est évident que la pleine lune arrivera le 9 du mois suivant, puisqu'il doit y avoir 14 jours d'intervalle; il suffit donc d'ôter de 14 jours les 5 jours d'épactes, et le reste 9 annonce que la pleine lune arrivera le 9ᵉ jour du mois.

Si la somme des épactes est trop grande pour pouvoir être ôtée de 14^j, on ajoutera à 14^j une ou plusieurs révolutions; ainsi pour trouver la pleine lune du mois d'avril 1764, on

ajoutera la demi-révolution, ...	14^j	18^h	$22'$	$1''$
avec une révolution entiere	29	12	44	3
Somme	44	7	6	4
Otez la somme des épactes, avril 1764 . . .	28	14	57	18
Pleine lune du mois d'avril	15	16	8	46

1738. Les éditeurs des tables de Halley y ajouterent une table des conjonctions moyennes que Pound avoit construite (*Tables de Halley, in-8°*, 1754) : elle revient à-peu-près au même que celle des épactes; mais on y a joint des tables d'équations pour trouver à-peu-près les conjonctions vraies. Il y en a de semblables avec les équations nécessaires, dans le recueil des Tables de Berlin (*tom. II, pag.* 97) : elles donnent, à une minute près, la vraie syzygie; elles sont plus commodes que celles des éditeurs de Halley.

1739. Quoiqu'on ne connoisse encore que le temps moyen d'une conjonction moyenne, ou d'une opposition, par la méthode des épactes, on peut savoir à-peu-près s'il y aura éclipse. Pour cela, on prendra dans les tables la longitude moyenne du Soleil, et celle du nœud de la Lune, pour le temps moyen trouvé; on retranchera le lieu d'un des nœuds, de la longitude moyenne du Soleil, et l'on aura la distance moyenne du Soleil au nœud de la Lune.

Lorsque le Soleil est éloigné d'un des nœuds de plus de $21°\frac{1}{2}$, suivant M. Cassini, il ne sauroit y avoir éclipse de Soleil en aucun lieu de la Terre; si cette distance est moindre que 15°, il est sûr qu'il y aura éclipse de Soleil en quelque lieu de la Terre; l'incertitude roule entre 15 et 21; M. de Lambre trouve 13° 33′ et 19° 44′, c'est-à-dire que si la distance moyenne du Soleil au nœud le plus voisin, dans le temps de la conjonction moyenne, est entre 13 et 20, il faudra faire un calcul plus exact que celui dont je viens de parler, pour être sûr qu'il y aura éclipse (Cassini, *Tables astron. pag.* 25). Les limites, dans la conjonction vraie, sont plus resserrées. On peut voir

des détails à ce sujet dans les *Ephémérides de Berlin* pour 1777, et dans l'ouvrage intitulé, *Scientia eclipsium. Lucae*, 1747.

1740. Il ne peut y avoir éclipse de Lune, si, dans le temps de l'opposition moyenne, il y a plus de 14° ½ de distance moyenne entre le point opposé au Soleil et le nœud de la Lune : on est sûr qu'il y en aura une, si cette distance est moindre que 7°½, suivant Cassini. M. de Lambre trouve 13° 21′, et 7° 47′. Entre ces limites on sera obligé de recourir à un autre calcul; mais il est toujours très commode d'avoir promptement l'exclusion de presque toutes les syzygies qui ne sauroient être écliptiques, et de n'avoir à en calculer rigoureusement qu'un petit nombre, pour connoître toutes les éclipses qui doivent arriver dans une année quelconque.

1741. Lorsqu'on a trouvé qu'il doit y avoir éclipse dans une nouvelle ou pleine lune, et qu'on veut en calculer les circonstances, il faut commencer par trouver l'heure et la minute, en temps vrai, de la conjonction ou de l'opposition vraie en longitude; la latitude de la Lune pour ce moment; le mouvement horaire de la Lune en longitude et en latitude : c'est un préliminaire essentiel dans le calcul de toutes les éclipses.

Pour cela, on calcule d'abord le lieu vrai du Soleil, et celui de la Lune, comme on le voit dans l'usage des tables, et l'on a la différence de leurs longitudes. On trouve aussi dans ces tables le mouvement horaire du Soleil et de la Lune.

Je suppose qu'on ait trouvé pour le premier avril 1764, à 8h 32′ du matin, que le lieu de la Lune étoit moins avancé que celui du Soleil, de 54′, et que le mouvement horaire de la Lune, moins celui du Soleil, étoit de 27′; il est évident que puisque la Lune se rapproche du Soleil de 27′ par heure, elle atteindra le Soleil 2 heures après; car 27′ sont à une heure, comme 54 sont à deux heures. Ainsi la conjonction vraie arrivera à 10h 32′.

Lorsqu'on connoît le temps de la conjonction, on trouve dans les tables, pour le même instant, la latitude de la Lune, et le mouvement horaire en latitude, sa parallaxe, son diametre, et le diametre du Soleil; il faut aussi connoître le mouvement horaire de la Lune en latitude, comme on le verra dans l'usage des tables.

1742. Quand on a l'heure de la conjonction, et le mouvement horaire de la Lune, il faut trouver l'inclinaison de son orbite relative, par rapport à l'écliptique; cela est nécessaire pour les éclipses de Lune, et même pour les éclipses de Soleil, quand on veut en avoir les phases pour différens pays de la Terre (1793) : voilà pour,

quoi je place cet article au nombre des préliminaires généraux du calcul des éclipses.

1743. Lorsqu'on calcule une conjonction de deux planetes, ou d'une planete à une étoile, ou même une éclipse, on n'a besoin que de connoître la quantité dont un des astres se rapproche de l'autre, ou le mouvement relatif; par exemple, dans une éclipse de Soleil, on demande avec quelle vîtesse et dans quelle direction la Lune s'approche du Soleil. Il suffit, pour cet effet, de chercher combien la longitude d'une planete surpasse celle de l'autre dans l'espace d'une heure, et combien une latitude excede l'autre dans le même espace de temps : ce n'est pas le mouvement réel, total et absolu, de chacune des deux planetes, mais l'excès d'un des mouvemens sur l'autre, qui produit une conjonction ou une éclipse.

On peut donc ne faire aucune attention au mouvement d'une des deux planetes, pourvu qu'on donne à l'autre la différence des deux mouvemens, c'est-à-dire qu'en faisant mouvoir seulement l'une des deux, on lui fasse changer de longitude et de latitude, par rapport à l'autre, autant qu'elle en change réellement par la combinaison des deux mouvemens pris ensemble; on aura par ce moyen la conjonction des deux astres, tout de même que si l'on considéroit les deux mouvemens à la fois.

Ainsi, pour calculer une conjonction de deux planetes, on ne considere que le mouvement relatif, c'est-à-dire, le mouvement de l'une par rapport à l'autre, et on suppose fixe l'une des deux : cette supposition ne fait que simplifier le calcul, et ne change rien à l'état réel des choses; car si une planete avance par heure de 36′, et l'autre de 2′, il est évident qu'elles ne changeront que de 34′, l'une par rapport à l'autre, et elles seront entre elles à la même distance que si l'une étant fixe, l'autre n'avoit eu que 34′ de mouvement.

Soit P et A (FIG. 97) les deux planetes en conjonction, PR le mouvement horaire d'une des deux planetes en longitude, c'est à-dire, parallèlement à l'écliptique; AC le mouvement horaire de l'autre planete; ayant pris AB et CG, égales à PR, on aura BC pour la différence des deux mouvemens; c'est le mouvement horaire relatif, puisque la premiere planete ayant avancé de la quantité PR, égale AB, et la seconde planete, de la quantité AC, elles ne different l'une de l'autre que de la quantité BC en longitude, c'est-à-dire, autant que si l'une étoit restée en P, et que l'autre eût parcouru seulement un arc AG égal à BC, en partant du point A.

1744. Il en est de même du mouvement en latitude : supposons que la planete qui a eu le mouvement PR en longitude, ait eu le

mouvement RD en latitude, en sorte que son vrai mouvement soit PD; supposons que l'autre planete ait eu de même un mouvement en latitude CE, en même temps que le mouvement en longitude AC, c'est-à-dire, que son mouvement propre ait été réellement AE; la différence des deux mouvemens horaires en latitude RD et CE, ou la quantité FE, sera le mouvement horaire relatif en latitude, ou la quantité dont une planete s'éloignera de l'autre en latitude; on pourra donc supposer fixe la planete P, prendre AG et GH à la place de BC et FE, et supposer que la planete A a parcouru l'orbite relative AH, qu'on appelle aussi orbite composée.

On pourra faire aussi un triangle MNO (FIG. 98), dont les côtés MN et NO soient égaux aux mouvemens horaires relatifs BC et FE, ou AG et GH, en longitude et en latitude; l'angle OMN sera l'inclinaison de l'orbite relative, et MO le mouvement horaire sur cette orbite relative; on pourra supposer qu'une planete étant restée fixe en M, l'autre a décrit MO : par le moyen de cette supposition on voit que les deux planetes différeront, soit en longitude, soit en latitude, autant que lorsqu'on laissoit à chacune son mouvement particulier : tout se passera donc entre elles, et toutes les apparences seront les mêmes qu'auparavant; la supposition de l'orbite relative MO ne fera que simplifier le calcul, en réduisant deux mouvemens à un seul.

1745. L'orbite relative est donc celle que l'on peut supposer à la place de l'orbite réelle, et dans laquelle pourroit se mouvoir une des deux planetes, sans que ses distances réelles, par rapport à l'autre, parussent être changées. Dans le triangle MNO on a ces proportions : MN est à NO, comme le rayon est à la tangente de l'angle OMN; et le cosinus de l'angle OMN est au rayon, comme MN est à MO; ainsi, pour trouver l'inclinaison de l'orbite relative, et le mouvement horaire relatif, on fera ces deux proportions : *La différence des deux mouvemens horaires en longitude est à la différence des mouvemens en latitude, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison relative.* Ensuite, *le cosinus de l'inclinaison relative est au rayon, comme la différence des mouvemens horaires en longitude est au mouvement horaire* MO *sur l'orbite relative.* C'est celui dont nous ferons usage (1757, 1794), et nous en donnerons un exemple à l'art. 1758 [a]. Quand il s'agit d'une éclipse de Soleil, on emploie le mouvement horaire en latitude de la Lune seule, parceque le Soleil n'en a aucun en latitude.

1746. On suppose, dans ces deux proportions, que les planetes

(a) Il faut bien distinguer l'orbite relative de l'orbite apparente (1869).

vont du même sens, tant en longitude qu'en latitude : mais si l'une étoit directe, et l'autre rétrograde, c'est-à-dire, si l'une des longitudes étoit croissante, et l'autre décroissante, il faudroit prendre la *somme* des mouvemens horaires en longitude, au lieu de leur différence. De même, si l'une des latitudes étoit croissante, et l'autre décroissante, du même côté de l'écliptique; c'est-à-dire, si l'une alloit au nord, et l'autre au midi, par le mouvement en latitude, il faudroit prendre la *somme* des mouvemens en latitude au lieu de leur différence : tout cela peut avoir lieu, quand on calcule les éclipses des planetes par la Lune (1995).

Dans les éclipses de Lune, ce n'est pas le Soleil, mais le point opposé au Soleil, que l'on considere comme l'une des deux planetes: ce point opposé au Soleil, qui est le centre de l'ombre de la Terre, a le même mouvement horaire en longitude que le Soleil lui-même, et par conséquent doit se traiter comme le Soleil.

1747. Dans le calcul des éclipses de Lune, on peut se contenter d'ajouter 8″ à la différence des mouvemens horaires en longitude, pour avoir le mouvement relatif ou composé de la Lune au Soleil, et éviter la seconde analogie, parceque, dans un triangle dont un angle est de 5°⅔, et l'hypoténuse d'un demi-degré, le grand côté a environ 8″ de moins que l'hypoténuse.

1748. On trouve dans les tables de Cassini (*page* 57) une réduction qui est toujours entre 21′ et 30′, que l'on ajoute avec 5° 15′, qui est à-peu-près l'inclinaison vraie de l'orbite de la Lune dans toutes les éclipses, pour avoir l'inclinaison relative, ou celle de l'orbite composée; cet angle est la différence entre EAC et HAG (FIG. 97).

1749. Dans les éclipses de Soleil ou d'étoiles, que l'on ne veut calculer que par une opération graphique (1838), on n'a besoin de savoir qu'à 10 minutes près l'inclinaison de l'orbite lunaire; on peut alors supposer toujours que l'inclinaison est de 5° 40′ pour les éclipses de Soleil, et 5° 9′ pour les éclipses d'étoiles (1493, 1500) : mais si l'on veut calculer l'éclipse rigoureusement, il faut chercher le mouvement horaire de la Lune en longitude et en latitude, et faire la proportion de l'article 1745.

Des éclipses de Lune.

1750. L'ÉCLIPSE DE LUNE est l'obscurité produite sur le disque de la Lune par l'ombre de la Terre. Cette ombre se forme derriere la Terre, qui intercepte les rayons du Soleil comme tous les corps opaques. L'éclipse totale est celle où la Lune entiere est obscurcie;

l'éclipse partiale est celle où une partie du disque de la Lune conserve sa lumiere. L'éclipse *centrale* est celle qui a lieu, quand l'opposition arrive dans le point même du nœud; la Lune traverse alors par le centre même le cône d'ombre, c'est pourquoi l'on appelle centrale cette sorte d'éclipse.

Si la Lune, au moment de son opposition vraie, est assez loin de ses nœuds pour que sa latitude surpasse 30′, l'éclipse de Lune ne sauroit être totale; et si la latitude est plus grande que 63′ $\frac{1}{2}$, il ne sauroit y avoir éclipse, parceque le demi-diametre de l'ombre de la Terre n'occupe jamais, dans l'orbite de la Lune, plus de 46′ 43″, et le demi-diametre de la Lune 16′ 48″ : ainsi, pour que le bord de la Lune puisse toucher l'ombre de la Terre, il faut que la distance de leurs centres, ou la latitude de la Lune, ne surpasse pas 63′ $\frac{1}{2}$, et que la Lune soit à moins de 12° 34′ de son nœud. Ce sont là les *termes écliptiques*, ou limites des éclipses.

1751. Nous mesurons les mouvemens de la Lune par les arcs célestes qu'elle paroît décrire ; il est donc nécessaire de mesurer de la même maniere l'ombre qu'elle traverse dans les éclipses, c'est-à-dire, la largeur de ce cône ténébreux qui se forme derriere la Terre. Soit S le centre du Soleil (FIG. 99), T le centre de la Terre, L celui de la Lune en opposition, AO le diametre du Soleil, BG le diametre de la Terre, APO le cône d'ombre que la Lune traverse de C en E, LC le demi-diametre de l'ombre dans l'endroit où la Lune doit la traverser; cette ligne LC est le rayon d'un cercle qui forme la section perpendiculaire à l'axe du cône de l'ombre, dans la région de la Lune.

L'angle CTL, formé au centre de la Terre, et qui a pour base le côté CL, est ce qu'on appellera le demi-diametre de l'ombre; c'est l'angle sous lequel nous paroît le mouvement de la Lune, ou l'arc de son orbite qu'elle décrit pendant la demi-durée de l'éclipse centrale, c'est-à-dire, pendant que la Lune va de C en L.

1752. Le côté AT du triangle rectiligne CAT, étant prolongé jusqu'en D, a son angle externe CTD égal aux deux angles internes opposés, pris ensemble, c'est-à-dire, aux angles BAT et BCT, dont l'un est la parallaxe horizontale du Soleil, l'autre celle de la Lune (1625) [a]; ainsi l'angle CTD est égal à la somme des parallaxes : si l'on en ôte l'angle LTD, il restera l'angle CTL, ou le demi-dia-

(a) C'est proprement la parallaxe du bord de la Lune; mais elle ne differe pas sensiblement de celle du centre. On néglige ici l'aplatissement de la Terre, comme étant insensible dans des observations où l'incertitude est beaucoup plus grande.

metre

metre de l'ombre ; mais l'angle LTD est égal à l'angle opposé ATS qui mesure le demi-diametre apparent du Soleil ; donc, *si l'on ôte de la somme des parallaxes le demi-diametre du Soleil, le reste sera le demi-diametre de l'ombre.*

Exemple. La parallaxe horizontale de la Lune, au moment de l'opposition du 17 mars 1764, étoit de 60′ 51″9 ; la parallaxe horizontale du Soleil est toujours à-peu-près de 8″6 (1725) : la somme des parallaxes est donc 61′ 0″5 ; si l'on en ôte le demi-diametre du Soleil, 16′ 4″8, on aura pour le demi-diametre de l'ombre 44′ 55″7. Il y faudra encore ajouter 44″9 pour l'atmosphere de la Terre (1756).

1753. Le demi-diametre de l'ombre, trouvé par la regle précédente, peut varier depuis 37′ 46″ jusqu'à 46′ 19″ ; il est le plus grand, quand la Lune est périgée et le Soleil apogée.

1754. On connoît assez le diametre de la Terre et la parallaxe de la Lune, pour être sûr de la détermination du diametre de l'ombre, trouvé par la regle précédente. Cependant, quand on observe les éclipses, on trouve constamment que l'ombre est un peu plus grande que suivant cette regle ; et il paroît que cela vient de l'atmosphere de la Terre qui forme une pénombre (1768).

La densité de l'air est assez grande, et réfléchit assez de rayons pour former des crépuscules (2260), pour causer la réfraction astronomique (2160), et pour affoiblir beaucoup la lumiere du Soleil à l'horizon (2258) : ainsi il n'est pas étonnant qu'elle le soit assez pour intercepter une partie des rayons qui éclairent la Lune, pour former une augmentation autour de l'ombre de la Terre, et pour changer la longueur et l'intensité du cône d'ombre. C'est une des causes qui font que l'ombre est mal terminée ; aussi le commencement d'une éclipse est si douteux, qu'on trouve souvent une minute de différence entre les temps du commencement d'une même éclipse de Lune observée par différens astronomes, et quelquefois davantage.

L'augmentation que l'atmosphere produit dans le demi-diametre de l'ombre, est de 20″, suivant Cassini ; de 30″, suivant M. le Monnier ; de 60″, suivant la Hire. J'ai trouvé 36″ par l'éclipse du 18 mars 1783, en prenant un milieu entre les observations de sept astronomes différens.

1755. M. le Gentil pense qu'elle est de 40″ dans les parties de l'ombre qui répondent à l'équateur, et de 1′ 40″ pour les parties qui sont formées par la masse d'un air plus dense, répandu autour des poles de la Terre (*Mém. acad.* 1755). Cela pourroit venir de ce que

la pénombre est plus sensible sur le commencement et sur la fin, que vers le milieu de l'éclipse.

1756. Enfin d'autres astronomes, entre autres Mayer, pensent que la correction de l'atmosphere est toujours $\frac{1}{60}$ du demi-diametre de l'ombre, c'est-à-dire, qu'il faut y ajouter autant de secondes qu'il y a de minutes. Je m'en tiens ordinairement à cette regle; elle est suffisante, à cause du peu de précision dont ces observations sont susceptibles. Dans l'exemple précédent, l'on a trouvé 44′ 55″7; on y ajoutera 44″9, et l'on aura le demi-diametre apparent de l'ombre de la Terre, y compris l'effet de son atmosphere, 45′ 40″6. Nous parlerons de la pénombre qui produit une partie de cet effet (1768).

Trouver les phases d'une éclipse de Lune.

1757. Lorsqu'on connoît l'heure de la pleine lune ou de l'opposition vraie (1741), la latitude de la Lune pour ce temps-là, l'inclinaison de son orbite qui dépend du mouvement horaire de la Lune tant en longitude qu'en latitude (1745), et le mouvement horaire du Soleil; on doit chercher le temps du milieu de l'éclipse.

Soit O (fig. 100), le point de l'écliptique opposé au Soleil, ou le centre de l'ombre de la Terre à la distance de la Lune; OG le demi-diametre de l'ombre, ELS l'orbite relative de la Lune (1745); L le lieu de la Lune au moment de l'opposition; OL la latitude de la Lune, ou sa distance à l'écliptique KG; OM la perpendiculaire abaissée sur l'orbite relative EMS; au moment où l'éclipse commence, la Lune étant en E, le bord de la Lune touche en P le bord de l'ombre; ainsi E est le lieu de la Lune au commencement de l'éclipse; de même le point S est le lieu de la Lune à la fin de l'éclipse, ou à la sortie de l'ombre: les triangles MOE, MOS sont égaux, puisqu'ils ont un côté commun OM, les côtés égaux OE et OS composés de la somme des demi-diametres, et qu'ils sont rectangles l'un et l'autre en M; ainsi le côté EM est égal au côté MS: donc le point M indique le milieu de l'éclipse; au lieu que le temps de l'opposition arrive quand la Lune est au point L de son orbite sur un cercle de latitude OL perpendiculaire à l'écliptique KG dans le point O qui est directement opposé au Soleil.

1758. Dans le triangle LOM, formé par le cercle de latitude OL et par la perpendiculaire OM, l'angle LOM est égal à l'inclinaison de l'orbite relative de la Lune (1745). En effet, la perpendiculaire à l'orbite et la perpendiculaire à l'écliptique ne different qu'à raison

de la différence qu'il y a entre l'orbite et l'écliptique ; d'ailleurs si l'on prolonge l'orbite EMS jusqu'à la rencontre de l'écliptique OK, on verra facilement que l'angle de ces deux lignes sera le complément de l'angle MOK, ainsi que l'angle MOL ; donc celui-ci est égal à l'inclinaison de l'orbite. Avec cet angle on a aussi le côté LO, latitude en opposition ; on trouvera donc LM en faisant cette proportion : *Le rayon est au sinus de l'inclinaison, comme la latitude* OL *est à l'intervalle* LM. On le réduira en temps à raison du mouvement horaire de la Lune, en disant : *Le mouvement horaire relatif* (1745) *est à* 1^h *ou* 3600″, *comme l'espace* LM *est au temps qu'il y aura entre l'opposition et le milieu de l'éclipse.* On retranchera cet intervalle de temps, du moment de l'opposition, si la latitude de la Lune est croissante ; on l'ajoutera au temps de l'opposition, si la latitude est décroissante, ou que la Lune aille en se rapprochant du nœud, et l'on aura le milieu de l'éclipse.

Exemple. Dans l'éclipse de Lune du 17 mars 1764, on trouve, par les tables de Mayer, que la pleine lune, ou l'opposition vraie, devoit arriver à 12^h 4′ 59″ ; le mouvement horaire de la Lune étoit de 37′ 22″6 en longitude, et 3′ 26″ en latitude ; le mouvement horaire du Soleil 2′ 28″8 : la différence des mouvemens horaires, 34′ 53″8, est au mouvement en latitude 3′ 26″, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison relative 5° 37′ 12″ (1745). Le cosinus de cette inclinaison est au rayon, comme la différence des mouvemens horaires en longitude, 34′ 53″8, est au mouvement horaire de la Lune sur son orbite relative, 35′ 3″9.

La latitude de la Lune en opposition étoit de 39′ 8″7 par les tables ; le rayon est au sinus de l'inclinaison 5° 37′ 12″, comme la latitude 39′ 8″7 est à l'intervalle ML, qu'on trouve de 3′ 50″ en parties de degré. Le mouvement horaire relatif 35′ 3″9 est à 60′ 0″, comme 3′ 50″ sont à 6′ 33″6 de temps (a) ; on ajoutera cet intervalle, parceque la latitude étoit décroissante, la Lune n'étant pas encore arrivée à son nœud ; et comme le temps de l'opposition est 12^h 4′ 59″, on aura le milieu de l'éclipse à 12^h 11′ 33″, c'est-à-dire, le 18 mars, 0^h 11′ 33″ du matin.

1759. Les mêmes quantités qui ont servi à trouver la différence LM entre l'opposition et le milieu de l'éclipse, serviront à trouver la plus courte distance OM de l'orbite lunaire au centre de l'ombre ; car dans le triangle LOM, rectangle en M, on connoît LO qui est la

(a) Pour convertir en temps cette quantité, ainsi que celles des articles suivans, on se sert d'un logarithme constant, qui est celui de 3600″, moins celui du mouvement horaire. Ce logarithme est ici 0,233277.

latitude au temps de l'opposition, et l'angle LOM égal à l'inclinaison de l'orbite relative ; on trouvera le côté OM par cette proportion : *Le rayon est à la latitude* LO, *comme le sinus de l'angle* L, *ou le cosinus de l'inclinaison relative, est à la plus courte distance* OM.

Exemple. Dans l'éclipse du 17 mars 1764, la latitude de la Lune LO étoit de 39′ 8″7, et l'inclinaison MOL de l'orbite relative 5° 37′ 12″ : or le rayon est à 39′ 8″7 comme le cosinus de MOL est à 2337″4, ou 38′ 57″4 : c'est la perpendiculaire cherchée ; elle servira ci-après pour trouver le commencement, la fin et la grandeur de l'éclipse (1761).

1760. Lorsqu'on connoît le milieu de l'éclipse (1758), la plus courte distance des centres de l'ombre et de la Lune (1759), le demi-diametre apparent de l'ombre (1756), et le demi-diametre de la Lune, pris dans les tables, il ne reste plus qu'un triangle à résoudre pour trouver le commencement et la fin de l'éclipse.

Soit OM (fig. 100) la plus courte distance, ou la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ombre sur l'orbite relative EMS de la Lune (1759) ; GPAK la circonférence de l'ombre ou de la section du cône (1751), EP le rayon du disque lunaire ; E le centre de la Lune au moment où son bord commence à toucher le bord de l'ombre en P, c'est-à-dire, au moment où l'éclipse commence ; S le centre de la Lune à sa sortie de l'ombre, lorsque l'éclipse finit ou que le dernier bord de la Lune touche en R le bord de l'ombre. La distance OE des centres de la Lune et de l'ombre est composée des quantités OP et PE, dont l'une OP est le demi-diametre de l'ombre (1756), et l'autre le demi-diametre de la Lune vu du centre de la Terre ; de même la distance OS, à la fin de l'éclipse, est composée des quantités OR et RS, c'est-à-dire qu'elle est aussi la somme du demi-diametre de l'ombre et de celui de la Lune ; ainsi OS est égale à OE, à moins qu'on ne veuille avoir égard à la petite différence qu'il peut y avoir dans la parallaxe de la Lune pendant l'espace de quelques heures, et à la différence qu'on pourroit supposer dans l'atmosphere (1755) ; mais on a coutume de les négliger.

Dans le triangle OEM rectiligne rectangle en M, on connoît la perpendiculaire OM (1759), et la somme OE des demi-diametres de la Lune et de l'ombre ; on cherchera le troisieme côté ME : l'on convertira ce côté ME en temps par la proportion suivante. Le mouvement horaire de la Lune sur son orbite relative est à 1h ou 3600″, comme le côté trouvé ME est à la demi-durée de l'éclipse en secondes de temps. Cette demi-durée étant retranchée du temps du milieu de l'éclipse (1758), on aura le commencement ; et si l'on

ajoute la demi-durée avec le milieu, on aura la fin de l'éclipse.

1761. EXEMPLE. Dans l'éclipse de Lune du 17 mars 1764, la perpendiculaire MO étoit de 38' 57"4, le demi-diametre OP de l'ombre 45' 40"6, celui de la Lune 16' 37"2; la somme des demi-diametres, y compris l'effet de l'atmosphere (1756), sera 1° 2' 17"8. Ainsi, dans le triangle EMO, on connoît OE et OM : on trouvera ME par l'opération suivante, où j'emploierai la méthode la plus commode pour résoudre ce triangle OEM.

Somme des côtés OE et OM,	1° 41' 15"2 log.	3,783561
Différence des côtés OE et OM,	23 20, 4 log.	3,146252
Somme des deux logarithmes,		6,929813
Moitié de la somme, ou logarithme de EM,		3,464906
Auquel répond 48' 36"8.		

Le mouvement horaire de la Lune sur son orbite relative étoit de 35' 3"9; ainsi l'on dira, 35' 3"9 est à 1 heure, comme EM, 48' 36"8, est à la demi-durée de l'éclipse 1h 23' 11".

Cette demi-durée de l'éclipse est le temps que la Lune employoit à aller de E en M; mais le milieu de l'éclipse en M a été trouvé 12h 11' 33" (1758); si l'on en retranche 1 heure 23' 11", on aura pour le commencement de l'éclipse 10h 48' 22"; et si on l'ajoute, on aura la fin de l'éclipse 13h 34' 44".

1762. Si l'on veut avoir égard à l'inégalité de la correction de l'atmosphere proposée par M. le Gentil (1755), on résoudra deux triangles, un pour le commencement et un pour la fin de l'éclipse, en employant deux hypoténuses différentes OE et OS, dont l'une sera quelquefois plus grande d'une minute que l'autre.

1763. L'inégalité du mouvement horaire de la Lune ne mérite guere d'être ici considérée; elle ne va jamais qu'à 3 ou 4", dont le mouvement horaire peut être plus ou moins grand dans la premiere demi-durée d'une éclipse que dans la seconde; il en est de même de la différence des parallaxes, et de celle de l'équation du temps qui peut varier de 2 ou 3 secondes entre le commencement et la fin.

1764. Dans les éclipses de Lune qui sont totales, on a encore deux autres phases à chercher, qui sont l'IMMERSION et l'ÉMERSION, c'est-à-dire, le moment où la Lune entre totalement dans l'ombre, et celui où elle commence à en sortir. Soit D (FIG. 101) le lieu de la Lune à l'instant où elle est assez avancée dans l'ombre, pour que son dernier bord N touche le bord intérieur de l'ombre; on a un nouveau triangle OMD, dont l'hypoténuse OD est égale à la

différence entre le demi-diametre de l'ombre ON et le demi-diametre DN de la Lune : mais l'opération est la même que dans l'article 1761 ; la demi-durée de l'éclipse totale se retranche du milieu de l'éclipse pour avoir l'immersion qui arrive en D, et elle s'ajoute pour avoir l'émersion qui arrive en V.

1765. Lorsqu'on a la plus courte distance des centres OM (FIG. 100), le demi-diametre de l'ombre OA, et le demi-diametre de la Lune MB, il est aisé de trouver la partie éclipsée de la Lune, c'est-à-dire, la quantité AC. Car AM est égale à OA—OM; si l'on y ajoute MC, l'on aura AC : donc AC est égale à OA+MC—OM, c'est-à-dire que *la partie éclipsée est égale à la somme des demi-diametres de la Lune et de l'ombre, moins la plus courte distance.*

EXEMPLE. Dans l'éclipse du 17 mars 1764 (1761), la somme des demi-diametres est 62′ 17″8, la plus courte distance est 38′ 57″4 ; la différence 23′ 20″4 est la partie éclipsée. On a coutume de l'exprimer en doigts ou en douziemes parties du diametre de la Lune ; on fera donc cette proportion : Le diametre horizontal de la Lune 33′ 14″4 est à 12 doigts 0 minutes, comme 23′ 20″4 sont à un quatrieme terme, qu'on trouvera 8ᵈ 25′½ ; ainsi la grandeur de l'éclipse sera de 8 doigts et 25 minutes ½ de doigt.

1766. Cette regle pour trouver la grandeur des éclipses de Lune a lieu également, soit que le centre de la Lune et son orbite relative soient hors de l'ombre, comme dans la FIG. 102 ; soit que la Lune soit tout entiere dans l'ombre, comme dans la FIG. 101 ; car dans la FIG. 102 l'on a OA+CM=AC+OM, ou OA+CM—OM=AC ; et dans la FIG. 101, qui a lieu pour les éclipses totales, on a AC=OA—OM+CM. Dans ce dernier cas, on dit que la grandeur de l'éclipse est de plus de douze doigts, parcequ'on y comprend la partie AB de l'ombre, qui surpasse le bord de la Lune; c'est-à-dire que l'on comprend sous le nom de partie éclipsée toute la quantité AC, qui seroit éclipsée en effet, si la Lune avoit assez de largeur pour s'étendre jusqu'en A. Dans ce cas, si la Lune est au nord de l'écliptique, on dit que l'éclipse est *du côté du nord ;* quoique, dans une éclipse partiale, ce soit la partie *australe* de la Lune qui soit éclipsée, quand la latitude est boréale. Cela fait une espece de disparate qu'on peut éviter, en disant : La Lune est au nord de l'écliptique. Cette regle, qui est conforme à celle de la Caille (*Leçons d'astr. art.* 1119), me paroît n'être pas observée dans plusieurs endroits de ses éphémérides ; mais peut-être que ce sont des fautes d'impression. La même regle a lieu, quoique le bord de la Lune dépasse le centre de l'ombre.

Les éclipses de Lune sont de la même grandeur quand elles arrivent à la même distance des nœuds, puisque leur grandeur dépend sur-tout de la latitude OL de la Lune, et celle-ci de la distance de la Lune à son nœud ; voilà pourquoi on détermine le mouvement des nœuds par des éclipses de même grandeur, observées dans des temps éloignés (1489), ayant égard au changement de l'ombre et du diametre de la Lune.

Les quantités dont nous venons de donner le calcul (1758, 1761, 1765) se trouvent toutes calculées dans les tables de Riccioli (*Astron. reform. pag.* 66), et de Cassini (*Tab. astr. pag.* 59) ; en sorte qu'avec ces tables auxiliaires, on peut trouver les phases d'une éclipse de Lune sans aucune opération trigonométrique.

1767. ON PEUT DÉTERMINER sans calcul, avec la regle et le compas, toutes les circonstances d'une éclipse de Lune, aussitôt qu'on a par les tables le temps de la conjonction, la latitude, la parallaxe et le mouvement horaire. Cette méthode est même très suffisante lorsqu'il ne s'agit que d'annoncer les éclipses qui doivent arriver : car on ne sauroit se tromper d'une minute dans l'opération graphique, si la figure a seulement un pied de diametre ; et l'on ne peut être assuré d'une plus grande exactitude dans la prédiction d'une éclipse de Lune ; à peine peut-on être sûr de l'observation même à une minute près. Ainsi je crois qu'on peut très bien se contenter de l'opération graphique dans toutes les éclipses de Lune.

EXEMPLE. Le demi-diametre de l'ombre de la Terre dans la région lunaire ayant été trouvé de 45′ $\frac{2}{3}$ (1756), je fais le rayon OG (FIG. 100) de 45′ parties $\frac{2}{3}$ prises sur une échelle quelconque ; je prends OL égale à la latitude de la Lune, 39 des mêmes parties, et au point L je tire l'orbite de la Lune ELS, inclinée de 5° $\frac{2}{3}$ (1749), sur l'écliptique GK. Le mouvement horaire relatif étant de 35′ (1758), je prends 35 parties sur les mêmes divisions, je les porte sur l'orbite de L en X ; et ayant marqué en L le temps de l'opposition 12 heures 5′, je marque 11 heures 5′ au point X où se termine le mouvement horaire ; en divisant XL en 60′ de temps, ou en se servant d'un compas de proportion, l'on divisera l'orbite ELMS en temps. Si l'on prend une ouverture de compas égale à la somme des demi-diametres de l'ombre et de la Lune, 1° 2′, et qu'on porte de O en S sur l'orbite relative, on trouvera sur ses divisions que le point S répond à 13h 35′ ; comme, par le calcul (1761). On trouvera également le milieu et la fin.

1768. LA PÉNOMBRE, dont nous avons déja parlé (1754), est une obscurité moindre que celle du cône d'ombre ; c'est une lumiere

foible, causée par la réfraction des rayons dans l'atmosphere, et par une portion du disque du Soleil, qui éclaire encore la Lune lors même que le centre ne l'éclaire plus. Le point E (FIG. 99), qui est sur le côté OEP du cône d'ombre, est dans une entiere obscurité, parcequ'il n'est éclairé par aucun rayon du Soleil. Le point F, qui est sur la ligne AGF, menée par le bord supérieur A du Soleil, et par le bord inférieur G de la Terre, jouit d'une lumiere parfaite, parcequ'il voit le disque entier AO du Soleil : mais tous les points situés entre E et F ne voient qu'une partie du disque solaire, ils ne reçoivent qu'une partie de la lumiere du Soleil; c'est ce qui forme la pénombre; son étendue est égale au diametre du Soleil, multiplié par la parallaxe du Soleil, et divisé par celle de la Lune : ainsi cette pénombre n'est que d'environ 5″, et il n'en peut résulter qu'une différence de 10″ de temps; mais cet effet se trouve fondu dans la détermination que nous avons donnée de l'effet de l'atmosphere, et on les comprend souvent l'un et l'autre sous le nom de *pénombre*.

1769. On observe dans la couleur des éclipses de Lune des différences considérables : lorsque la Lune est apogée, elle traverse le cône d'ombre plus près de son sommet; elle paroît alors plus rouge, plus lumineuse que lorsque les éclipses arrivent plus près de la Terre; car, dans le périgée, les rayons rompus par l'atmosphere, qui se dispersent dans le cône d'ombre, et qui en diminuent l'obscurité, ne parviennent pas jusqu'au centre de l'ombre ou à l'axe du cône qui est trop large dans ce point-là, et qui est trop près de la Terre pour que la petite réfraction de l'atmosphere puisse y faire arriver les rayons.

Voilà pourquoi l'on a vu des éclipses où la Lune disparoissoit entièrement; telle fut l'éclipse du 15 juin 1620, ou celle du 9 décembre 1601, dans laquelle on ne distinguoit pas le bord éclipsé (*Képler, astron. pars opt. pag.* 297; *Epitome, pag.* 825). Hévélius, en parlant de l'éclipse du 25 avril 1642, assure qu'on ne distinguoit pas, même avec des lunettes, la place de la Lune, quoique le temps fût assez beau pour voir les étoiles de la cinquieme grandeur (*Hev. Selenographia, pag.* 117); mais il est fort rare que la Lune disparoisse ainsi totalement dans les éclipses, et je l'ai toujours distinguée.

M. du Séjour a traité des différens degrés de lumiere dans l'ombre de la Terre (*Mém. de l'ac.* 1777; *Traité analytique, tom. I, p.* 628, 688). M. Maraldi a fait voir, dans les *Mémoires* de 1723, que les ombres en général, à une certaine distance, se partagent en deux traits noirs, avec une pénombre au milieu qui s'éclaircit en se retrécissant,

retrécissant, quand on augmente la distance : cela pourroit peut-être expliquer une partie des diversités qu'on apperçoit dans les éclipses de Lune.

1770. Dans celle du 18 mars 1783, une heure après le commencement, l'ombre devenoit plus claire qu'au temps où elle étoit moins avancée, on voyoit les taches beaucoup mieux au travers de l'ombre. Une demi-heure après le commencement de l'émersion, l'ombre paroissoit devenir d'une teinte plus forte, et l'on ne pouvoit plus voir dans l'ombre les taches qu'on avoit apperçues depuis le commencement de l'émersion, et sur-tout pendant que la Lune étoit entièrement dans l'ombre [a].

1771. Dans l'éclipse du 10 sept. suivant, l'ombre étoit si obscure, que les taches ne pouvoient s'appercevoir dans l'ombre, quoique le ciel fût parfaitement beau; on n'avoit guere vu l'ombre aussi noire dans les éclipses. On ne faisoit que soupçonner le bord de la Lune qui étoit dans l'ombre, il étoit presque effacé. Cependant le diametre de la Lune n'étoit que de $32'\frac{1}{2}$, et la Lune n'étoit pas dans son périgée (M. Messier, *Mém.* 1783). Au reste, une partie de ces différences vient de ce que l'ombre paroît mieux, et les taches moins bien, quand une partie de la Lune est éclairée. Nous parlerons de l'observation des éclipses de Lune (2471).

Des éclipses de Soleil.

1772. Les éclipses de Soleil sont produites par l'interposition de la Lune, qui, dans ses conjonctions, passe quelquefois directement entre nous et le Soleil : elle le cache alors en tout ou en partie. Les éclipses totales sont celles où le Soleil est entièrement couvert, le diametre apparent de la Lune étant plus grand que celui du Soleil. Les éclipses annulaires sont celles où la Lune paroît tout entiere sur le Soleil, le disque de la Lune étant le plus petit; le Soleil excede alors de tout côté celui de la Lune, et forme autour d'elle un anneau ou une couronne lumineuse : telle fut l'éclipse du premier avril 1764, que l'on vit annulaire à Cadix, à Rennes, à Calais, et à Pello en Lapponie, ainsi que je l'avois annoncé dans la *Connoissance des mouvemens célestes* de 1764. Les éclipses *centrales* sont celles où la Lune n'a aucune latitude au moment de la conjonction apparente; son centre paroît alors sur le centre même du Soleil, et l'éclipse est ou totale ou annulaire.

1773. Les plus anciens auteurs nous ont consigné comme des

(a) On avoit négligé d'allumer les lanternes, à cause de la pleine lune, et il y eut beaucoup de confusion à la sortie des spectacles.

événemens remarquables les grandes éclipses de Soleil. Il en est parlé dans Isaïe (*chap.* 13); dans Homere et dans Pindare; dans Pline (*lib. II, cap.* 12); dans Denys d'Halicarnasse (*liv. II*). Ce dernier dit qu'à la naissance de Romulus, et à sa mort, il y eut des éclipses totales de Soleil, dans lesquelles la Terre fut dans une obscurité aussi grande qu'au milieu de la nuit. Hérodote nous apprend que, dans la sixieme année de la guerre entre les Lydiens et les Medes, il arriva pendant la bataille que le jour se changea en une nuit totale : Thalès l'avoit annoncé pour cette année-là, 603 avant notre ere (296). On trouve de semblables éclipses dans les années 431, 190, et 50 avant notre ere; et dans les années après J. C. 59, 100, 237, 360, 787, 840, 878, 957, 1133, 1187, 1191, 1241, 1415, 1485, 1544, 1560 (*Képler, Astron. pars opt. pag.* 290, etc.) Les anciennes éclipses dont il est parlé dans les auteurs, se trouvent dans Riccioli (*Almag. I,* 361), et dans les Tables de Berlin (*II,* 121), d'après Calvisius, Struyck et Ferguson.

1774. C'est une chose très singuliere que le spectacle d'une éclipse totale de Soleil. Clavius, qui fut témoin de celle du 21 août 1560 à Conimbre, dit que l'obscurité étoit, pour ainsi dire, plus grande ou du moins plus sensible et plus frappante que celle de la nuit; on ne voyoit pas où pouvoir mettre le pied, et les oiseaux retomboient vers la terre, par l'effroi que leur causoit une si subite obscurité (*Képler, Astr. pars opt.* 296). Dans l'éclipse du 3 mai 1715, qui fut totale à Londres, on entendoit les coqs chanter, on voyoit les hibous passer, les poules se percher, les chevaux se coucher dans la campagne. Cependant l'obscurité n'étoit pas, à beaucoup près, aussi grande que celle de la nuit : mais on voyoit des étoiles de la seconde grandeur. La couleur du ciel étoit singuliere; elle avoit quelque chose qui inspiroit de la frayeur, et ne ressembloit ni au crépuscule, ni à la nuit (*Mém.* 1715).

1775. Il n'y a eu depuis très long-temps à Paris d'autre éclipse totale, que celle du 22 mai 1724 : elle dura deux minutes et un quart. Celle de 1706 fut de dix doigts et 58′ : il restoit environ $\frac{1}{12}$ du diametre du Soleil; sa lumiere étoit, à la vérité, d'une pâleur effrayante et lugubre : cependant tous les objets se distinguoient aussi facilement que dans le plus beau jour (*Hist. acad.* 1706). Cette éclipse fut totale à Montpellier, et l'on y remarqua autour de la Lune une couronne d'une lumiere pâle, large de la douzieme partie du diametre de la Lune, dans sa partie la plus sensible, mais qui, diminuant peu-à-peu, s'appercevoit encore à 4° tout autour de la Lune.

1776. Dans l'éclipse de Soleil du 23 septembre 1699, il ne resta

que $\frac{1}{160}$ du diametre du Soleil à Gripswald en Poméranie; l'obscurité y fut si grande, qu'on ne pouvoit lire ni écrire : il y eut des personnes qui virent quatre étoiles, probablement Mercure, Vénus, Régulus et l'Epi (*Hist. acad.* 1700).

Dans l'éclipse de 1724, on vit le Soleil, Mercure et Vénus sur la même ligne droite : il parut peu d'étoiles, à cause des nuages. La premiere petite partie du Soleil qui se découvrit, lança un éclair subit et très vif, qui sembla dissiper toute l'obscurité : le barometre ne varia point; le thermometre baissa un peu, mais il seroit difficile de dire si l'éclipse en étoit cause : l'on vit autour du Soleil la couronne lumineuse dont on avoit beaucoup parlé dans l'histoire de 1706 (*Mémoires de l'acad.* 1715; *Histoire de l'acad.* 1724; *Mém. pour servir à l'histoire de l'astron.* par de l'Isle, 1738, *pag.* 205).

1777. Suivant M. du Séjour (*Mém. de l'acad.* 1777), on trouve 12′ 24″ pour la plus grande durée possible sur la Terre, d'une éclipse annulaire, et 7′ 58″ pour la plus grande durée d'une éclipse totale. Mais ce n'est pas dans les lieux où l'éclipse est centrale, qu'on a la plus grande durée, ou pour l'obscurité, ou pour l'anneau.

1778. Les éclipses de Soleil, pour un lieu déterminé, sont beaucoup plus rares que les éclipses de Lune, parceque la Lune, étant beaucoup plus petite que la Terre, ne peut couvrir qu'une très petite partie de notre globe : souvent même la pointe du cône d'ombre n'arrive pas jusqu'à nous, et c'est alors que les éclipses sont *annulaires.* Il arrive toutes les années plusieurs éclipses de Soleil, mais on ne les voit pas toutes dans un même lieu; car, depuis 1755 jusqu'en 1764 inclusivement, on ne trouve que quatre éclipses de Soleil, visibles à Paris, tandis qu'on y a dû voir onze éclipses de Lune; mais pour la Terre en général. Les éclipses de Soleil sont plus fréquentes.

1779. Louis XV ayant desiré de savoir s'il y auroit à Paris des éclipses totales, dans l'espace de quelques années, j'engageai M. du Vaucel à se livrer à cette recherche; il trouva que, depuis 1769 jusqu'à 1900, il y auroit 59 éclipses visibles à Paris, sans qu'aucune y soit totale; une seule sera annulaire, c'est celle du 9 octobre 1847 (*Mém. présentés, etc. tom. V, pag.* 575).

1780. D'après cela, on dut être étonné de voir paroître dans la gazette de France du 19 mars 1764, l'article suivant, envoyé par un curé de province, qui sans doute ne connoissoit d'éclipse que les éclipses totales : « On craint que l'office du matin, qui doit se célé-
« brer dans les différentes paroisses le dimanche, 1 avril prochain,
« ne soit troublé par la frayeur et la curiosité que peut exciter parmi

« le peuple l'éclipse *annulaire* du Soleil; on a cru qu'il ne seroit pas
« inutile de rendre public l'avis suivant :

« Les curés, tant des villes que de la campagne, sont invités à « commencer plutôt qu'à l'ordinaire l'office du quatrieme dimanche « du carême, à cause de l'éclipse *totale* du Soleil, qui, sur les dix « heures du matin, ramenera les ténebres de la nuit. Ils sont priés « en même temps d'avertir le peuple que les éclipses n'ont sur « nous aucune influence, ni morale, ni physique; qu'elles ne pré- « sagent et ne produisent ni stérilité, ni contagion, ni guerre, ni « accident funeste, et que ce sont des suites nécessaires du mou- « vement des corps célestes, aussi naturelles que le lever ou le cou- « cher du Soleil ou de la Lune. »

Dans l'assemblée de l'académie, du 21 mars, l'on parla de cette annonce, où l'on confondoit une éclipse annulaire avec une éclipse totale, et où l'on annonçoit une obscurité entiere, tandis que les almanacs avoient dû suffire pour prévenir la fausseté et l'inutilité de cette annonce. Elle avoit été démentie long-temps d'avance par les Ephémérides de la Caille, par la *Connoissance des temps* que j'avois publiée, par la carte de madame le Paute, déja très répandue. Il fut décidé dans l'académie que, comme il restoit encore 10' avant l'éclipse, on feroit mettre dans la gazette un avertissement contraire; il parut en effet dans ces termes, cinq jours avant l'éclipse : « Le sieur « Cassini de Thury, de l'académie royale des sciences, a présenté « au roi un mémoire sur l'éclipse annulaire du Soleil du 1er avril pro- « chain, d'après les observations faites sur les dernieres éclipses du « Soleil, tant annulaires que totales; il résulte que celle du 1er avril « ne ramenera pas les ténebres de la nuit, comme on l'a dit dans « l'avis inséré dans la gazette du 19 de ce mois. »

Malgré cet avertissement, le bruit qui s'étoit répandu dans toute la France d'une éclipse totale, fit avancer l'office dans le plus grand nombre des paroisses, même à Paris : l'impression étoit faite; et l'on ne tenoit nul compte de l'avis publié. J'entends même, plus de 20 ans après, reprocher aux astronomes qu'ils se trompent quelquefois, puisqu'ils avoient annoncé (pour 1764) une éclipse totale qui n'a pas eu lieu. Cependant on vient de voir que, dans l'article de la gazette, il n'étoit question que d'une éclipse annulaire : mais on la confondoit ensuite avec une éclipse totale. On avoit distribué dans Paris un très grand nombre d'exemplaires de deux cartes gravées, où madame le Paute avoit tracé les phases de cette éclipse; on y voyoit la figure du Soleil, débordant la Lune tout autour; sans parler de la *Connoissance des temps* où j'en avois donné l'explication,

étant alors chargé de cet ouvrage, d'où l'on tire tous les almanacs de Paris et des provinces.

1781. Le calcul des éclipses de Soleil, pour un lieu en particulier, est beaucoup plus difficile et plus long que celui des éclipses de Lune, à cause des parallaxes qui y entrent nécessairement; les parallaxes different pour chaque point de la Terre, en sorte qu'une éclipse de Soleil paroît d'une maniere différente à différens pays : à 25 lieues de distance d'un endroit où il n'y a point d'éclipse, il peut y en avoir une d'une minute de degré, et qui dureroit 20' de temps : au contraire, une éclipse de Lune paroît de la même grandeur pour tous ceux qui peuvent l'appercevoir; car la Lune, perdant alors véritablement sa lumiere, devient obscure pour tout le monde.

Si nous étions placés en un point de la surface de la Lune, lorsqu'elle est éclipsée, et que nous voulussions calculer la maniere dont l'éclipse devroit paroître dans ce point déterminé de la Lune, nous tomberions également dans la difficulté des parallaxes. Car l'éclipse de Lune, qui seroit réellement alors une éclipse de Soleil, ayant lieu successivement et différemment pour les différens points de la surface lunaire, il faudroit calculer la parallaxe pour le point de la Lune où nous serions placés.

Au contraire, si, dans le temps que nous avons sur la Terre une éclipse de Soleil, un observateur placé dans la Lune vouloit nous regarder, et calculer cette éclipse qu'il appelleroit *éclipse de Terre*, il n'y trouveroit pas plus de difficulté que nous en trouvons dans le calcul d'une éclipse de Lune : il verroit les mêmes phases en quelque point de la Lune qu'il fût placé; il appercevroit une petite tache noire et ronde s'avancer sur le disque de la Terre, et le parcourir successivement : c'est ainsi qu'il faudra considérer les éclipses de Soleil en général, sans égard à la position de l'observateur, pour rendre la théorie plus simple, et aller pas à pas avant que d'entrer dans des détails plus compliqués.

La théorie et le calcul des éclipses de Soleil étant difficiles pour ceux qui commencent, j'ai cru qu'il falloit employer d'abord une méthode, pour ainsi dire, mécanique, et telle que les yeux pussent soulager l'imagination : je vais donc expliquer une opération graphique, avec laquelle on pourra calculer une éclipse de Soleil, pour la Terre en général, avec la même facilité que l'on a calculé une éclipse de Lune (1767); et même trouver, à quelques minutes près, pour chaque pays de la Terre, les circonstances de l'éclipse, par le moyen d'un globe terrestre, pourvu qu'on ait fait seulement les calculs préliminaires (1741).

1782. Pour faire sentir les raisons et les principes de cette opération graphique, nous allons montrer la maniere dont les éclipses de Soleil arrivent sur la surface de la Terre, dans le cas le plus simple : en supposant un principe qu'il ne faut pas perdre de vue, savoir, que le Soleil est assez éloigné de nous, pour que les rayons qui partent du centre du Soleil, et qui vont aux différens points de la Terre, soient sensiblement paralleles (1726). Le point T (FIG. 104), que je suppose le centre de la Terre, voit le centre du Soleil par un rayon TS; le point E, qui est à la surface de la Terre, voit le centre du Soleil par un autre rayon ES, ou plutôt EO, qui ne fait avec le précédent qu'un angle de 8″6 (1725), et qui va par conséquent le rencontrer à une distance prodigieuse; ainsi ce rayon est sensiblement parallele au précédent : on peut donc supposer que la ligne EAO, parallele à TLS, est celle par laquelle le point E de la Terre voit le centre du Soleil.

1783. Si cependant l'on veut avoir égard à la parallaxe du Soleil, et supposer que le rayon EO se rapproche de TS, pour aller former au centre du Soleil un angle de 8″, toute la différence consistera à diminuer l'angle TEO de 8″, en tirant une ligne ER qui fasse avec EO un angle REO de 8″; et ce sera sur la ligne ER que le point E de la Terre verra le centre du Soleil, puisque ER et TS vont se réunir au Soleil sous un angle de 8″, qui est en effet la parallaxe du Soleil. Si l'on suppose que LA soit une portion de l'orbite lunaire, interceptée par les rayons TS, ER, cette ligne LA paroîtra plus petite de 8″, lorsqu'on voudra tenir compte de la parallaxe du Soleil. Pour le comprendre, il suffit de concevoir un autre rayon GS qui, du point G de la Terre, aboutit au centre du Soleil S; l'intervalle que les rayons GS et TS interceptent dans l'orbite de la Lune, est vu de la Terre sous un angle LGS, qui est la différence des angles GLT et LSG, c'est-à-dire, la différence des parallaxes de la Lune et du Soleil : mais il faut imaginer le point de concours S à une distance prodigieuse, pour que l'angle S ne soit que de 8″; alors l'angle LGS est plus petit de 8″ que l'angle GLT, et l'angle REL plus petit de 8″ que l'angle ELT, ou son égal, OEL; ainsi la projection de la Terre est sensiblement égale à la parallaxe de la Lune.

1784. Si la Lune est en L, au moment de la conjonction, l'observateur, placé en K sur la surface de la Terre, verra une éclipse centrale de Soleil (1772), puisque le centre de la Lune lui paroîtra sur le rayon même TKLS, par lequel il voit le centre du Soleil. Soit AL une portion de l'orbite lunaire décrite avant la conjonction, en allant de A en L, ou d'occident vers l'orient : puisque le point E de

la Terre voit le centre du Soleil sur la ligne EAO (1782); il s'ensuit que, quand la Lune sera au point A de son orbite, elle couvrira le Soleil, et formera une éclipse centrale pour l'observateur placé en E; car alors le centre de la Lune, aussi bien que celui du Soleil, paroîtront sur une même ligne EAO.

Si la Lune emploie une heure à parcourir la portion AL de son orbite, l'éclipse aura lieu pour le point E de la Terre, une heure avant qu'elle ait lieu pour le point K, ou pour le centre T de la Terre, c'est-à-dire, une heure avant la conjonction, que je suppose arriver au point L. L'espace AL est ce que nous appellerons le *rayon de projection* (1791, 1823), parceque c'est l'espace auquel on rapporte les points E et K de la Terre, comme sur un plan de projection : nous parlerons plus en détail de la nature et des circonstances de la projection (1812, 4059).

1785. Je sais que l'on a d'abord quelque peine à se figurer ainsi le Soleil répondant, au même instant, à divers points de la projection pour différens lieux de la Terre : mais qu'on réfléchisse à ce qui se passe dans une allée de jardin, où l'on se promene, en voyant le Soleil sur sa droite; toutes les ombres des arbres sont paralleles entre elles : quand on est sur la premiere ombre, on voit le Soleil répondre au premier arbre; quand on a fait quelques pas, on voit le Soleil répondre à l'arbre suivant; et s'il y a quatre personnes en même temps, qui soient entre elles à la même distance que les quatre arbres sont entre eux, elles verront répondre le Soleil aux quatre arbres différens : c'est ainsi que l'observateur qui est en D voit le Soleil répondre au point C de l'orbite de la Lune ou de la projection, tandis que l'observateur qui est en K voit le Soleil au point L[a], comme celui qui est en F voit le Soleil au point H.

1786. Dans cette méthode des projections, nous n'avons plus à considérer la parallaxe de la Lune, ni la maniere dont elle paroît à différens pays : nous ne considérons que son vrai lieu; car nous avons transporté au Soleil tout l'effet de la parallaxe, en prenant des rayons paralleles qui partent de chaque point de la Terre, et vont marquer le lieu du Soleil, dans l'orbite de la Lune, à des points qui sont différens, précisément en raison des parallaxes.

Le point de la projection, par lequel nous représentons le Soleil ou le lieu de l'observateur, n'est que le point où passe la ligne qui

(a) Les points E, F, K de la Terre ne sont point fixes; ils tournent par le mouvement de rotation de la Terre : mais, dans ces préliminaires généraux, nous n'examinons pas quels pays de la Terre occupent ces différens points du globe; il suffit de considérer les points en général.

va de l'œil au Soleil; ainsi, quand la Lune se trouvera au même point, il y aura une interposition, c'est-à-dire, une éclipse de Soleil.

1787. Le point E de la Terre est le premier point d'où l'on verra la Lune sur le Soleil; il aura l'éclipse centrale quand la Lune sera en A (1784), le centre de la Lune répondant au centre du Soleil; mais avant que d'être en A, le centre de la Lune a été en un point M, tel qu'alors le bord B de la Lune touchoit le bord du Soleil, parceque le centre du Soleil paroissant en A, le bord de son disque paroissoit en B, éloigné du centre A d'environ 16′ (1388); le centre M de la Lune étoit alors éloigné du centre A du Soleil d'une quantité égale à la somme des demi-diametres AB et BM du Soleil et de la Lune, et c'étoit le commencement de l'éclipse pour l'observateur situé en E, ou le premier instant où il a vu le bord de la Lune toucher le bord du Soleil; la distance de la Lune au point L de la conjonction, ou à la ligne des centres, étoit égale à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, plus la quantité AL égale à ET. L'observateur qui, au lever du Soleil, étant en E, aura vu l'attouchement des bords de la Lune et du Soleil, verra l'éclipse centrale d'un autre point différent du point E; et ce sera l'habitant de la Terre qui sera arrivé à son tour au bord E du cercle d'illumination, qui verra l'éclipse centrale, lorsque la Lune sera parvenue en A.

1788. La partie AL de l'orbite lunaire égale au rayon ET de la Terre, paroît sous un angle AEL, égal à l'angle ELT qui est la parallaxe horizontale de la Lune (1624); la partie ML paroît donc égale à la somme du demi-diametre BM de la Lune, du demi-diametre BA du Soleil, et de la parallaxe horizontale de la Lune qui est égale à AL. Ainsi le point E de la Terre verra commencer l'éclipse, aussitôt que la distance ML de la Lune au point L de la conjonction sera égale à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, et de la parallaxe horizontale de la Lune, dont on aura ôté 8″ pour plus d'exactitude (1783). De même le point G, le dernier, et le plus oriental de la Terre, verra finir entièrement l'éclipse, lorsque la Lune, après avoir passé la conjonction, sera éloignée du point L de la même quantité, c'est-à-dire, de la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, et de la parallaxe de la Lune.

Si la Lune est en C, de maniere que AC soit aussi égal à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, le point E de la Terre verra aussi le centre C de la Lune éloigné du centre A du Soleil, de la somme des demi-diametres; c'est-à-dire qu'il verra les bords du Soleil et de la Lune se toucher, et l'éclipse finir, puisqu'alors le centre du Soleil paroît en A, et celui de la Lune en C, à une distance

CA

CA égal à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune.

Mais, dans le temps que la Lune est en C, et que le point E de la Terre voit finir l'éclipse, un autre point D de la Terre, qui voit le centre du Soleil sur le rayon DC parallele à TS, voit le centre de la Lune sur celui du Soleil, c'est-à-dire qu'il a une éclipse centrale : il en est de même de tous les autres points de la Terre qui répondent perpendiculairement sous différens points de la ligne ACL.

1789. Tandis que le point E de la Terre voit finir l'éclipse par le contact des deux bords, lorsque le centre de la Lune est en C, et que le point D voit l'éclipse centrale, les points de la Terre, situés entre E et D, voient l'éclipse de différentes grandeurs ; ainsi le point F de la Terre, qui voit le centre du Soleil sur la parallele FH, voit la distance apparente de la Lune C au Soleil H de la quantité CH : si nous supposons que la ligne CH, prise sur l'orbite lunaire LCHAM, soit plus petite que la somme des demi-diametres, la Lune anticipera d'autant sur le Soleil ; si elle est plus petite d'un doigt, le bord de la Lune sera d'un doigt sur le Soleil ; on dira que l'éclipse est d'un doigt. Si CH est supposée moindre de six doigts, ou de la moitié du Soleil, que la somme des demi-diametres, il faut nécessairement que cette somme, qui forme la distance des centres de la Lune et du Soleil, au commencement de l'éclipse, ait été retrécie d'autant ; elle n'a pu l'être, que parceque le disque lunaire a anticipé d'autant sur celui du Soleil ; donc, dans la supposition de CH moindre que CA de six doigts pour le point F, il doit y avoir six doigts du diametre du Soleil couverts par la Lune pour l'observateur F, et par conséquent l'on verra du point F le bord de la Lune sur le centre même du Soleil. De même si CH est plus petite que cette somme, et cela de trois doigts seulement, la Lune anticipera ou mordra sur le Soleil d'autant, et l'éclipse ne sera que de trois doigts.

1790. Ainsi pour trouver le point F de la Terre, où l'éclipse doit paroître de trois doigts, à un instant donné où l'on suppose la Lune en C, il faut, en partant du point C où est la Lune, 1°. prendre CA égale à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune ; 2°. en partant du point A, prendre AH de trois doigts, etc. 3°. abaisser une perpendiculaire HFN sur la Terre, (c'est-à-dire, sur le plan GE du cercle de la Terre, qui est perpendiculaire à la ligne des centres), et l'on aura le point F de la Terre où l'éclipse doit paroître de trois doigts, la Lune étant en C, puisque le Soleil paroissant alors en H et la Lune en C, leur distance est plus petite de trois doigts, que la somme des demi-diametres.

1791. J'ai supposé jusqu'ici que l'orbite LBM de la Lune passoit par

la ligne SLT, qui joint les centres du Soleil et de la Terre, et que la Lune en conjonction n'avoit aucune latitude ; voyons ce qui arrivera dans les cas où la Lune en conjonction aura une latitude. Il faut considérer d'abord que tout ce que j'ai dit du point M (1787), doit s'entendre également de tout autre point qui seroit à la même distance du point T et du point L au-dessus ou au-dessous de la figure ; supposons que la ligne LM (égale à la parallaxe de la Lune, plus la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune), tourne autour du point L, et décrive un cercle dont le plan soit perpendiculaire à LT, et au plan de notre figure, en sorte que tous les points de ce cercle soient à égales distances du point T ; c'est ce cercle décrit sur LM que nous appellerons le *cercle de projection* (1822), et nous allons le considérer seul dans la suite du discours, en y rapportant tout ce que nous venons de dire sur la *figure* 104. Il est évident que les différens points du cercle placé dans la région de la Lune et décrit sur LA, répondent aux différens points de la circonférence de la Terre, de la même maniere que le point A répond au point E de la Terre, et le point L au point K ; chaque point de la Terre a sa projection ou son image à l'extrémité de la ligne qui va tomber perpendiculairement au plan de projection, dans la région de la Lune.

1792. Supposons une ligne LB (FIG. 103), de même longueur que la somme LM du rayon de projection et des demi-diametres du Soleil et de la Lune, dans la FIG. 104 ; décrivons un cercle BCGD sur le plan de projection ; décrivons aussi un autre cercle AEFR, dont le rayon LA soit égal à la parallaxe de la Lune, dont on retranchera 8″6 pour plus d'exactitude (1783), comme LA, dans la figure 104, formoit le rayon de projection égal au rayon de la Terre, et vu sous un angle égal à la parallaxe de la Lune ; lorsque la Lune approchera assez de la conjonction, pour que son centre vienne à se trouver sur quelque point K de la circonférence BCD, l'éclipse commencera pour un point correspondant de la surface de la Terre (1788).

De même, lorsque le centre de la Lune sera sur quelque point V de la circonférence AVE du cercle de projection, le centre de la Lune paroîtra répondre sur le centre du Soleil, et l'éclipse commencera d'être centrale pour quelque point de la surface de la Terre, c'est-à-dire, pour celui qui se trouvera directement sous le point V, ou qui aura sa projection au point V.

1793. L'ÉCLIPSE GÉNÉRALE de Soleil est celle que l'on calcule ainsi pour la Terre en général, sans examiner à quel pays elle se rapporte ; c'est par où nous commençons, à l'exemple de Képler

(*Epit. pag.* 873), avant de chercher les circonstances d'une éclipse de Soleil pour chaque lieu déterminé de la Terre. Au moment où la distance LK, du centre de la projection au centre de la Lune, est égale à la somme des trois demi-diametres du Soleil, de la Lune, et de la projection, l'éclipse de Soleil commence pour un point de la Terre qui répond perpendiculairement au point I (1787), ou dont la projection est en I; c'est le commencement de l'éclipse générale: de même, lorsque la Lune est parvenue au point G de son orbite, assez éloigné pour que la distance LG soit encore égale aux trois demi-diametres, le bord de la Lune quitte le bord du Soleil pour le dernier de tous les pays de la Terre où il peut y avoir éclipse; c'est la fin de l'éclipse générale. De même, la perpendiculaire LM, abaissée sur l'orbite, marque le milieu de l'éclipse générale, comme dans le cas des éclipses de Lune (1757).

1794. Pour connoître le temps du milieu de l'éclipse générale, on suppose les mêmes calculs préliminaires, et l'on suit la même méthode que pour une éclipse de Lune (1757); LAB représente une portion de l'écliptique, L le point où est le Soleil au moment de la conjonction, LH la latitude de la Lune, KMG l'orbite relative (1745). Dans le triangle LMH rectangle en M, on connoît l'angle HLM égal à l'inclinaison de l'orbite relative, et l'hypoténuse HL égale à la latitude de la Lune; on multipliera le côté LH par le sinus de l'angle MLH, et l'on aura le côté HM: on le convertira en temps, à raison du mouvement horaire de la Lune sur l'orbite relative, et l'on aura l'intervalle entre la conjonction et le milieu de l'éclipse; cet intervalle se retranchera du moment de la conjonction, arrivé en H, si la latitude de la Lune est croissante, c'est-à-dire, si la Lune a passé son nœud; mais il s'ajoutera au temps de la conjonction, si la Lune va en se rapprochant de son nœud; et l'on aura le temps du milieu de l'éclipse générale en M, comme dans les éclipses de Lune (1758).

Le cercle de projection AER représente le disque de la Terre, ou l'image de l'hémisphere éclairé de la Terre, transporté dans l'orbite ou dans la région de la Lune; la ligne VX est la portion de l'orbite lunaire qui sera décrite pendant la durée de l'éclipse centrale, comme la ligne KG est la portion d'orbite qui sera décrite depuis le premier moment où la pénombre (1768) touchera le disque de la Terre en quelque point I, c'est-à-dire, où quelque point de la Terre verra un commencement d'éclipse, jusqu'au dernier instant où la pénombre abandonnera la Terre au point F, le centre de la Lune étant alors en G, et l'éclipse finissant pour le dernier de tous les pays où elle sera visible. Ainsi la longueur KG de l'orbite lunaire,

comprise entre les points K et G, nous fera connoître la durée de l'éclipse générale, comme le milieu M de la ligne KG nous fera trouver le temps du milieu : la ligne KG est coupée en deux parties égales par la perpendiculaire LM, parceque les côtés LK et LG sont égaux; il en est de même de la corde VX; ainsi le point M indique le milieu de l'éclipse générale, dont la durée est exprimée par KG, et la durée de l'éclipse centrale est représentée par VX.

1795. Exemple. Dans l'éclipse du premier avril 1764, le temps vrai de la conjonction, suivant les tables, est 10h 31′ 8″ (a), à 12° 9′ 55″ de longitude; la latitude, pour ce temps-là, 39′ 37″9 boréale; le mouvement horaire de la Lune en longitude, 29′ 40″ ½; celui du Soleil, 2′ 27″7; le mouvement horaire en latitude, 2′ 43″53; l'inclinaison relative, 5° 43′ 6″; le mouvement horaire, relatif ou composé, 27′ 21″22, pour une heure de temps moyen, en le supposant constant pendant la durée de l'éclipse, ainsi que la parallaxe de la Lune, 54′ 8″1 : on fera ces deux proportions : R : 39′ 37″9 : : sin. 5° 43′ 6″ : 3′ 56″5, valeur de HM; ensuite 27′ 21″22 : 60′ 0″ : : 3′ 56″5 : 8′ 38″8; on les retranchera de l'heure de la conjonction, parceque la latitude de la Lune alloit en augmentant, et l'on aura 10h 22′ 29″ pour le temps vrai du milieu de l'éclipse générale, compté au méridien de Paris.

Le même triangle HLM fera trouver la perpendiculaire LM, par le moyen de cette analogie, R : cos. 5° 43′ 6″ : : 39′ 37″9 : 39′ 20″6; c'est la plus courte distance de la Lune au centre de la projection, dans le temps du milieu de l'éclipse : cette perpendiculaire LM nous servira pour trouver le commencement et la fin.

1796. Pour le commencement, on emploie le triangle LKM rectangle en M : on connoît la perpendiculaire LM (1795), et l'hypoténuse LK, égale à la somme des trois demi-diametres du Soleil, de la Lune, et de la projection (1787); on cherchera le côté MK, on le convertira en temps, à raison du mouvement horaire; et ce temps, ôté de celui du milieu de l'éclipse en M, donnera le temps du commencement de l'éclipse générale en K; étant ajouté, il donnera la fin de l'éclipse en G.

Exemple. Dans l'éclipse de 1764, le côté LM est de 39′ 20″6; la parallaxe de la Lune de 54′ 8″ pour Paris, le demi-diametre horizontal de la Lune 14′ 46″9, celui du Soleil 16′ 0″8; la somme des

(a) Par observation, elle est arrivée à 10h 31′ 23″ temps vrai, avec 39′ 36″ de latitude. Tous les calculs de cette éclipse ont été faits avec le plus grand soin, sur les tables de Mayer, par M. Carouge, qui a poussé la précision jusqu'aux centiemes de secondes.

demi-diametres et de la différence des parallaxes est de 1° 24′ 47″3; on résoudra le triangle LKM (1761); on trouvera le côté KM de 1° 15′ 6″4, qui, en temps, fera 2h 44′ 45″; ainsi l'on aura, pour le commencement de l'éclipse générale, 7h 37′ 44″ du matin, et pour la fin 1h 7′ 14″ après midi; sa durée sur toute la Terre étoit 5h 29′ 30″.

1797. Le commencement de l'éclipse centrale arrive lorsque la Lune est au point V, où son orbite coupe le cercle de projection (1794). Dans le triangle LMV, rectangle en M, on connoît la perpendiculaire LM (1795), et la ligne LV, qui est la différence des parallaxes, ou le rayon de la projection; on cherchera le côté MV; on le convertira en temps, c'est-à-dire, on cherchera le temps que la Lune emploie à parcourir VM, à raison du mouvement composé ou relatif; et ce temps étant ôté de celui du milieu de l'éclipse générale, on aura le temps qu'il étoit à Paris quand l'éclipse commençoit à être centrale pour quelque point V de la Terre.

Exemple. Dans l'éclipse de 1764, supposant LV = 53′ 59″6, LM = 39′ 20″6, on cherchera l'angle MCV, et le côté MV = 36′ 58″6, qui, réduit en temps, donne 1h 21′ 6″; cette demi-durée, étant ôtée du milieu de l'éclipse, 10h 22′ 29″, donnera le commencement de l'éclipse centrale, 9h 1′ 23″; la demi-durée, ajoutée au milieu de l'éclipse, donnera la fin 11h 43′ 35″. Le temps que l'ombre employoit à traverser la Terre, étoit de 2h 42′ 13″.

1798. Les calculs que nous venons de faire pour l'éclipse générale, peuvent s'exécuter graphiquement, comme ceux des éclipses de Lune (1767); on fera une grande figure, dont le rayon LA soit la différence des parallaxes du Soleil et de la Lune, c'est-à-dire, divisé en autant de minutes qu'en contient cette différence des parallaxes; on prendra la ligne LH, égale à la latitude de la Lune, et l'angle MLH égal à l'inclinaison relative de l'orbite lunaire; on prendra, sur la même échelle, une quantité égale au mouvement horaire relatif que l'on portera de H en N; on marquera en H l'heure et la minute de la conjonction, et en N une heure de moins: on divisera par ce moyen l'orbite GK en heures et minutes, et l'on verra à quelle heure la Lune s'est trouvée en K, en V, en M, en X, et en G, comme on l'a trouvé par les calculs des articles précédens.

1799. Il s'agit actuellement de connoître quels sont les différens pays de la Terre qui sont en V, en X, au moment où la Lune y arrive, c'est-à-dire, leurs longitudes géographiques, et leurs latitudes: Boulliaud les trouvoit par le moyen des tables du nonagésime : je donnerai une méthode pour les trouver avec la regle et le compas, en traçant des ellipses (1926), et pour en faire le calcul par la trigo-

nométrie (1911); mais il faut indiquer dès à présent une maniere simple de trouver ces pays sur le globe. Cela pourroit suffire pour tracer des cartes semblables à celles de la planche XIV, que l'on met ordinairement en abrégé dans les éphémérides. Ce fut Domin. Cassini qui en donna l'idée et le modele, à l'occasion de l'éclipse de 1664 (*Osservazione dell' eclisse solare fatta in Ferrara*, 1664. *Ferrarae, in-fol.*), Voyez art. 1821.

1800. Il y a, dans les manuscrits de Jos. de l'Isle, une description avec les plans d'une machine de son invention, propre à faire trouver facilement, et sans calcul, les circonstances d'une éclipse de Soleil. M. de Fouchy avoit aussi exécuté, il y a long-temps, une machine composée d'un globe et de différentes pieces pour le même usage. Segner, de Gottingen, en a décrit une dans les *Transactions philosophiques* de 1741. Enfin, dans le livre de Ferguson, intitulé *Astronomy explained*, 1764 (PLANCHE XIII), on trouve aussi la description d'une machine pour les éclipses, qu'il appelle *Eclipsareon*, avec laquelle il trouve le temps, la quantité, le progrès, les circonstances, et la durée d'une éclipse de Soleil pour tous les pays de la Terre.

1801. Pour moi, je ne suppose qu'un globe terrestre, qui ait cependant au moins six pouces de diametre, et une regle avec deux pieds, représentée par GVAE (FIG. 105), dont la longueur VA soit égale au diametre du globe dont on se sert, et la hauteur égale au rayon du globe, ou un peu plus, afin d'être placée sur son horizon GE; le rayon de ce globe doit représenter le rayon de la Terre, ou la parallaxe de la Lune, comme LA dans les *figures* 103 et 104, c'est-à-dire qu'il faut le supposer, par exemple, de 54′, parceque la parallaxe de la Lune dans l'éclipse de Soleil de 1764 étoit de 54′.

Comme l'on n'est pas maître de changer le diametre de son globe dans les différentes éclipses de Soleil, il faudra calculer les différentes parties de la figure, c'est-à-dire, le mouvement horaire de la Lune et les diametres du Soleil et de la Lune, en les réduisant à cette échelle; si le globe a 8 pouces de diametre, et que la parallaxe actuelle soit, par exemple, de 54′, on dira, 54′ sont à 48 lignes, comme 31′, somme des demi-diametres, sont à 27 lignes $\frac{5}{9}$, qui représenteront cette somme.

1802. On évitera même ces regles de trois en se servant d'une échelle composée de plusieurs lignes paralleles, et divisées en 60 parties par des transversales, telle qu'on la trouvera décrite ci-après (1845), et qu'on la voit dans la *figure* 115; la ligne marquée 60 est supposée égale au rayon du globe dont on se sert; mais le rayon de

ce globe devant toujours être égal à la parallaxe, si elle est de $54'$, on aura besoin d'une échelle plus longue que le rayon du globe dans le rapport de 60 à 54; car le rayon devant être alors divisé en $54'$, les minutes doivent être plus longues dans le même rapport, par conséquent les divisions sur lesquelles on les prendra doivent être plus étendues, ou être des portions d'une parallele plus longue, comme AB qui répond à $54'$.

1803. Pour placer sur le globe l'orbite de la Lune, il faut avoir fait une figure, telle que la *figure* 103, où LA représente une portion de l'écliptique, PL le méridien, HL le cercle de latitude, faisant avec PL un angle égal à l'angle de position (1044, 1833), GXK l'orbite relative (1745); on y ajoutera une ligne OLQ perpendiculaire au méridien PL pour représenter le diametre de l'équateur; elle sera au midi ou au-dessous de l'écliptique à l'orient du globe, comme en Q, lorsque le Soleil sera dans les signes ascendans, c'est-à-dire, quand la conjonction arrivera depuis le 21 décembre jusqu'au 21 juin. La somme de l'angle ALO et de l'inclinaison de l'orbite relative, ou leur différence, suivant les cas, donnera l'angle de la perpendiculaire LM avec le méridien universel LP, ou le méridien du globe, que l'on suppose immobile : cet angle est le même que l'angle de l'orbite GK avec l'équateur QO, qui fait toujours un angle droit avec le cercle de déclinaison LP; il est de 28° 44' pour 1764; on prendra sur la figure avec un compas les arcs OV, QX, dont l'un est ici de 15° et l'autre de 72, et l'on marquera un pareil nombre de degrés sur l'horizon du globe, à compter depuis les vrais points d'orient et d'occident, c'est-à-dire, depuis les intersections de l'équateur et de l'horizon du globe, en allant du côté du nord si la latitude de la Lune est boréale, du côté du midi si elle est australe.

On élevera le pole du globe sur son horizon du nombre de degrés que la déclinaison du Soleil indiquera; si la déclinaison est boréale, c'est le pole boréal qu'il faut élever; ce sera le pole antarctique, si la déclinaison est méridionale, le Soleil étant supposé au zénit du globe, et l'horizon représentant le cercle qui sépare la partie de la Terre qui est éclairée d'avec la partie obscure. On placera le support GVAE (FIG. 105) de maniere que le bord de la regle supérieure VA réponde perpendiculairement au-dessus des deux points marqués sur l'horizon du globe; dans cet état, le bord de cette traverse VA représentera l'orbite de la Lune, placée sur l'horizon du globe, comme elle l'étoit sur le cercle de projection dans la *figure* 103.

Il faut prendre encore sur la *figure* 103 les temps de l'orbite lu-

naire qui répondent en V et en X, c'est-à-dire, au commencement et à la fin; on les écrira sur le support VA, que je suppose couvert d'une petite bande de papier collé, en prenant les points V et A qui répondent perpendiculairement aux bords du globe pour représenter la durée de l'éclipse, et l'on aura l'intervalle AV; on le divisera en minutes de temps, comme l'on a divisé l'orbite VX de la Lune (1798), ou bien l'on se servira du mouvement horaire, et l'on marquera seulement le temps du milieu de l'éclipse sur le milieu L de la regle.

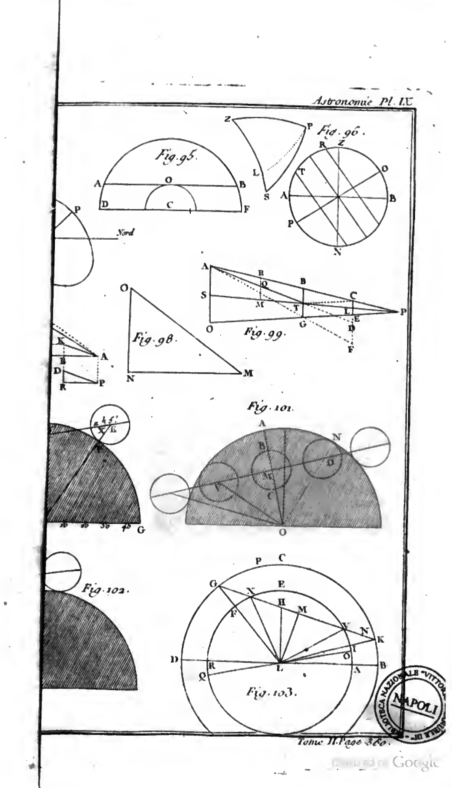
1804. Il ne s'agira plus que de placer le globe sur l'heure qui lui convient; par exemple, dans l'éclipse de 1764, la Lune devant être en A à $9^h\ 1'$, qui est le commencement de l'éclipse centrale compté au méridien de Paris, on tournera le globe de maniere que Paris soit en C, $2^h\ 59'$ à l'occident du *méridien universel* MP : c'est ce méridien dans lequel le Soleil est supposé fixe, tandis que tous les pays de la Terre passent successivement devant lui par la rotation du globe d'occident en orient (1816).

1805. Le globe terrestre étant ainsi disposé pour l'heure de Paris, il est aussi placé pour tous les autres pays, et la Lune étant supposée en A, le point de la Terre qui répond perpendiculairement sous la Lune, est celui où l'éclipse paroît centrale dans ce même moment (1787) : on n'a donc qu'à abaisser un à-plomb du point A, si l'horizon du globe est bien de niveau, ou placer l'œil perpendiculairement au dessus du point A, ou enfin se servir d'une petite équerre[a]; et l'on verra sur le globe à l'horizon, perpendiculairement au-dessous de A, le point cherché, et l'on marquera sa longitude 333° et sa latitude 18° nord; ce sera le premier point de l'éclipse centrale au lever du Soleil, marqué C sur la carte de la *planche XIV*, entre les Açores et l'Amérique.

Au point A l'on placera le centre d'un cercle parallele à l'horizon du globe, et dont le rayon AD soit égal à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, que j'appellerai le cercle de la pénombre; on pourra faire un cercle de carton; ou bien l'on fera circuler un compas dont l'ouverture soit égale à la somme des demi-diametres, et dont une pointe soit en A; on remarquera tous les points du globe qui se trouveront répondre perpendiculairement sous quelques points de la circonférence de ce cercle; ce sont ceux qui verront les bords du Soleil et de la Lune se toucher au même instant.

(a) L'équerre pourroit être mobile le long de la regle, dans une coulisse, et la branche verticale couler dans une entaille, pour arriver aux différens points du globe.

1806.


Fig. 95.
A
O
B
D
C
F
Z
P
Fig. 96.
R
Z
T
O
L
S
A
B
P
N
Nord
P
A
R
B
C
S
Q
M
T
L
P
O
G
E
D
F
Fig. 99.
O
Fig. 98.
N
M
K
A
B
D
R
P
X
E
G
Fig. 101.
A
N
B
M
D
C
O
Fig. 102.
P
C
G
X
E
H
M
F
V
N
K
D
R
L
O
A
B
Fig. 103.

1805. On fera un autre cercle dont le rayon soit plus petit que le précédent d'un quart du diametre du Soleil, c'est-à-dire, de 3 doigts (c'est 8′ pour 1764), ou bien on échancrera de la même quantité une portion du même cercle qui a servi pour la premiere phase, ou enfin l'on diminuera seulement l'ouverture du compas dont on s'est servi dans l'opération précédente; alors la circonférence du cercle, ainsi diminuée de trois doigts, ou l'ouverture du compas, promenée tout autour du point A (FIG. 105), indiquera sur le globe, par le moyen de l'à-plomb, tous les points de la Terre où le Soleil est éclipsé dans ce moment-là de neuf doigts seulement; on en comprendra la raison en réfléchissant sur les articles 1789 et 1790.

1806. On pourra faire de même d'autres cercles pour l'éclipse de 6, 4 et 2 doigts, en diminuant de 6, 8, et 10 doigts le rayon du cercle de la *pénombre;* on pourra aussi échancrer un seul cercle dont la circonférence soit divisée en 12 parties, et le rayon de même en 12 parties, et dont les 12 secteurs aillent en diminuant comme le limaçon d'une montre à répétition (FIG. 106), chacun étant plus petit que le précédent d'un doigt ou d'une douzieme partie du diametre solaire, pris sur la même échelle que la parallaxe horizontale et le mouvement horaire (1801); en promenant un à-plomb sur ces circonférences, il marquera sur le globe les pays qui, pour cet instant-là, auront l'éclipse d'un doigt ou de 2, etc.

Si l'on place en L, sur le milieu de la traverse AV, le centre de ces cercles, et qu'on fasse la même opération après avoir fait tourner le globe pour amener la rosette P du globe sur $10^h\,22'$, qui est l'heure du milieu de l'éclipse générale au méridien de Paris, on trouvera tous les pays qui, à $10^h\,22'$, ont l'éclipse d'un doigt, de deux, etc. C'est ainsi qu'on peut tracer sur un globe, ou sur une carte géographique, la figure de tous les points qui auront une éclipse centrale, ou qui auront l'éclipse d'un doigt, de deux, etc. On en trouvera le calcul trigonométrique avec un exemple (articles 1911 et suiv.). Il est bon d'observer dès-à-présent que tous ces pays qui, dans un instant donné, voient l'éclipse d'un doigt, ne sont pas cependant ceux qui auront la plus grande phase ou la grandeur de l'éclipse d'un doigt; car ce n'est pas le milieu de l'éclipse pour ce lieu-là qu'on trouve par cette opération, c'est seulement la phase qui a lieu pour cet instant; elle pourra être plus grande dans un autre moment, ou plutôt ou plus tard.

Pour avoir la plus grande phase, on ne prend que les pays qui sont les plus éloignés de l'orbite; il faut encore voir quel est le lieu qui, par un petit mouvement du globe et un petit mouvement simul-

tané de la Lune, conserve la même distance à la Lune, ou la même phase; mais cette détermination se trouvera ci-après par une autre méthode (1939).

Méthode pour trouver les phases d'une éclipse de Soleil, par le moyen des projections, dans un lieu déterminé.

1807. La méthode que je viens d'expliquer pour trouver, par le moyen d'un globe, les pays de la Terre qui doivent avoir une éclipse de Soleil, ne seroit pas assez exacte pour trouver, à une ou deux minutes près, le commencement et la fin de l'éclipse en un lieu quelconque, à moins qu'on n'eût un globe très grand et très parfait; mais nous y parviendrons aisément au moyen d'une figure de projection et d'une ellipse tracée avec soin: cette opération graphique, avec la regle et le compas, sera plus exacte et aussi simple que celle du globe. Avant d'en donner les regles, je vais tâcher d'en faire comprendre la théorie en expliquant avec soin les principes de la projection: j'en ai déja fait quelque usage (art. 1784 et suiv.); mais je vais en expliquer ici tous les fondemens et toutes les circonstances.

1808. Dominique Cassini s'étoit occupé, à ce qu'il paroît, de cette matiere, même avant que d'avoir quitté l'Italie (1812). Weidler cite à ce sujet un ouvrage de Cassini, intitulé: *Nova eclipsium methodus, Bonon. Italicè*, 1663, *in*-4°. J'aurois été fort curieux de voir un ouvrage aussi ancien de Cassini sur cette matiere; mais je l'ai cherché inutilement, et je suis persuadé qu'il n'a point été imprimé. M. Zanotti m'a dit qu'étant jeune il reçut de Manfredi des manuscrits que Cassini avoit autrefois prêtés à ce dernier, où étoit expliquée la méthode de calculer graphiquement les éclipses; ces manuscrits étoient en françois; ce qui prouve qu'il les avoit composés en France: il n'y faisoit mention d'aucun ouvrage précédemment publié, et Manfredi n'en avoit pu indiquer aucun à Zanotti lorsqu'il lui prêta ces papiers. On ne voit rien de Cassini jusqu'à l'année 1700, qu'il fit part de sa méthode à l'académie (*Hist. de l'acad.* 1700); elle se trouve fort au long à la tête des tables de Cassini le fils publiées en 1740.

1809. Flamsteed donna une dissertation à la suite du cours de mathématiques de Jonas Moore (*A new systeme of the mathematicks*); cette piece a pour titre, *The doctrine of the sphere grounded on the motion of the earth.* Il dit dans la préface que Wren est le premier qui ait connu vers 1660 la maniere de trouver les phases d'une éclipse sans calculer les parallaxes; il ajoute que Halley,

avant son départ pour Sainte-Hélene en 1666, lui parla de la construction des éclipses, mais en lui cachant la méthode, à laquelle Flamsteed n'avoit pas alors beaucoup de confiance.

1810. PROJETER une figure, c'est la rapporter à un autre plan par des lignes tirées de chaque point de la figure à chaque point du plan. On distingue plusieurs sortes de projections (4056); mais la plus simple de toutes est la projection *ortographique* (a) formée par des lignes perpendiculaires au plan de projection; c'est celle dont on se sert avec avantage pour les éclipses. Soit une ligne AB (FIG. 107), et un plan quelconque PL, différent de cette ligne; si des extrémités A et B de la ligne donnée on abaisse sur le plan PL des perpendiculaires A*a*, B*b*, l'espace *ab* qu'elles occuperont sur le plan PL, sera la projection ortographique de la ligne AB, et le plan PL sur lequel on a abaissé ces perpendiculaires, s'appellera le *plan de projection.*

1811. Si les lignes A*a*, B*b*, au lieu d'être paralleles et perpendiculaires au plan de projection, partoient toutes d'un point commun, il en résulteroit sur le plan PL une autre figure, une autre sorte de projection : nous ferons usage, par exemple (2111), de la projection appellée *stéréographique* (b).

1812. LA PROJECTION ortographique *ab* d'une ligne AB, faite sur un plan de projection PL, par les perpendiculaires A*a*, B*b*, est le cosinus de son inclinaison. Car ayant tiré AC parallele à PL, l'angle BAC est égal à l'inclinaison de la ligne AB sur le plan de projection PL, et AC = *ab* est la projection de la ligne AB : or AB : AC :: R : cos. BAC; ainsi le rayon est au cosinus de l'inclinaison, comme la ligne AB est à sa projection AC. Donc, si l'on prend le rayon pour l'unité, on trouvera que *la projection d'une ligne est égale à cette ligne multipliée par le cosinus de son inclinaison sur le plan de projection.* Si l'on prend la ligne AB pour unité, sa projection AC sera le cosinus même de son inclinaison.

1813. LA PROJECTION d'un arc est égale à son sinus. Soit la circonférence DFH (FIG. 108) du demi-cercle dont on demande la projection sur le diametre DCH; toutes les lignes perpendiculaires FC, abaissées de chaque point de la circonférence sur DCH, marqueront les projections des mêmes points; le point K sera la projection du point I; ainsi la ligne CK sera la projection de l'arc FI :

(a) Ὀρθὸς, *rectus*, parceque cette projection se fait par des angles droits.
(b) Στερεὸς, *solidus*, parceque c'est la projection employée pour représenter le globe, qui est un corps solide; on pourroit, dans ce sens, donner le même nom à la premiere.

mais si C est le centre du cercle, CK, égal à IL, est le sinus de l'arc FI; ainsi les sinus des arcs FI seront les projections de ces arcs, si l'on prend leur origine au point F qui répond perpendiculairement au centre C. Cette proposition sera d'un grand usage dans le calcul des éclipses (1825 *et suiv.*).

1814. LA PROJECTION ortographique d'un cercle incliné est toujours une ellipse [(a)]. Soit DFH (FIG. 108) le cercle dont on cherche la projection, DH celui de ses diametres qui est dans le plan de projection, ou parallele à ce plan; si l'on incline ce demi-cercle, en le faisant tourner autour du diametre DH, de maniere que toutes les lignes IK fassent avec le plan de projection un angle aigu, toutes ces lignes auront pour projections des lignes KG, qui seront égales chacune à leur correspondante IK, multipliée par le cosinus de l'angle d'inclinaison (1812); en sorte que KG sera par-tout à IK, comme le cosinus de l'angle d'inclinaison est au rayon : or, telle est la propriété d'une ellipse, que toutes ses ordonnées KG soient aux ordonnées IK d'un cercle de même diametre dans un rapport constant (3387); donc les lignes KG formeront une ellipse; donc enfin la projection d'un demi-cercle DFH sera la circonférence d'une ellipse DGH, dont le grand axe DH est le même que celui du demi-cercle; et le petit axe plus petit, en raison du cosinus de l'inclinaison. Il en seroit absolument de même, quand le diametre DH du cercle projeté seroit à une certaine distance au-dessus ou au-dessous du plan de projection.

1815. Un cercle vu obliquement paroît donc sous la forme d'une ellipse, si l'on est assez éloigné pour que les rayons visuels soient sensiblement paralleles; car on sait qu'une ligne AB (FIG. 109), vue obliquement du point O, paroît de la même grandeur que la ligne perpendiculaire AC = AB sin. ABC : ainsi, dans un cercle CAD (FIG. 110) vu obliquement, toutes les ordonnées AB, EF, paroissent plus petites dans le même rapport; le cercle paroît donc une ellipse CGD, dont le grand axe est au petit, comme le rayon est au sinus de l'angle que fait le cercle avec la ligne menée à l'œil. Cette proposition revient au même que la précédente : mais il est nécessaire de s'accoutumer à comprendre que le cercle, vu obliquement, paroît en forme d'ellipse; car nous ferons un usage continuel de cette proposition.

1816. Les principales lignes de la projection d'une éclipse sont

(a) Il n'est pourtant pas nécessaire de connoître les propriétés de l'ellipse et des sections coniques, pour entendre ce qui suit; nous ne ferons usage que des projections des différentes parties du cercle.

représentées dans la FIG. 111 : ST est la ligne menée du centre du Soleil au centre de la Terre, que nous appellons simplement la ligne des centres; IL un plan qui passe par le centre de la Terre, perpendiculairement à la ligne des centres. Ce plan forme le *cercle d'illumination*, et sépare la partie éclairée IDL de la partie obscure LOVI : nous allons rapporter à ce plan les différentes parties de la projection ; et tout ce que nous dirons à ce sujet, pourra s'appliquer au plan de projection, lors même que nous le placerons dans la région de la Lune (1823), parcequ'il sera toujours parallele au cercle d'illumination, et sensiblement égal. La ligne PO est l'axe de la Terre, EQ le diametre de l'équateur, PELOQIP le *méridien universel* (1804), c'est-à-dire, celui qui passe continuellement par le Soleil, et que les différens pays de la Terre atteignent successivement par la rotation diurne de notre globe; ED est la déclinaison du Soleil, ou sa distance à l'équateur; l'arc PI est l'élévation du pole au-dessus du plan de projection : cette hauteur est égale à la déclinaison du Soleil; car si des quarts de cercle PE et DI on ôte la partie commune PD, on aura l'arc PI = DE, qui est la distance du Soleil à l'équateur E, ou sa déclinaison. Elle est aussi égale à l'inclinaison de tous les paralleles terrestres, par rapport à la ligne des centres, et le complément de leur inclinaison, par rapport au plan de projection.

Ayant pris, depuis l'équateur, les arcs EG et QF, égaux à la latitude d'un lieu de la Terre, la ligne GH perpendiculaire à l'axe PO, et qui est le cosinus de la latitude EG, sera le rayon du parallele de ce lieu, ou du cercle qu'il décrit chaque jour par la rotation diurne de la Terre; GF sera le diametre du parallele. Des points G, F et H, qui sont les extrémités et le centre du parallele, nous abaisserons des perpendiculaires GM, FR, HN; les points M, R, N, où ces perpendiculaires rencontreront le diametre du cercle de projection IL, seront les projections des extrémités et du centre du parallele.

1817. La distance TM du centre T de la projection, au bord inférieur M de la projection du parallele, est égale au sinus de l'arc GD, ou de la différence entre EG, qui est la latitude du lieu, et DE qui est la déclinaison du Soleil. La distance TR du centre T de la projection, à l'extrémité la plus éloignée R du parallele, est égale au sinus de l'arc DF, ou de l'arc VF; cet arc VF est égal à la somme des arcs VQ et QF, dont l'un est égal à la déclinaison du Soleil, et l'autre à la latitude du lieu : ainsi *la distance du centre de la projection au sommet de l'ellipse du parallele est le sinus de la somme de la latitude du lieu et de la déclinaison du Soleil.*

1818. La projection du pole P se trouvera en concevant une perpendiculaire du point P sur la ligne TI; elle y marque un point éloigné du centre T d'une quantité égale à TP cos. PTI, ou TP cos. déclin. du Soleil (1812).

1819. La distance TN, ou l'espace compris entre le centre T de la projection et le centre N du parallele, est égale à TH cos. HTN (1812): mais TH est le sinus de la latitude du lieu, HTN est égal à PI ou à DE, c'est-à-dire, à la déclinaison du Soleil; donc TN est égale au produit du sinus de la latitude du lieu par le cosinus de la déclinaison du Soleil, en prenant pour rayon le rayon même de la projection : nous en ferons usage (1850).

1820. Le point D de la Terre est celui qui a le Soleil au zénit; un autre point quelconque E, qui en est éloigné de la quantité DE, a donc le Soleil éloigné de son zénit de la même quantité DE; de là il suit qu'une ligne TA, étant prise sur la projection, donne le sinus de la distance ED du Soleil au zénit, ou le cosinus de sa hauteur pour le lieu E de la Terre qui est projeté au point A. Nous ferons usage plusieurs fois de cette proposition, et en particulier à l'article 1917.

1821. Il suit aussi de là que TA exprime la parallaxe de hauteur, pour le lieu de la Terre qui est projeté en A; car TL, qui est la parallaxe horizontale (1783), est encore le sinus total : donc TA, qui est le cosinus de la hauteur, sera aussi la parallaxe de hauteur, qui est toujours $= p$ cos. h (1639); donc, en général, *la distance d'un lieu de la Terre au centre de la projection est égale à la parallaxe de hauteur,* le rayon de la projection étant pris pour la parallaxe horizontale. Il faut observer cependant que c'est la parallaxe qui conviendroit à la hauteur du Soleil, et non pas celle de la Lune, parceque les différens points de la projection sont ceux auxquels on rapporte le Soleil, vu des différens points de la Terre : ce n'est pas ceux où l'on rapporte la Lune, qui se meut sur une orbite différente, tantôt au-dessus, et tantôt au-dessous.

1822. Le parallele à l'équateur, ou le cercle dont H est le centre et GF le diametre, étant rapporté ou projeté sur le plan ITL, y devient une ellipse (1814), et c'est cette ellipse qu'il est nécessaire de décrire sur le plan, pour y rapporter les phases de l'éclipse : mais auparavant je dois faire observer que l'on peut transporter dans la région de la Lune le plan de projection ITL, et que l'ellipse y sera parfaitement la même que sur le plan ITL qui passe par le centre de la Terre, puisqu'elle sera comprise entre des lignes paralleles

à la ligne des centres TDS, et qui s'étendent jusqu'à la Lune, où elles forment une projection de la Terre, égale à la Terre elle-même (1782).

Soit NO (FIG. 113) le diametre de la Terre, perpendiculaire au rayon du Soleil, ou le diametre du cercle d'illumination, c'est-à-dire, du cercle terminateur de la lumiere et de l'ombre; OAN l'hémisphere de la Terre qui est éclairé du Soleil, OVN l'hémisphere obscur; OK, et NM, deux lignes dirigées vers le Soleil, et que je suppose d'abord paralleles entre elles, puisqu'elles en different très peu (1782); XY un plan perpendiculaire à la ligne des centres et aux rayons du Soleil, que j'appellerai *plan de projection;* MGKF un cercle décrit sur ce plan, et qui soit parallele et égal au cercle d'illumination; c'est ce cercle MK que j'appelle *cercle de projection* (1791), parcequ'il est véritablement la projection ortographique (1810) du globe de la Terre, dans la région de l'orbite lunaire.

1823. Nous choisissons pour plan de projection celui qui est dans la région de l'orbite lunaire, et qui passe à la distance de la Lune, quoiqu'on pût choisir d'autres plans qui passeroient ou par le Soleil, ou par la Terre (*Mém. acad.* 1744, *pag.* 191); mais celui qui passe par la Lune est le plus commode, parceque le mouvement de la Lune, et son diametre, y sont tels que nous les observons réellement de la Terre; le rayon même de la Terre y paroît d'une grandeur connue, et donnée par les tables : c'est la parallaxe horizontale de la Lune. En employant un plan de projection, tel que le propose M. le Monnier, d'après Képler, et Boulliaud (*Instit. astron. pag.* 213), qui passe par le centre de la Terre, on est obligé de supposer l'œil de l'observateur placé dans la Lune, ce qui peut donner quelque difficulté de plus à ceux qui commencent à s'occuper de ces matieres. Ayant choisi la région lunaire pour y placer notre projection, voyons comment on doit y rapporter les parallaxes terrestres.

Soit PCR l'axe de la Terre, élevé au-dessus du cercle d'illumination (1816), ou du cercle terminateur, de la quantité PCN, égale à la déclinaison du Soleil. Soit ABDE le cercle ou parallele diurne que décrit, par le mouvement de rotation, un point de la Terre, tel que Paris; AF, DG, des lignes paralleles aux rayons du Soleil, et que nous supposerons aussi paralleles entre elles, puisque la différence est insensible (1782). Ces lignes forment un cylindre oblique dont la base est un cercle incliné : toutes les sections perpendiculaires à l'axe du cylindre sont des ellipses, puisqu'elles sont la projection d'un cercle vu obliquement (1815).

1824. La projection de la Terre entiere sera un cercle MFK, parallele et égal au cercle d'illumination, comme nous l'avons déja dit : mais le parallele de Paris, ou le cercle ABDE, n'étant point parallele au cercle de projection XY, il ne peut s'y projeter que sous une forme elliptique (1814). C'est cette ellipse que nous allons décrire; elle est la même sur le plan de projection XY que sur le plan qui passeroit par NO, c'est-à-dire, sur le plan du cercle d'illumination, puisque ces deux ellipses sont renfermées entre des lignes paralleles FA, GD : ainsi tout ce que j'ai dit à l'occasion de la *figure* 111 (art. 1816), aura lieu pour l'ellipse que nous allons décrire sur le cercle de projection qui passe dans l'orbite lunaire.

1825. Dans les opérations suivantes, il faut bien remarquer que la distance de la Lune au point de la projection qui représente un lieu de la Terre, marque la distance apparente des centres du Soleil et de la Lune pour ce lieu-là. Je suppose un point A de la Terre (FIG. 113), projeté en F par un rayon AF; le même lieu A de la Terre voit le Soleil sur la ligne AF (1782); si le centre de la Lune répond alors au point L de la projection, l'observateur, situé en A, verra la Lune éloignée du Soleil de la quantité FL : ainsi la distance apparente sur le plan de projection entre la Lune L et le point F qui répond au point A de la Terre, sera FL. Il faut bien concevoir que le point F étant la projection du lieu A de la Terre, c'est au point F de la projection que l'on rapporte le Soleil, quand on l'observe du point A; ainsi l'on peut indifféremment dire qu'un point F de la projection marque le lieu A de la Terre, par exemple, la situation de Paris, ou qu'il marque le lieu du Soleil, vu de Paris (1785).

1826. Au moyen des propositions démontrées dans les articles 1816 et suiv., il est aisé de tracer l'ellipse de projection pour un lieu, et pour un jour donné. On peut même décrire cette courbe, sans faire aucune attention à la nature de l'ellipse; il ne s'agit que de marquer la projection des différens points du parallele de Paris, d'heure en heure. Soit AKOB (FIG. 112) le cercle d'illumination, ou le cercle de la Terre, qui est perpendiculaire au rayon du Soleil, ou à la ligne des centres : il faut supposer le Soleil au-dessus de la figure, répondant perpendiculairement au-dessus du centre C de la Terre. La ligne OPDC est un diametre du méridien universel, dans lequel on suppose le Soleil immobile; ACB est un diametre de l'équateur, perpendiculaire au méridien universel; P est la projection du pole, c'est-à-dire, le point du plan de projection sur lequel le pole répond perpendiculairement (1818) : on prendra les arcs BL et AK,

AK, égaux à la latitude du lieu, ensuite KM, KN, LR, LV, égaux à la déclinaison du Soleil, on tirera les lignes MER, NFV; l'on aura CE égale au sinus de BR, ou de la somme de la latitude du lieu et de la déclinaison de l'astre, et CF égale au sinus de BV, ou de la différence des mêmes arcs. Ainsi les points E et F seront les extrémités de la projection du parallele (1817); donc l'ellipse qui représente le parallele, aura EF pour petit axe; et divisant EF en deux parties égales au point G, l'on aura le centre de l'ellipse, car le centre doit être nécessairement à égale distance des deux extrémités E, F, du petit axe.

1827. La ligne KL ne passe pas au milieu de EF, parcequ'à des arcs égaux MK, KN, répondent des parties inégales PD, DF sur le diametre. Le point G est différent du point D par lequel passe le diametre KL du parallele de Paris; et cela vient de ce que le cercle AOB, sur lequel nous avons pris les arcs BL et AK, égaux à la latitude de Paris, n'est pas un méridien ni un cercle sur lequel se comptent les latitudes; l'axe de la Terre est incliné au cercle de projection; le méridien, qui passe par AB et par le pole, est incliné au cercle de projection AOB; et c'est sur ce méridien, et non pas sur le cercle AOB, que se comptent les latitudes. Le point de l'axe, par lequel passe le plan du parallele de Paris, est bien à une distance du centre de projection égale à CD; mais ce point, rapporté sur le cercle de projection, répond perpendiculairement en G, en sorte que CG est égale à CD multipliée par le cosinus de la déclinaison (1812). Ainsi l'opération que nous venons de faire pour trouver le point G, est seulement une construction par laquelle on a les grandeurs CE et CF, telles que nous avons fait voir qu'elles devoient se trouver, mais où la ligne KDL ne servira point comme diametre du parallele; elle en donnera seulement la longueur.

1828. Le grand axe de l'ellipse est égal au diametre même du parallele; ainsi ayant pris déja les arcs AK et BL, égaux à la latitude du lieu pour lequel on veut dresser la projection, la ligne droite KL sera égale au diametre du parallele; or l'on a vu que le demi-diametre du parallele, ou le demi-grand axe de l'ellipse, n'est autre chose que le cosinus de la latitude du lieu (1816). Ayant la grandeur de l'axe, on tirera, par le centre G que nous avons déterminé, une ligne SGX parallele et égale à KL, qui est égale au diametre du parallele de Paris; SGX sera le grand axe de l'ellipse qu'il s'agit de décrire.

1829. Connoissant le grand axe SX de l'ellipse, et le petit axe EGF (1826), il sera aisé de la décrire, c'est-à-dire, d'en trouver tous les points d'heure en heure. On décrira sur le grand axe SX un cercle SHXQ, qui représentera le parallele de Paris, quoique situé

dans un plan différent; ce cercle étant divisé en 24 heures, aux points marqués 1, 2, 3, etc. on sera sûr que chaque point *g* du parallele paroîtra sur la ligne *gf* perpendiculaire au grand axe SX, tirée par chaque point de division; car quelle que soit l'inclinaison du cercle SHX, et l'obliquité sous laquelle il sera vu, pourvu qu'il passe par les points S et X, le point *g* de sa circonférence répondra toujours perpendiculairement au point *h* du grand axe, et l'abscisse G*h* de l'ellipse sera toujours le sinus même de l'arc H*g* du parallele, ou de la distance du point *g* au méridien.

1830. Pour trouver aussi l'ordonnée *bh* de l'ellipse au même point, on remarquera que la ligne *gh* du parallele étant vue obliquement, doit paroître d'une longueur *bh*, telle que *bh* soit à *gh*, comme le cosinus de l'inclinaison du parallele est au rayon (1812), ou comme le sinus de la déclinaison du Soleil est au rayon (1816), ou enfin comme le petit axe EG est au grand axe HG: or le sinus de 15° dans le petit cercle est au sinus de 15° dans le grand cercle comme le petit rayon est au grand; ainsi, pour que toutes les ordonnées du grand cercle soient diminuées dans le même rapport, comme elles doivent l'être, il suffira de prendre le sinus des mêmes arcs sur le petit cercle. On peut remarquer aussi que *gh* étant le cosinus de 30° pour le rayon HG, *bh* sera le cosinus de 30° pour le rayon GE, et qu'en général les abscisses de l'ellipse P*b*X étant les sinus de 15°, 30°, 45°, etc. dans ce grand cercle, les ordonnées *bh* doivent être les cosinus des mêmes arcs, en prenant pour rayon la moitié du petit axe (3397). On marquera donc en partant du centre G les points 1, 2, 3, tels que G 1 soit le sinus de 15°; G 2, le sinus de 30°, etc. pour le rayon GH; aux points 1, 2, 3, etc. du rayon GX, on élevera sur GX des perpendiculaires qui soient les cosinus de 15°, 30°, 45°, pour le petit rayon FG, ou GE, et ces perpendiculaires détermineront les points cherchés et le contour de l'ellipse du parallele.

1831. Pour trouver aisément ces sinus et ces cosinus, on peut se servir d'un compas de proportion, en prenant la moitié des cordes des arcs doubles. On peut aussi décrire du centre G un autre cercle EYF sur le petit axe, on le divisera comme le cercle HXQ en 24 parties, si l'on se contente de 24 heures, ou en 48, si l'on veut avoir une ellipse divisée en demi-heures. Par les points de division du grand cercle on tirera des lignes *gbf* paralleles au petit axe; et par les points de division du petit cercle, qui correspondent aux mêmes heures, en partant de E, l'on tirera des lignes comme *ab* paralleles au grand axe; celles-ci, étant prolongées, iront rencontrer les premieres dans des points tels que *b*, qui formeront l'ellipse que l'on

cherche. Par exemple, la seconde ligne parallele au petit axe, et qui va du point 30 au point *f*, coupe la seconde ligne *ab*, tirée également à 30° du point E parallèlement au grand axe GX dans le point *b*. Ce point est celui de l'ellipse qui est à deux heures du méridien, puisque la ligne *aκ* est le sinus de 30° dans le petit cercle, comme *ab* est le sinus de 30° dans le grand cercle. Le point correspondant *c* à gauche marque deux heures après midi. C'est ainsi qu'on a pour chaque heure la projection du parallele de Paris, et la situation de Paris sur ce parallele.

1832. On voit dans la *figure* 114 une ellipse tracée par la méthode précédente pour 26° de déclinaison, mais dans laquelle on a supprimé toutes les lignes qui ont servi à la décrire. La partie inférieure de l'ellipse a lieu quand la déclinaison est septentrionale; car alors la partie éclairée du parallele, telle que BAE, dans la *figure* 113, paroît la plus basse ou la plus méridionale par rapport au rayon solaire TS. Mais, soit qu'on se serve de la partie supérieure ou de la partie inférieure de l'ellipse, il faut toujours considérer Paris comme allant vers la gauche, c'est-à-dire à l'orient, dans la partie du parallele que nous voyons sur la projection, c'est-à-dire, dans la partie de la Terre qui est tournée vers le Soleil ou vers l'étoile.

La partie droite ou occidentale de l'ellipse (FIG. 114), sert, pour les heures du matin, dans les éclipses de Soleil; si c'est une éclipse d'étoile, cette partie sert avant le passage de l'étoile au méridien. En effet, le mouvement de la Terre se fait vers l'orient, soit sur la Terre, soit sur la projection qui en est l'image; et nous supposons toujours l'orient à gauche. Ainsi l'on marque 0^h ou 12^h aux sommets du petit axe, lorqu'il s'agit du Soleil; l'on y marque l'heure du passage de l'étoile au méridien lorsqu'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la Lune.

On voit, au bas de la *figure* 114, les petits axes des ellipses qu'on trouveroit pour différentes déclinaisons en employant le même rayon de projection. On y voit aussi à quelle distance ces ellipses passeroient par rapport au sommet S de la projection, c'est-à-dire, la valeur de SV. J'ai marqué au milieu de l'ellipse les lieux des centres de ces différentes ellipses; chacun pourra les tracer toutes sur autant de cartons différens, pour calculer toutes les éclipses de Soleil ou d'étoiles.

Pour rendre l'usage de cette méthode plus facile, j'ai donné dans les mémoires de l'académie pour 1763 une figure qui peut servir à tracer des ellipses pour tous les degrés de déclinaison, dont l'échelle est double de celle de la *figure* 114; et sur la même planche, j'en ai tracé plusieurs qui sont divisées exactement de minute en minute;

on pourra aussi, pour décrire de semblables ellipses, se servir des tables de leurs dimensions que le P. Pilgram a calculées dans les éphémérides de Vienne pour 1769.

1833. Il est nécessaire, pour placer sur cette figure l'orbite de la Lune, d'avoir la situation du cercle de latitude ou de l'axe de l'écliptique par rapport au cercle de déclinaison CA (FIG. 116); elle peut se trouver par le moyen du calcul de l'angle de position (1047): mais, pour abréger autant qu'il est possible l'opération graphique dont nous parlerons bientôt (1835), on peut se servir de la méthode suivante. Je suppose que FGH soit un arc du cercle de projection égal au double de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire, que, du point G où se termine le méridien CG de la projection, on ait pris les arcs GF et GH, chacun de 23° 28'; sur la tangente GV de l'arc GF, et du centre G, l'on décrira un demi-cercle VMX qu'on divisera en 12 signes, comme l'écliptique, en commençant au point X du côté de l'occident, où l'on marquera le Belier, c'est-à-dire, zéro de longitude; ensuite 1 signe, 2 signes, etc. On prendra sur ce cercle un arc égal à la longitude du Soleil ou de l'étoile, par exemple, XM; on abaissera sur le diametre XV la perpendiculaire MN; et le point N de la tangente GNV où passera cette perpendiculaire MN, sera le point où l'on devra tirer le cercle de latitude CSN.

En effet, GN est le cosinus de l'arc XM ou de la longitude du Soleil, pour le rayon GV; donc GV : R :: GN : cos. long. ☉; c'est-à-dire, GN = GV cos. longit. mais par la construction GV = tang. 23° $\frac{1}{2}$ pour le rayon CG, que nous supposons égal à l'unité; donc GN = tang. 23° $\frac{1}{2}$ cos. long. = tang. GS : cela revient à la proportion suivante, par laquelle on trouve l'angle de position (910, 3897); donc l'angle NCA est l'angle de position que forme le cercle de latitude CN avec le méridien CG.

1834. Cette construction peut servir pour les étoiles fixes que la Lune rencontre; mais c'est en négligeant leur latitude; et quand celle de la Lune est de 5°, il y a environ un demi-degré d'erreur à craindre sur l'arc GF.

Mais j'ai donné dans les tables ces angles calculés pour toutes les étoiles considérables, et j'ai marqué sur la circonférence de la *figure* 114 les points où il faut tirer le cercle de latitude pour différentes étoiles, telles que γ ♍, c'est-à-dire, l'étoile γ de la constellation de la Vierge, etc. On voit que toutes celles dont la longitude est dans le premier ou dernier quart de l'écliptique, c'est-à-dire, dans les signes ascendans, sont à la droite du méridien CS, ou à l'occident, parceque, dans la *figure* 116, les trois premiers et les trois derniers signes de

longitude sont dans le quart de cercle X 3, qui est à l'occident ou à la droite du point G. Cela est aisé à appercevoir sur un globe; la direction de l'écliptique tend à l'orient dans tous les cas; si en même temps elle se rapproche du nord, la perpendiculaire doit décliner du côté opposé à la direction de l'écliptique, c'est-à-dire, à l'occident, quand on considere la partie de cette perpendiculaire qui est du côté du nord.

Trouver les phases d'une éclipse de Soleil ou d'étoile, avec la regle et le compas.

1835. On peut, par la projection que nous venons d'expliquer, et avec l'exactitude d'une minute de temps, trouver le commencement et la fin d'une éclipse, sans calculer les parallaxes. J'ai parlé de l'auteur de cette invention (1809); il me reste à donner le détail de l'opération, que j'ai simplifiée dans cet ouvrage.

On voit dans la *figure* 114 un demi-cercle d'environ 5 pouces ½ de rayon qui représente la projection de la Terre dans l'orbe de la Lune (1784); le rayon CR est divisé en autant de minutes qu'en contient la différence des parallaxes horizontales de la Lune et du Soleil (1783); TR exprime le diametre de l'équateur; CS est une portion du méridien universel, ou du cercle de déclinaison qui passe par le Soleil ou par l'étoile; CK est la distance du centre de projection au centre de l'ellipse, trouvée ci-dessus par le calcul ou par l'opération graphique (1819); FK est le demi-grand axe de l'ellipse (1824), égal au cosinus de la latitude de Paris (1826). La ligne KV ou KQ est la moitié du petit axe de l'ellipse, qui est au grand axe comme le sinus de la déclinaison de l'astre est au rayon (1815). Cette ellipse de la *figure* 114 représente le parallele de Paris, ou la trace décrite sur le plan de projection par le rayon mené de Paris à une étoile dont la déclinaison est de 26°.

1836. La partie supérieure de l'ellipse est l'arc diurne, ou celui dont on doit faire usage quand la déclinaison du Soleil ou de l'étoile est méridionale (1832).

1837. On tirera le cercle de latitude CL ou l'axe de l'écliptique (1833), qui est à la gauche ou à l'orient du méridien dans le second et troisieme quart de longitude, ou dans les signes descendans; il est à la droite ou à l'occident dans les autres signes, qui sont 9, 10, 11, 0, 1, 2, de longitude (1834).

1838. La latitude de la Lune au moment de la conjonction étant prise sur les divisions de la ligne CR, qui sert d'échelle, et portée de C en L sur le cercle de latitude, le point L est celui où doit passer



l'orbite de la Lune, en lui donnant l'inclinaison convenable (1744, 1839); c'est le point de la conjonction.

1839. Pour tracer l'orbite de la Lune, on tirera au point L de la conjonction une ligne LM perpendiculaire au cercle de latitude; on prendra sur l'échelle la quantité du mouvement horaire de la Lune en longitude (moins celui du Soleil, si c'est une éclipse de Soleil), et l'on portera ce mouvement de L en M; on prendra aussi le mouvement horaire en latitude, et on le portera de M en N parallèlement au cercle de latitude, au midi du point M, si la Lune se rapproche du nord, c'est-à-dire, si la latitude est australe décroissante ou boréale croissante; on le portera au nord du point M si la Lune avance vers le midi. Par les points N et L, on tirera l'orbite relative de la Lune INL; on marquera au point L l'heure et la minute de la conjonction, en N une heure de moins; l'on divisera NL en 60′ de temps, et l'on portera les mêmes divisions à gauche du point L pour avoir la situation de la Lune de minute en minute une heure avant la conjonction, et une heure après; on prolongera même ces divisions plus loin, si cela paroît nécessaire.

1840. On marquera sur l'ellipse les heures qui répondent aux divisions qu'on a trouvées (1831); savoir, les 6 heures du matin à la droite, ou à la partie occidentale de la figure, et les 6 heures du soir à la partie orientale, si c'est une éclipse de Soleil. Les 12 heures se mettent dans la partie supérieure de l'ellipse, si le Soleil ou l'étoile sont dans les six derniers signes, ou dans les signes méridionaux (1832). Quand il s'agit d'une éclipse d'étoile, c'est l'heure du passage au méridien que l'on marque en V ou en Q. Ces regles seroient les mêmes, si l'observateur étoit dans l'hémisphere austral de la Terre, avec cette seule différence que l'ellipse seroit au-dessous ou au midi du centre C de la projection, ou que le haut de la figure représenteroit le midi.

1841. On prendra sur les divisions de CR la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, ou le demi-diametre seul de la Lune, s'il s'agit d'une éclipse d'étoile. Le compas étant ouvert de cette quantité, on verra si le moment de la conjonction marqué en L, et la même minute de temps prise sur les divisions de l'ellipse, sont éloignés entre eux de cette quantité des demi-diametres; dans ce cas, le temps de la conjonction sera aussi le temps du commencement ou de la fin de l'éclipse.

1842. Mais cette distance des points correspondans sur l'ellipse et sur l'orbite de la Lune au moment de la conjonction vraie n'est jamais égale à la somme des demi-diametres; on placera donc le com-

pas à la droite ou à la gauche du point L sur l'orbite de la Lune, comme en I; l'on verra si le point A de l'ellipse, marqué du même nombre d'heures et de minutes que le point I de l'orbite, est à la gauche ou à l'orient du point I de la quantité des demi-diametres; ce sera le commencement de l'ellipse; s'il est trop éloigné, on rapprochera peu à peu sur l'orbite de la Lune la branche droite du compas, sans changer l'ouverture, jusqu'à ce que la gauche trouve un point A de l'ellipse marqué du même nombre de minutes que le point I de l'orbite ou la branche droite du compas.

1843. Quand on aura ainsi trouvé deux temps correspondans, l'un sur l'orbite, l'autre sur le parallele, tels que I et A, marqués de la même heure et de la même minute, et éloignés de la quantité IA, de maniere que le point I de l'orbite soit à la droite ou à l'occident du point A du parallele, on sera sûr que ce moment est celui du commencement de l'éclipse; car on a vu que l'éclipse commence pour Paris, quand la distance entre le point de la projection où Paris voit le Soleil, c'est-à-dire, auquel Paris répond, et celui où se trouve la Lune au même instant, est égale au diametre de la Lune, ou à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune (1788).

La Lune avance vers l'orient dans son orbite de I en E, et Paris avance sur son parallele de A en B; mais beaucoup plus lentement, puisqu'il faut 12 heures pour décrire la demi-ellipse du parallele de Paris sur notre figure de projection, tandis que la Lune en 2 heures de temps fait dans son orbite tout le chemin marqué sur la figure entre 1 heure et 3 heures, qui est à-peu-près aussi long que l'ellipse tout entiere : ainsi la Lune arrivera de l'autre côté ou à l'orient de Paris, et se trouvera en E lorsque Paris ne sera arrivé qu'en B; ils seront encore une fois à la même distance l'un de l'autre, c'est-à-dire, à une distance BE, égale au demi-diametre de la Lune, ou à la somme des demi-diametres de la Lune et du Soleil, la Lune abandonnant l'étoile ou le Soleil; et quand on aura trouvé deux points B et E marqués de la même minute, on sera sûr d'avoir la fin de l'éclipse.

1844. Le milieu de l'éclipse est à-peu-près le milieu de l'intervalle de temps écoulé entre le commencement et la fin : ainsi l'on cherchera le point D qui tient le milieu entre ces momens marqués en I et en E, et le point G qui tient aussi le milieu entre A et B. La distance de ces deux points D et G, dont l'un est sur l'orbite, l'autre sur le parallele de Paris, donnera la plus courte distance des centres de la Lune et du Soleil, ou leur distance, dans le temps du milieu de l'éclipse. Cette distance étant portée avec le compas sur l'échelle ou sur les divisions du rayon CR, se trouvera exprimée en minutes de

degré, et même en fractions de minute; car sur notre échelle d'un demi-pied, chaque minute occupe plus d'une ligne; ainsi l'on aura la plus courte distance du centre de la Lune au centre du Soleil ou de l'étoile, au temps du milieu de l'éclipse. Si le point D de l'orbite est au-dessous ou au midi du point G du parallele, ce sera une preuve que la Lune passe au midi du Soleil ou de l'étoile.

On peut aussi trouver la plus courte distance des centres, sans supposer que le milieu de l'éclipse soit à égale distance du commencement et de la fin; il n'y a qu'à mesurer plusieurs fois la distance de la Lune à l'étoile, ou la distance des points correspondans, marqués de la même minute sur l'orbite et sur l'ellipse; on verra cette distance diminuer peu-à-peu jusqu'à un certain terme, où cette distance, étant parvenue à son *minimum*, cessera de diminuer pour augmenter un moment après; l'on aura par ce moyen, soit la plus courte distance, soit le temps où elle arrive, qui est le milieu de l'éclipse.

1845. Pour éviter de diviser chaque fois le rayon CR de la projection en autant de parties qu'en contient la parallaxe, c'est-à-dire, tantôt en 54′, tantôt en 61′, sans compter les fractions de minute, on forme une échelle (FIG. 115), dont les lignes EF sont plus longues que le rayon du cercle qu'on veut faire servir de projection, lorsque la parallaxe est plus petite que 60′, et sont plus petites, quand la parallaxe est plus grande. Par exemple, si la parallaxe est de 54′, c'est-à-dire, plus petite d'un dixieme que le rayon CR de la projection, il faut avoir une échelle où le compas puisse indiquer 54′, au lieu de 60′; car la même ouverture de compas, par exemple, un sixieme de la parallaxe, qui valoit 10′ quand la parallaxe étoit de 60′, ne doit donner que 9′ quand cette parallaxe n'est que de 54′: il faut donc avoir une échelle plus grande d'un neuvieme: cette échelle, quoique divisée en 60 parties, n'en fera trouver que 54, quand on y portera le rayon de projection, qui est d'une longeur constante, parcequ'elle est plus grande que ce rayon, et que ses parties ont plus d'étendue. Aussi la ligne A B, qui répond à 54′, est plus longue que la ligne EF, répondant à 62 dans lemême rapport que 62 est plus grand que 54; la même grandeur qui occupe en haut 62 parties, n'en occupe que 53 sur la derniere ligne.

Pour faire sentir encore mieux la raison de ce procédé, supposons que la parallaxe étant de 54′, la latitude soit de 27′: il faut prendre la moitié du rayon de la figure, ou du cercle de projection, pour avoir la latitude; mais ce rayon est divisé en 60′ sur l'échelle, il en faudroit

faudroit donc prendre 30′ sur cette ligne; mais il revient au même d'en prendre 27 sur une ligne plus grande, dans la même proportion, ou de $\frac{1}{9}$: les 27′ de cette échelle plus longue en feront 30 sur le rayon de la figure; car 54 : 60 :: 27 : 30 : ainsi l'on aura une latitude qui se trouvera la moitié du rayon, comme elle doit l'être. Il en est de même du mouvement horaire et des diametres qu'on prendra sur cette échelle plus longue, quand la parallaxe sera plus petite.

1846. Le demi-diametre de la Lune étant toujours les $\frac{3}{11}$ de la parallaxe (1702), sa longueur sera constante dès que le rayon du cercle ne change point; aussi j'ai marqué CH sur le rayon CT, de maniere qu'elle exprime toujours le demi-diametre de la Lune. On néglige ici l'augmentation du demi-diametre de la Lune qui a lieu à différens degrés de hauteur (1509).

Quand on a la plus courte distance GD des centres du Soleil et de la Lune, et qu'on en veut conclure la grandeur d'une éclipse de Soleil en doigts (1765), il faut prendre la différence entre cette distance et la somme des demi-diametres, la porter sur le diametre du Soleil, divisé en 12 parties ou 12 doigts, et l'on y verra la partie éclipsée du Soleil en doigts et parties de doigt.

1847. Lorsqu'il s'agit d'une éclipse d'étoile, on observe, 1°. que CL est la différence entre la latitude de la Lune et celle de l'étoile, qui est supposée répondre au point C, à une certaine distance de l'écliptique; 2°. que LN est le mouvement horaire de la Lune seule, puisque l'étoile n'a aucun mouvement propre; 3°. que sur les points V ou Q de l'ellipse, on marque l'heure du passage de l'étoile au méridien (ou, plus exactement, la différence entre son ascension droite et celle du Soleil, convertie en heures du premier mobile, pour le temps du milieu de l'éclipse); 4°. que l'on prend la distance IA, égale au seul demi-diametre de la Lune.

1848. Exemple. Le 7 avril 1749, Antarès fut en conjonction avec la Lune à 2^h 22′ du matin; la parallaxe de la Lune étoit alors de 57′$\frac{1}{4}$, son mouvement horaire 33′ 12″ en longitude, et 1′ 56″ en latitude méridionale décroissante, ou vers le nord; la latitude, au moment de la conjonction, étoit de 3° 45′ 22″ au midi de l'écliptique, celle de l'étoile étoit de 4° 32′ 12″; ainsi la Lune étoit au nord de l'étoile de 46′ 50″.

Je commence par tirer l'axe de l'écliptique, ou le cercle de latitude CL, au point qui convient à la longitude d'Antarès, 8^s 6° 16′ (1048, 1833); je prens sur la ligne qui répond à 57′, dans l'échelle des parallaxes, une quantité de 46′ 50″, et je la porte de C

en L sur le cercle de latitude ; au point L je tire la perpendiculaire LM.

Je prens, sur la même ligne de l'échelle des parallaxes, le mouvement horaire de la Lune 33′⅕, et je le porte de L en M sur la perpendiculaire au cercle de latitude; je porte aussi 1′ 56″ au-dessous du point M, parceque la Lune s'avançoit de cette quantité vers le nord, par le changement de sa latitude en une heure, et le point N marque le lieu de la Lune, une heure avant la conjonction, ou à 1^h 22′ du matin : ayant donc marqué en L le moment de la conjonction, 2^h 22′, je marque en N 1^h 22′; et divisant l'intervalle LN en 60 parties, je marque la situation de la Lune de 5 en 5 minutes, comme on le voit dans la *figure* depuis 30′ après minuit jusqu'à 2^h 30′.

1849. L'heure du passage d'Antarès au méridien de Paris est 3^h 11′ (984), je la marque au sommet V de l'ellipse, et je marque 2^h 11′, 1^h 11′, etc. sur les autres divisions de l'ellipse; je subdivise les intervalles de 10 en 10′, du moins dans les heures où il paroît que l'éclipse peut arriver, c'est-à-dire, qui approchent de l'heure de la conjonction.

Je prens sur l'échelle le demi-diametre de la Lune, égal à CH; cette ouverture de compas étant promenée sur l'orbite de la Lune et sur l'ellipse, je vois qu'une des pointes étant en I, sur 1^h 2′, l'autre pointe tombe en A sur l'ellipse, et y rencontre aussi 1^h 2′ : ainsi la Lune étant en I à 1^h 2′, et la projection de Paris, ou le lieu apparent de l'étoile, étant alors en A, il doit se faire une éclipse; la distance de la Lune à l'étoile étant précisément égale au demi-diametre de la Lune, ce qui suppose un contact de l'étoile au bord de la Lune.

Je promene la même ouverture de compas de l'autre côté en avançant vers l'orient, et je trouve qu'une des pointes étant en E sur 2^h 11′, l'autre pointe tombe aussi à 2^h 11′ sur l'ellipse en B, c'est le moment de l'émersion; la Lune a donc parcouru la portion IE de son orbite, depuis le moment de l'immersion jusqu'à celui de l'émersion, et le lieu apparent de l'étoile sur la projection a changé de la quantité AB. C'est vers le milieu de cet intervalle, la Lune étant en D et l'étoile en G, qu'est arrivée la plus courte distance : on s'en assurera en mesurant la distance de minute en minute; car l'on verra qu'aux environs de 1^h 35′ elle cesse de diminuer, après quoi elle augmente; cette plus courte distance DG, étant portée sur la ligne 57 de l'échelle des parallaxes, se trouvera de 6′; ce qui m'apprend que le centre de la Lune a passé 6′ au midi de l'étoile, vers le temps de la plus courte distance, qui est à-peu-près le temps de la

conjonction apparente, où le lieu apparent de la Lune répond au même point de l'écliptique que le lieu de l'étoile.

1850. Les opérations que je viens de décrire supposent que la *figure* 114 est dressée pour Paris : s'il étoit question de toute autre latitude, la distance CK du centre de la projection, au centre de l'ellipse, seroit différente ; car cette distance augmente quand la latitude ou la hauteur du pole devient plus grande (1819). Cependant une seule ellipse étant donnée, et son ouverture conforme à la déclinaison du Soleil ou de l'étoile dont il s'agit, on peut la faire servir pour toutes les hauteurs du pole, en plaçant le centre C de la projection à différentes distances du centre K de l'ellipse. En effet, dès que l'ellipse est tracée de l'ouverture convenable, c'est-à-dire, que son grand axe est au petit comme le rayon est au sinus de la déclinaison de l'astre, elle peut servir pour exprimer toutes sortes de paralleles, ou de cercles qui sont vus sous une même obliquité et qui forment tous des ellipses semblables ; il ne s'agit plus que de proportionner le reste de la figure, c'est-à-dire, la distance du centre de projection et le rayon du globe ou de sa projection, de façon que l'ellipse y occupe la place du parallele terrestre qu'il s'agit de représenter : or, voici la maniere de le faire. La distance CK est = *cos. déclin. sin. latit.* (1819), en supposant que CR est le rayon : si l'on veut prendre pour rayon, ou pour échelle, le demi-diametre du parallele, ou le cosinus de la latitude, il faudra encore faire cette proportion : le cosinus de la latitude est à l'unité, comme la valeur de CK est à sa valeur en parties du rayon du parallele, qui sera par conséquent $\frac{\text{sin. lat.}}{\text{cos. lat.}}$ cos. déclin. ; mais $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$ = tan. ; donc CK = tan. lat. cos. déclin. Ainsi *la distance du centre de la projection au centre du parallele ou de l'ellipse, est égale à la tangente de la latitude multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'astre,* en prenant pour unité le demi-diametre du parallele, ou le demi-axe KF de l'ellipse.

1851. Exemple. Dans le passage de Vénus en 1761, la déclinaison du Soleil étoit de 22° 42′ : je suppose qu'on ait décrit l'ellipse qui convient à cette déclinaison, c'est-à-dire, une ellipse dont le grand axe est au petit, comme l'unité est au sinus de 22° 42′, et qu'on veuille faire servir cette ellipse pour la latitude de 10° ; on trouvera 0,163 pour la distance des centres, en supposant que le demi-axe de l'ellipse est l'unité, ou 163, en supposant ce demi-axe divisé en 1000 parties.

1852. On doit chercher aussi la longueur du rayon de projection pour la latitude donnée ; et ce n'est autre chose que la sécante de la

latitude du lieu, en prenant pour rayon le demi-diametre du parallele : car si DL (FIG. 112) étoit pris pour rayon d'un cercle décrit du centre L, la ligne menée de C en L seroit la sécante de l'angle CLD égal à l'arc LB, qui est la latitude du lieu. Ainsi l'on cherchera dans les tables ordinaires les sécantes de chaque latitude; et divisant le rayon DL de l'ellipse en 1000 parties, on prendra sur ces divisions la grandeur du rayon de chaque projection, par exemple, 2000 pour 60° de latitude, et l'on aura la longueur du rayon avec lequel il faut décrire le cercle de projection, en partant du centre qu'on a trouvé (1851) : c'est ce rayon de projection qu'il faut diviser en autant de parties qu'en contient la différence des parallaxes.

Distance du centre de la projection au centre de l'ellipse, pour différentes latitudes et différentes déclinaisons, en supposant le demi-axe de 1000. Avec le rayon de projection pour chaque latitude.

Degrés de latitude.	DEGRÉS DE DÉCLINAISON.												Rayon de project.
	0	3	6	9	12	15	18	21	22°42'	24	27	30	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1000
5	87	87	86	86	86	84	83	82	81	80	78	76	1004
10	176	176	175	174	172	170	168	165	163	161	157	153	1015
15	268	268	266	265	262	259	255	250	247	245	239	232	1035
20	364	363	362	359	356	352	346	340	336	332	324	315	1064
25	466	466	460	461	456	450	443	435	430	426	415	404	1103
30	577	577	574	570	565	558	549	539	535	527	514	500	1155
35	700	699	696	692	685	676	666	654	646	640	624	606	1221
40	839	838	834	828	821	810	798	783	774	767	748	727	1305
45	1000	999	994	988	978	966	951	934	925	913	891	866	1414
48 ¾	1143	1142	1137	1130	1119	1105	1088	1068	1055	1045	1019	990	1519
50	1192	1190	1185	1177	1166	1151	1133	1113	1099	1089	1062	1032	1556
55	1428	1426	1420	1411	1397	1370	1358	1333	1318	1305	1272	1237	1743
60	1732	1730	1723	1711	1694	1673	1647	1617	1598	1582	1543	1500	2000
65	2144	2142	2133	2118	2098	2071	2040	2002	1978	1959	1911	1857	2366
70	2747	2744	2732	2714	2687	2654	2613	2565	2535	2510	2448	2379	2924

1853. La table précédente contient la valeur de la distance des centres CK (FIG. 114) pour différentes latitudes et différentes déclinaisons; c'est par le moyen de cette table que j'ai marqué dans la FIG. 114, aux environs du centre K, les points où doit être le centre de l'ellipse pour Paris, à différentes déclinaisons; on voit que le centre de l'ellipse qui sert pour 28° de déclinaison, est plus près du centre C de la projection d'environ six lignes, que le centre de l'el-

lipse qui répond à zéro, ou plutôt de la ligne droite qui en tient lieu quand la déclinaison est nulle. Cette même table servira pour marquer dans la planche XV, à l'occasion du passage de Vénus, le rayon de la projection pour différentes latitudes (2081).

1854. Par le moyen de cette table on peut faire servir une seule ellipse pour tous les pays du monde, au lieu que, suivant le procédé de l'article 1826, on décriroit sur le même cercle de projection une ellipse pour chaque latitude. Les positions et les grandeurs de ces ellipses seroient différentes, comme on le voit dans la planche XIII; mais leur ellipticité, leur figure, le rapport de leurs axes, seroient les mêmes, parceque ce rapport ne dépend que de la déclinaison du Soleil (1814); et comme les ellipses sont difficiles à décrire, il est souvent plus commode, en calculant pour plusieurs lieux, de conserver l'ellipse, et de changer le centre du cercle de projection aussi bien que la grandeur du rayon. On trouvera les tables des dimensions de ces sortes de figures pour tous les pays, calculées par le P. Pilgram, d'après ma méthode, dans les *Ephémérides* de Vienne, 1769.

1855. L'augmentation du diametre de la Lune à diverses hauteurs (1509) doit influer dans cette opération d'une façon particuliere, quoique La Caille dise qu'on n'en doit pas tenir compte (*Mém.* 1744): c'est le diametre du Soleil qu'il conviendroit de diminuer (1864), si l'on vouloit porter la précision jusques-là.

1856. Pour trouver quel est le point du disque solaire où l'éclipse doit commencer, il suffit de prendre sur la figure l'angle que fait au point A de l'ellipse la ligne des centres IA, avec la ligne CA qui représente le vertical du Soleil. On trouveroit, dans la figure, 102°; ce qui indiqueroit, si c'étoit une éclipse de Soleil, que la Lune touche le Soleil 12° au nord du diametre horizontal: cela est nécessaire aux astronomes pour se préparer à observer le commencement.

Méthodes rigoureuses pour calculer les éclipses sujettes aux parallaxes.

1857. Nous avons expliqué assez au long la maniere de trouver par une opération graphique le commencement et la fin d'une éclipse de Soleil ou d'étoile. Nous allons passer à l'explication des méthodes rigoureuses où l'on emploie le calcul, pour trouver, jusqu'à la précision des secondes, les résultats qu'on ne pouvoit trouver qu'à une minute près par le moyen de l'opération graphique; et nous expliquerons trois méthodes différentes.

Lorsqu'on ne veut calculer une éclipse de Soleil que pour la prédire dans les éphémérides, la méthode graphique (1835) est suffisante; on auroit tort, ce me semble, de mettre beaucoup de temps à les calculer en secondes avec une précision à laquelle les tables ne répondent pas, puisque l'erreur des tables de la Lune, qui va quelquefois à 40″, entraîne plus d'une minute d'incertitude sur le temps du commencement et de la fin d'une éclipse.

Mais lorsqu'on a quelque raison particuliere de se préparer à une observation, lorsqu'on a observé une éclipse de Soleil ou d'étoile, et qu'on veut l'employer à trouver le lieu de la Lune, le temps de la conjonction et l'erreur des tables, on doit faire avec la derniere précision le calcul de l'éclipse, et l'on peut en chercher le commencement et la fin par les méthodes exactes que nous allons expliquer [(a)].

1858. Il y a quatre méthodes pour cet effet dans les livres des astronomes; celle des projections, employée par la Hire et Cassini; celle du nonagésime et des parallaxes de longitude, employée par la Caille dans ses leçons d'astronomie; celle des angles parallactiques et des parallaxes de hauteur, que je préfere, comme étant la plus courte et la plus exacte, au moyen de la forme que je lui ai donnée (1875); enfin la méthode analytique très générale et très élégante, donnée par M. du Séjour [(b)], mais dont l'explication seroit trop longue pour cet ouvrage.

1859. En entreprenant le calcul exact d'une éclipse, il est utile et même nécessaire de former une figure où l'on marque à-peu-près avec la regle et le compas les angles que l'on aura trouvés par le calcul, et les lignes que l'on aura déterminées, suivant leur position et leur grandeur. Sans ce secours, il est aisé de se tromper, en ajoutant quelquefois ce qui doit être soustrait; d'ailleurs cette précaution dont je supposerai qu'on fasse usage, épargnera beaucoup de détails sur les regles et sur les exceptions qui ont lieu dans différens cas

(a) Les Brames de l'Indoustan calculent les éclipses avec des coris qu'ils arrangent comme des jetons, et leurs calculs s'accordent, à une demi-heure près (*Mém. de l'ac.* 1773; M. Bailly, *Traité de l'astron. indienne*).

(b) D'abord dans le recueil de Mémoires publié en 1761 (1189), ensuite dans les Mémoires de l'académie pour 1765, 1766, 1767, etc. et dans un volume à part, publié en 1786 (*Traité analytique des mouv. des corps célestes*). Il y a aussi des méthodes analytiques d'Euler dans les Mémoires de Pétersbourg pour 1769 et 1770; de Lexell dans les volumes de 1770 et 1773 (*pag.* 578), et dans les Ephémérides de Berlin pour 1776 et 1782; de M. de la Grange; dans les Ephémérides de Berlin pour 1782; celle de M. Goudin, dans un mémoire imprimé, en 1778 et 1788, à la suite de son *Traité des propriétés communes à toutes les courbes*, chez Didot, rue Pavée.

pour la position de la Lune, par rapport au vertical, au cercle de déclinaison, au cercle de latitude, et à la perpendiculaire sur l'orbite.

Méthode des projections.

1860. Parmi les différentes manieres de calculer les projections, je choisirai celle de M. Cassini, comme étant la plus simple, et je prendrai pour exemple l'éclipse de Soleil du 28 février 1710, employée dans les *Tables* de Cassini, *pag.* 53, mais dont cet auteur n'a donné que l'opération graphique; et j'y appliquerai le calcul trigonométrique. Soit CE (FIG. 116) le rayon de projection, AK le parallele de Paris, LT l'orbite de la Lune. Je suppose le temps de la conjonction au 28 février 1710, 0ʰ 18′ après midi, la déclinaison du Soleil 7° 59′ 42″, la latitude de la Lune en conjonction 46′ 31″, l'inclinaison de l'orbite relative 5° 42′ 26″ (1745), le mouvement horaire relatif 27′ 18″2, le milieu de l'éclipse générale en T à 12ʰ 7′ 50″, la distance perpendiculaire CT (1795) de 46′ 17″, l'angle de position ACP 22° 9′ 27″, qui, ajouté dans le cas actuel avec l'inclinaison PCT (1758), donne l'angle ACT, 27° 51′ 53″; la différence des parallaxes horizontales, ou le rayon de la projection 54′ 28″; le demi-grand axe DK, ou le cosinus de la latitude de Paris pour un rayon de 54′ 8″, 35′ 51″5; le demi-petit axe 4′ 59″2, et la distance CD du centre de la projection à celui de l'ellipse = 40′ 36″5. Soit O le lieu de Paris sur son parallele KOA à 11ʰ 43′ 30″, L le lieu de la Lune sur son orbite; on demande la distance apparente des centres de la Lune et du Soleil, ou la valeur de la ligne OL, pour ce moment-là, c'est-à-dire, 34′ 30″ avant la conjonction, ou 24′ 20″ avant le milieu de l'éclipse générale. J'ai choisi le temps du commencement de l'éclipse déja trouvé à-peu-près par l'opération graphique.

1861. Puisque le mouvement de la Lune est de 27′ 18″2 en une heure, il sera de 11′ 4″3 en 24′ 20″ de temps, et l'on aura la portion de l'orbite lunaire TL = 11′ 4″3; on dira, CT est à TL comme le rayon est à la tangente de l'angle TCL, qu'on trouvera de 13° 27′ 12″; ensuite sin. TCL : TL :: R : CL, 2855″5 ou 47′ 35″5.

Pour trouver l'angle OCA, l'on considérera que la distance depuis l'heure donnée 11ʰ 43′ 30″ jusqu'à midi est de 16′ $\frac{1}{2}$; ce qui répond à 4° 7′ 30″; le demi-grand axe de l'ellipse 35′ 51″, multiplié par le sinus de 4° 7′ $\frac{1}{2}$, donnera OB = 154″7, et le demi-petit axe 4′ 59″2, multiplié par le cosinus de 4° 7′ $\frac{1}{2}$, donnera DB = 298″5 (1830); mais CD = sin. latit. cos. déclin. (1819) = 2436″ 9; donc la somme CB = 2735″ 4.



Dans le triangle BCO rectangle en B, dont on connoît les deux côtés CB et BO, l'on trouvera l'angle OCB = 3° 14′ 17″6, et l'hypoténuse CO = 45′ 39″8. On prendra la différence de l'angle OCB et de l'angle ACT, 27° 51′ 53″, et l'on aura l'angle OCT = 24° 37′ 35″; la somme de l'angle OCT et de l'angle LCT, trouvé ci-dessus de 13° 27′ 12″, sera l'angle OCL = 38° 4′ 47″.

1862. Dans le triangle OCL, on connoît les deux côtés OC, CL, et l'angle compris OCL; il ne restera plus qu'à chercher le côté OL, qui est la distance apparente des centres, en disant: la somme des côtés OC, CL, qui est 93′ 15″3, est à leur différence 1′ 55″7, comme la tangente de la demi-somme des angles inconnus, 70° 57′ 36″, est à la tangente de leur demi-différence 3° 25′ 44″; ainsi l'angle O sera de 74° 23′ 20″; d'où l'on conclura enfin le côté OL de 30′ 28″6: c'est la distance apparente des centres du Soleil et de Lune à 11ʰ 43′ 30″.

1863. Le moment pour lequel on a calculé la distance seroit le moment même du vrai commencement de l'éclipse, si l'on eût trouvé la distance apparente égale à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune; mais le demi-diametre du Soleil étoit de 16′ 12″, celui de la Lune à l'horizon 14′ 46″; si l'on employoit l'augmentation de 8″ (1509), la somme seroit 31′ 6″, et la distance apparente des centres est plus petite de 37″4 que la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune; cela prouve que l'éclipse étoit déja commencée. On fera un semblable calcul pour 11ʰ 40′, et l'on trouvera 63″1 de plus pour la distance des centres; ainsi, en 3′ ½ de temps, la distance apparente changeoit de 63″; donc elle changeoit de 37″ en 2′ 4″5; on ôtera cette quantité de l'heure du premier calcul 11ʰ 43′ 30″, et l'on aura 11ʰ 41′ 25″5 pour le commencement de l'éclipse. On pourroit tracer, par le moyen de deux calculs semblables, l'orbite apparente de la Lune pour trouver les autres phases de l'éclipse; c'est ce que j'expliquerai dans la méthode suivante (1869).

Pour avoir égard à l'inflexion des rayons et à l'irradiation du Soleil, il faudroit ôter 5″ de la somme des demi-diametres apparens, ou de 31′ 6″, avant que de la comparer avec la distance apparente calculée (1395, 1992).

1864. Pour faire usage de l'augmentation du diametre de la Lune dans la projection, il faut une autre considération sur ce diametre. Supposons Paris au point F (FIG. 104), en sorte qu'il voie le centre du Soleil au point H de la projection, la Lune étant en L; si la distance HL, ou l'angle HFL compris entre les centres du Soleil et de la Lune, égale la somme des demi-diametres, ce sera la fin de l'éclipse: mais

ce

Fig. 105.

Ori. Occid.

Fig. 107.

Fig. 108.

Fig. 106.

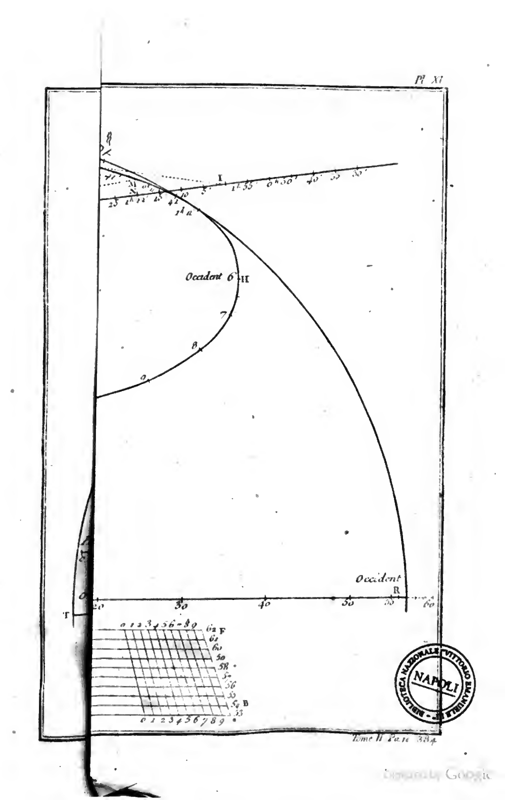
Contact
2 doits

Fig. 111.

Fig. 110.

Fig. 113.




Pl. XI
I
Occident 6
H
7
8
9
Occident
R
T
20
30
40
50
55
60
F
B
Tome II Page 384

ce sont les demi-diametres vus du point F et non pas vus du point N, ou vus du centre de la Terre, qu'il faut prendre : la différence est nulle pour le Soleil ; mais elle est sensible pour la Lune, et va jusqu'à 18″, ou une demi-minute de temps. Si le demi-diametre de la Lune paroît plus grand, l'arc total de la projection HL paroît plus grand aussi dans la même proportion ; et si le demi-diametre du Soleil étoit augmenté de même, il ne seroit plus nécessaire d'avoir égard à l'augmentation de HL ; tout resteroit proportionnel, la projection, les demi-diametres et le mouvement horaire ; alors les phases de l'éclipse seroient les mêmes, vues du point F ou vues du point N.

Supposons, pour rendre les choses très sensibles et les calculs très simples, que le point K où est l'observateur soit à la moitié de TL ou de la distance de la Lune ; que le rayon de projection LA, au lieu d'être d'un degré, paroisse de deux degrés ; que le mouvement horaire, vu du point K, ait également doublé et soit d'un degré, et le diametre de la Lune d'un degré : si le diametre du Soleil étoit aussi doublé et qu'il parût d'un degré, la distance des centres CL au commencement de l'éclipse seroit de 1° ; ainsi ce commencement paroîtroit arriver une heure avant que la Lune fût au point L où se fait sa conjonction ; et il en seroit tout de même pour le centre T de la Terre, où les quantités précédentes paroîtroient moindres de moitié : mais c'est le commencement de l'éclipse, vu du point K, que nous cherchons ; le rayon de projection et le diametre de la Lune y paroissant doubles, tandis que le Soleil y paroît toujours simple, il sera éloigné de la Lune ; l'éclipse commencera plus tard : or, en diminuant le Soleil dans la projection, l'éclipse commenceroit aussi plus tard. C'est donc une diminution qu'il faut y faire, et elle doit être proportionnelle au diametre du Soleil et non pas à celui de la Lune. Ainsi, dans la table de l'augmentation, il faudroit entrer avec le diametre du Soleil pour avoir cette diminution du Soleil. (Voy. M. de la Grange, *Éph. de Berlin*, 1781, *page* 37).

1865. La Caille, dans les Mémoires de l'académie pour 1744, fait voir de quelle maniere on pourroit calculer encore plus rigoureusement une éclipse par le moyen des projections, c'est-à-dire, corriger la méthode précédente ; mais on aura plus d'exactitude par les suivantes.

Calcul d'une éclipse par le nonagésime.

1866. Le nonagésime (1660) fournit une seconde méthode pour le calcul d'une éclipse ; dans cette méthode, il faut, pour avoir la dis-

tance apparente des centres, chercher la différence apparente de longitude et de latitude entre la Lune et le Soleil. Je suppose donc que, pour un instant donné, l'on veuille trouver la distance apparente des centres, il faut avoir pour cet instant la parallaxe de longitude et celle de latitude (1666 et suiv.).

Si la Lune est à l'orient du nonagésime (1678), il faut ajouter la parallaxe de longitude avec la longitude vraie pour avoir la longitude apparente de la Lune : mais si la longitude de la Lune est occidentale, c'est-à-dire plus petite que celle du nonagésime, pourvu que la différence soit moindre que 180°, il faut retrancher la parallaxe.

La somme ou la différence de 90°, et de la latitude vraie de la Lune, suivant qu'elle est australe ou boréale, est la distance au pole boréal de l'écliptique; on ajoute la parallaxe en latitude à la distance vraie de la Lune au pole de l'écliptique pour avoir sa distance apparente au pole. Ayant fait le même calcul pour deux instans, on verra si la Lune se rapproche ou s'éloigne de l'écliptique.

1867. On prendra la différence entre la longitude du Soleil et la longitude apparente de la Lune pour avoir la différence apparente en longitude. Soit DE (FIG. 121) une portion de l'écliptique, S le lieu du Soleil au moment pour lequel on calcule, L le lieu apparent de la Lune, EL sa latitude apparente, SE sa différence apparente de longitude avec le Soleil : dans le triangle SEL, rectangle en E, l'on connoîtra deux côtés SE et EL; on cherchera l'hypoténuse SL, qui est la distance apparente des centres du Soleil et de la Lune : pour cela on ajoutera les carrés des deux côtés, pris dans les tables des carrés, et l'on cherchera la racine de la somme; ou bien on fera les deux proportions suivantes : SE : EL :: R : tang. ESL, et sin. ELS : R :: ES : SL, distance apparente des centres.

Exemple. Le 1 avril 1764 à 9h 10′ du matin à Paris, où la latitude est de 48° 50′, on demande la distance apparente de la Lune au Soleil. Supposons la longitude de la Lune 11° 29′ 48″, la différence de longitude vraie entre la Lune et le Soleil 36′ 47″5, et la latitude de la Lune 35′ 56″4 boréale, tout cela dans les anciennes tables, le lieu du Soleil 12° 6′ 35″5; l'ascension droite du milieu du ciel sera 328° 38′, l'angle de l'écliptique avec le méridien 70° 7′ 6″, la hauteur du point culminant 28° 25′ 39″, auquel j'ajoutois 14′ 51″ pour tenir compte de l'aplatissement de la Terre (1692); la longitude du nonagésime 11s 28° 16′ 0″; la hauteur du nonagésime 34° 24′ 11″, la différence des parallaxes horizontales à Paris 54′ 0″14; on trouve pour la parallaxe de longitude (1666) 7′ 2″6, et la distance à la conjonction apparente 29′ 44″9. La parallaxe de latitude est 44′ 37″8; la latitude vraie

étoit 35′ 56″4 boréale; ainsi la latitude apparente est 8′ 41″4 australe. Connoissant les deux côtés EL, SE (FIG. 121), dont l'un est de 8′ 41″4, et l'autre de 29′ 44″9, on trouvera l'hypoténuse, ou la distance apparente SL des centres du Soleil et de la Lune, 30′ 59″5, la même que par ma méthode (1903).

Pour comparer cette distance avec la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, il faudra ôter 2″ du demi-diametre de la Lune (1992), et 3″ ½ du demi-diametre du Soleil pris dans nos tables (1508); enfin il faudra augmenter le demi-diametre de la Lune à raison de sa hauteur sur l'horizon (1509) par la table XCII; .... on aura ainsi la somme des demi-diametres dont nous ferons usage (1869).

1868. S'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la Lune, ou d'une autre éclipse dans laquelle l'astre éclipsé ait une latitude sensible SH, l'écliptique étant GI, il faudra avoir soin de multiplier la différence de longitude HI par le cosinus de la latitude apparente IL (3877) pour avoir cette différence SE en arc de grand cercle dans l'endroit où se trouve la Lune; c'est la quantité dont nous avons fait usage. On trouvera à la fin des tables de la Lune ce qu'il faut ôter dans ce cas-là de la différence de longitude.

1869. On fera le même calcul environ une heure après (parce-que les éclipses d'étoiles ne durent guere qu'une heure), ou deux heures après, si c'est une éclipse de Soleil, et l'on aura une autre distance apparente SF (FIG. 121) de la Lune au Soleil, et l'angle DSF, par le moyen de la différence de longitude apparente SD, et de la latitude apparente FD (1867). On connoîtra aussi par ce moyen le mouvement apparent en longitude, relativement au Soleil, ED ou AF, et le mouvement apparent en latitude AL. Connoissant FA et LA, on calculera l'angle AFL, qui est l'inclinaison du mouvement apparent, et la ligne LF, qui est le mouvement de la Lune relativement au Soleil, sur l'orbite apparente ou affectée par la parallaxe. Cet angle AFL peut être de plus de 20° dans certains cas, comme quand la Lune est dans son nœud descendant, peu éloignée du nonagésime, et de l'équinoxe d'automne; car alors le changement de la parallaxe porte la Lune du même côté que l'inclinaison de son orbite, ce qui augmente l'inclinaison apparente. On aura donc l'angle SLF, égal à la somme des angles ESL, AFL; quelquefois c'est leur différence : on en conclura la perpendiculaire SB, qui est la plus courte distance apparente de la Lune au Soleil; et le temps où la Lune a été en B, c'est le milieu de l'éclipse.

On supposera SL égale à la somme des demi-diametres apparens du Soleil et de la Lune (1867); connoissant SL et SB, on cherchera

la ligne BL; on la convertira en temps, à raison du mouvement sur l'orbite apparente, trouvé ci-dessus, et l'on saura combien la Lune a employé de temps à aller de L en B. Or l'on connoît le temps du milieu de l'éclipse en B, donc on connoîtra le moment de la fin en F, et celui du commencement en L (*Kepler, Epit. astron. p.* 888).

Il faut bien distinguer cette *orbite apparente*, affectée par la parallaxe, et que nous venons de déterminer, de l'*orbite relative* (1745), qui peut être représentée ici par une autre ligne MN; nous n'en parlerons point dans le cas actuel. On doit se rappeller que, dans l'orbite relative, il s'agit du mouvement vrai de la Lune, vu du centre de la Terre, par rapport au Soleil supposé fixe en S; on le détermine par le moyen des latitudes vraies EM, DN, qui peuvent aller d'un autre sens, et être d'une autre dénomination que les latitudes apparentes EL, DF.

1870. Quand on voudra connoître avec une grande précision la grandeur de l'éclipse, il faudra calculer deux autres distances apparentes, comme SF, et SL, mais plus voisines du milieu B de l'éclipse, et se servir de ces nouvelles distances pour trouver la perpendiculaire SB. Mais si l'orbite apparente FL n'est pas parfaitement rectiligne, comme nous l'avons supposé pendant la durée d'une éclipse, du moins la différence ne va jamais qu'à peu de chose dans l'espace d'une demi-heure : dans l'éclipse de 1748, je n'ai trouvé que 3″ de courbure en 40′ de temps, par un calcul rigoureux; mais en 3ʰ 5′ il y avoit 61″. Képler, dans l'éclipse de 1598, trouvoit plus de 3′ de courbure en 3ʰ, parceque la Lune étoit plus près du nonagésime. Dans l'éclipse de 1764, il y avoit 26″ de courbure. Ainsi la ligne droite FL n'est pas l'orbite apparente de la Lune, mais seulement une ligne qui joint les deux lieux apparens L et F.

1871. La plus courte distance SB, calculée exactement, fait connoître la grandeur de l'éclipse, à-peu-près comme dans les éclipses de Lune (1765); *car la somme des demi-diametres apparens de la Lune et du Soleil, moins la plus courte distance apparente des centres, donne la grandeur de l'éclipse.* Cette maniere de déterminer les phases, par le moyen de l'orbite apparente, est beaucoup plus facile que celle des interpolations, indiquée par La Caille dans ses *Leçons d'astron.* (art. 1140).

1872. Le diametre apparent de la Lune exige que l'on connoisse sa hauteur, du moins à-peu-près, pour trouver l'augmentation (1509). On pourroit trouver cette hauteur grossièrement avec un globe; mais si l'on veut mettre de la précision dans ce calcul, on n'est pas obligé de faire tout le calcul de la hauteur (1036). La Caille in-

dique une analogie pour trouver la hauteur du point de l'écliptique auquel la Lune répond ; mais il en faudroit trois pour calculer la hauteur exacte de la Lune. M. de Lambre y avoit suppléé, en calculant une table où l'on trouvoit cette hauteur par le moyen de la parallaxe de longitude et de latitude. En effet la parallaxe de hauteur est l'hypoténuse d'un triangle rectiligne dont les côtés sont la parallaxe de latitude, et celle de longitude, dans la région de l'étoile ; et cette parallaxe de hauteur est proportionnelle au sinus de la distance au zénit : ainsi les parallaxes peuvent servir à trouver la hauteur, et par conséquent l'augmentation du demi-diametre.

1873. Mais M. Gertsner a remarqué, dans sa *Méthode analytique pour les éclipses*, que le diametre horizontal est au diametre apparent, comme le sinus de la distance vraie au nonagésime, multiplié par le cosinus de la latitude vraie, est au sinus de la distance apparente par le cosinus de la latitude apparente. Cela résulte de l'expression de $\frac{\sin. ZL}{\sin. ZS}$ (1681). Il est vrai que si la distance au nonagésime étoit nulle, cette formule ne pourroit s'employer ; mais alors on auroit la hauteur de la Lune égale à celle du nonagésime, plus ou moins la latitude de la Lune.

M. de Lambre a calculé de petites tables qui dispensent même du calcul précédent : on les trouvera à la fin des tables de la Lune ; elles sont construites sur la formule suivante. Soit l la latitude vraie, L la latitude apparente, P la parallaxe horizontale, Π la parallaxe de longitude, π la parallaxe de latitude, h la hauteur du nonagésime, D la distance apparente au nonagésime, m le demi-diametre horizontal ; son augmentation est égale à $\frac{2m \sin. \frac{1}{2}\pi \sin. (l - \frac{1}{2}\pi)}{\cos. l} +$ $\frac{m . \cos. L}{\cos. l \cos. \Pi}\left(\frac{\sin. P. \sin. h. \cos. D}{\cos. l. \cos. \Pi}\right) + \frac{m . \cos. L}{\cos. l. \cos. \Pi}\left(\frac{\sin. P. \sin. h. \cos. D}{\cos. l. \cos. \Pi}\right)^2$.

Pour démontrer cette formule, soit a l'augmentation du demi-diametre : en vertu de l'expression ci-dessus, l'on aura $m + a =$ $\frac{m . \cos. L}{\cos. l} . \frac{\sin. D}{\sin. (D - \Pi)}$; mais $\frac{\sin. D}{\sin. (D - \Pi)} = \frac{\sin. D}{\sin. D \cos. \Pi - \cos. D \sin. \Pi} =$ $\frac{1}{\cos. \Pi - \sin. \Pi \cot. D} = \frac{1}{\cos. \Pi} + \frac{1}{\cos. \Pi} . \frac{\sin. \Pi \cot. D}{\cos. \Pi} + \frac{1}{\cos. \Pi}\left(\frac{\sin. \Pi . \cot. D}{\cos. \Pi}\right)^2$ (3421), et mettant pour Π sa valeur (1666) on aura $\frac{1}{\cos. \Pi} + \frac{1}{\cos. \Pi}$ $\left(\frac{\sin. P. \sin. h. \sin. D. \cot. D}{\cos. l \cos. \Pi}\right) + \frac{1}{\cos. \Pi}\left(\frac{\sin. P. \sin. h \cos. D}{\cos. l \cos. \Pi}\right)^2$; donc $m + a$ $= \frac{m . \cos. L}{\cos. l}$ multiplié par ces trois termes, ou $a = \frac{m \cos. L - m \cos. l \cos. \Pi}{\cos. l \cos. \Pi}$

et l'on aura PZ 41° 24′ 37″; l'angle horaire, à 9ʰ 10′, est de 42° 30′; on trouvera la hauteur du Soleil, 33° 16′ 23″, et l'angle du cercle horaire ou du cercle de déclinaison avec le vertical 32° 18′ 32″; l'angle de position étoit de 23° 9′ 12″; la différence de longitude AB, entre la Lune et le Soleil, 36′ 47″4; et la latitude de la Lune SB, 35′ 46″4 boréale.

1877. L'ANGLE PARALLACTIQUE proprement dit (1038) est formé au centre du Soleil S (FIG. 119) par le vertical ZSD, et le cercle de latitude PSE. On ne peut calculer cet angle parallactique PSZ, sans le diviser en deux parties qui se calculent séparément; savoir, l'angle de position PSO (1047), compris entre le cercle de déclinaison SO, et le cercle de latitude SP, et l'angle OSZ du cercle horaire avec le vertical ZS (1038).

1878. Nous prendrons toujours ces angles du côté du pole élevé, c'est-à-dire, du côté du nord pour nos climats septentrionaux, soit que l'angle du vertical et du cercle de déclinaison soit aigu ou obtus [(a)], et nous considérerons la partie du cercle de latitude, ou du cercle de déclinaison, qui est comprise entre l'astre et le pole élevé, qui, chez nous, est le pole boréal de l'écliptique ou de l'équateur. Les angles étant ainsi considérés, on observera les regles suivantes, qui n'ont besoin d'aucune autre démonstration que l'inspection d'un globe ou d'une figure [(b)].

Il faut ajouter ensemble ces deux angles, c'est-à-dire, l'angle de position et l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison, après le passage au méridien, si c'est dans les signes ascendans 9, 10, 11, 0, 1, 2, ou avant le passage au méridien, si c'est dans les signes descendans; mais on prend leur différence, en ôtant le plus petit du plus grand, quand l'astre n'a pas passé le méridien, et qu'il est dans les signes ascendans, ou lorsqu'il a passé le méridien et se trouve dans les signes descendans.

1879. Pour pouvoir se former aisément une figure exacte, dans les différens cas, supposons que le Soleil soit en S sur une ligne verticale ZSD du côté de l'orient : on sait qu'en regardant l'orient on a le pole septentrional à sa gauche; ainsi l'on tirera vers la gauche une ligne SO pour représenter le cercle de déclinaison. On sait aussi

(a) Il est obtus (1038), lorsque ZS (FIG. 42) est plus près du pole que la perpendiculaire ZX; cela ne peut avoir lieu pour le Soleil que dans la zone torride, et pour la Lune quand on est à 28 degrés de l'équateur.

(b) M. Cagnoli (art. 808) donne des regles qui sont plus courtes que les miennes; mais elles exigent la considération des signes, qui peut paroître moins satisfaisante.

que, vers l'orient, l'écliptique, et le mouvement propre du Soleil qui se fait d'occident en orient, doivent aller de haut en bas : mais, si c'est dans les signes ascendans, ce mouvement du haut en bas n'est pas tout-à-fait perpendiculaire au cercle de déclinaison SO; il va un peu en se rapprochant du pole du monde O, ou de l'origine du cercle SO : on tirera donc l'écliptique ou son parallele dans la direction FS qui se rapproche du pole O, en faisant en bas un angle aigu, et l'on verra par ce moyen que la ligne perpendiculaire à l'écliptique, ou le cercle de latitude SP, doit passer en haut, à droite du cercle de déclinaison SO; il en est ainsi à proportion des autres cas. On peut dire aussi en général que le point O est à l'orient du pole de l'écliptique, dans les signes ascendans 9, 10, 11, 0, 1, 2, et qu'il est à l'occident dans les 6 autres signes, ou que l'angle de position est oriental dans les signes ascendans, occidental dans les autres.

1880. Lorsque l'angle du cercle horaire est oriental, ou que le cercle de déclinaison est à l'orient du vertical (1040), et que l'angle de position est aussi oriental, le cercle de latitude étant à l'orient du cercle horaire, il faut ajouter ensemble les deux angles pour former l'angle parallactique, et celui-ci sera également oriental, c'est-à-dire que le cercle de latitude sera à l'orient du vertical. Si l'un des angles est oriental, et l'autre occidental, il faudra prendre leur différence, et l'angle parallactique aura la dénomination du plus grand, c'est-à-dire qu'il sera oriental, si le plus grand angle étoit oriental.

Il faut donc examiner si, par le résultat de l'addition ou de la soustraction, l'angle parallactique est oriental (1038), c'est-à-dire, si le cercle de latitude est à l'orient du vertical du côté du nord, ou s'il est à l'occident. En général, le cercle de latitude est à l'orient du vertical avant le passage au méridien, et à l'occident après le passage au méridien; si ce n'est dans le cas où l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison non seulement est plus petit que l'angle de position, mais qu'il en a été retranché[a] : car alors le cercle de latitude est à l'occident du vertical, si c'est avant le passage au méridien; et à l'orient du vertical, si c'est après le passage au méridien :

(a) Cela arrive pendant quelque temps avant midi, dans les signes ascendans; et après midi, pendant quelque temps, dans les signes descendans; car, dans le premier cas, le cercle de latitude peut être à l'occident du vertical, un certain temps avant le passage au méridien; et, dans le second cas, il peut être à l'orient même après le méridien : cela pourroit même durer pendant 2 h 48′, si la Lune avoit 28° de déclinaison australe; car l'angle du vertical avec le méridien est alors de 26° 11′, comme l'angle de position à 0° d'ascension droite.

nous

nous serons obligés plusieurs fois de rappeller cette distinction (1891 *et suiv.*).

1881. Si nous étions dans la partie septentrionale de la zone torride, et que nous eussions le Soleil du côté du nord, c'est-à-dire que sa déclinaison fût plus grande que la latitude du lieu, l'angle du cercle horaire seroit occidental le matin, du côté du zénit, et il seroit obtus dans certains cas. L'angle de position seroit oriental dans les signes descendans, tout comme il l'est dans l'Europe.

1882. Dans les pays situés au midi de l'équateur, l'angle du cercle horaire est oriental le matin, comme en Europe, puisque c'est le pole élevé duquel on prend ces angles (1878). L'angle de position est occidental dans les signes 3, 4, 5, 6, 7, 8, au contraire de ce qui a lieu en Europe.

1883. EXEMPLE. Le premier avril 1764, à 9h 10′ du matin, on trouvera, par le moyen de la longitude du Soleil, 12° 9′ 55″, l'angle de position 23° 0′ 12″; on le retranchera de l'angle ZSO, 32° 18′ 32″ (1878), et l'on aura 9° 18′ 20″ pour l'angle parallactique ZSP. Cet angle est oriental, c'est-à-dire que le cercle de latitude PS est à la gauche ou à l'orient du vertical, dans ce cas-là, puisque c'est avant le passage au méridien, et que, l'angle du cercle horaire étant oriental, l'angle de position, quoiqu'occidental, ne s'est pas trouvé le plus grand.

1884. L'ANGLE DE CONJONCTION est l'angle formé par le cercle de latitude, et par le cercle mené du Soleil à la Lune. On le prend toujours du côté où il est aigu. Cet angle est nul dans la conjonction, et il augmente d'autant plus, que la Lune s'éloigne de la conjonction, toutes choses égales. Soit S (FIG. 119) le Soleil ou l'étoile dont on calcule une éclipse, A la Lune, SB égal à la latitude de la Lune mesurée sur le cercle PS (a), BA égal à la différence de longitude entre la Lune et le Soleil. La ligne SA, ou l'arc qui joint le vrai lieu du Soleil à celui de la Lune, forme, avec le cercle de latitude, l'angle ASB que j'appelle ANGLE DE CONJONCTION. Pour le trouver, on dira : *La différence des latitudes est à la différence des longitudes des deux astres, comme le rayon est à la tangente de l'angle de conjonction*, ou SB : BA :: R : tang. BSA.

(a) En concevant deux cercles de latitude, dont l'un passeroit en A, et l'autre en B, les latitudes de A et de B ne pourroient différer de 3″ pour 5° de latitude, et 1° de distance à la conjonction. Si l'on veut y avoir égard, il suffit d'ajouter cette correction à la latitude de la Lune, avant de former SB (1910): on en trouvera une table à la fin de celles de la Lune. Cette latitude ainsi augmentée ne servira que pour former la différence SB : mais c'est la latitude primitive qu'on emploiera pour tout le reste du calcul.

1885. La ligne BA, s'il s'agit d'une éclipse d'étoile, étant dans la région de l'étoile, est un peu plus petite que la différence de longitude prise dans les tables, et mesurée le long de l'écliptique. Ainsi, pour avoir la véritable valeur de BA, il faut multiplier la vraie différence des longitudes par le cosinus de la latitude vraie de la Lune (art. 3877); la différence ne peut aller qu'à 15″ dans les plus grandes latitudes de la Lune, et en supposant même AB d'un degré : on en trouvera une table à la fin de celles de la Lune.

1886. L'ANGLE D'AZIMUT [a], ou l'angle de distance, est l'angle ZSA, formé au centre du Soleil ou de l'étoile par le vertical de l'étoile, et par la ligne SA, qui va du centre de l'étoile au centre de la Lune. Cet angle d'azimut ASC ne peut se former que par la somme ou la différence des angles BSC et ASB, c'est-à-dire, de l'angle parallactique, et de l'angle de conjonction.

1887. L'angle de conjonction est toujours occidental, ou à l'occident du cercle de latitude avant la conjonction; il est oriental après la conjonction : ainsi, lorsque l'angle parallactique sera oriental, c'est-à-dire, lorsque le cercle de latitude, pris du côté du nord, ou la portion du cercle de latitude qui est au nord de l'étoile, sera à l'orient du vertical, avant la conjonction, on prendra la *différence* de l'angle de conjonction et de l'angle parallactique, et après la conjonction l'on prendra la *somme* pour former l'angle d'azimut. Lorsque l'angle parallactique sera occidental, c'est-à-dire, que le cercle de latitude sera à l'occident du vertical, on prendra la *somme* avant la conjonction, et la *différence* après la conjonction; tout cela, dans le cas où la Lune sera au nord du Soleil, ou de l'étoile qui est en conjonction : mais si la latitude de la Lune est au midi du Soleil ou de l'étoile, c'est-à-dire, si la Lune a une latitude plus méridionale ou moins boréale que l'étoile, on changera les mots de *somme* et de *différence* dans les préceptes que nous venons d'établir, parceque ce sera la partie inférieure de la figure 119, dont on fera usage. On aura soin de remarquer si la somme est plus grande que 90° (1890). Ces préceptes sont généraux, soit dans les pays septentrionaux, soit dans les pays méridionaux, et dans le cas même où l'angle parallactique est obtus, pourvu qu'on n'emploie que son supplément à 180°, dans les regles précédentes, et qu'on entende par le mot d'*angle parallactique oriental*, un angle aigu du côté de l'orient vers le nord. C'est ainsi que l'on formera l'angle d'azimut ASC, compris entre le vertical ZCS, et l'arc de la distance vraie SA, qui est entre le Soleil et la Lune.

(a) Ce n'est pas la même chose que l'azimut (1041).

1888. Il faut chercher aussi l'arc AS, qui est la distance vraie de la Lune au Soleil ou à l'étoile, soit en ajoutant les carrés de AB et BS en secondes, pris dans les tables des carrés, soit en faisant la proportion suivante : le sinus de l'angle de conjonction ASB est à la différence de longitude AB, comme le rayon est à la distance AS. Cette distance AS, multipliée par le sinus de l'angle d'azimut ASC (1886), ou de son supplément, donnera la *différence d'azimut* vraie AC, ou la distance, parallèlement à l'horizon, entre la Lune et le Soleil. Cette même distance AS, multipliée par le cosinus de l'angle d'azimut ASC, donnera la différence de hauteur vraie SC, entre le Soleil et la Lune : nous en ferons usage (art. 1890), pour trouver la distance ZC de la Lune au zénit, qui doit servir à trouver la parallaxe de hauteur.

1889. EXEMPLE. La latitude 35′ 46″4 (1876) est à la différence de longitude 36′ 47″4, comme le rayon est à la tangente des 45° 40′ 9″, angle de conjonction ASB (a); divisant 36′ 47″4 par le sinus de cet angle, on a la distance vraie SA, 51′ 25″9; la différence entre l'angle de conjonction 45° 40′ 9″, et l'angle parallactique de 9° 18′ 20″ (1883), donne l'angle d'azimut ASC, 36° 21′ 49″. La distance vraie 51′ 25″9, multipliée par le sinus de l'angle d'azimut 36° 21′ 49″, donne la différence vraie d'azimut AC 30′ 29″7 ; et la même distance vraie, multipliée par le cosinus du même angle d'azimut, donne la différence de hauteur vraie SC, 41′ 25″0 (b).

1890. Pour connoître la hauteur vraie de la Lune, on prend la différence de hauteur SC, entre la Lune et le Soleil ou l'étoile (1888), qu'on ajoute à celle du Soleil, si la Lune est plus élevée au-dessus de l'horizon, comme dans la FIG. 119 ; mais pour distinguer si elle est plus élevée, voici des regles générales qui supposent seulement qu'on ait examiné si la somme de l'angle de conjonction et de l'angle parallactique (en prenant son supplément, s'il est obtus), forme plus ou moins de 90°, dans les cas où on les ajoute ensemble (1887). On pourra se dispenser de consulter ces regles, si l'on voit assez distinctement la situation des lignes et des angles dont il s'agit dans ce calcul, ou si l'on a une figure exacte devant les yeux. Les regles suivantes renferment tous les cas où la Lune est plus haute que le Soleil, c'est-à-dire, où il faut ajouter la différence de hauteur vraie à celle du Soleil pour avoir la hauteur vraie de la Lune.

(a) Il y a une petite erreur à supposer ces triangles rectilignes, mais elle est compensée par celle du triangle apparent (1917). M. Cagnoli a donné la maniere de calculer ces erreurs. *Trigonométrie, pages* 306, 364.

(b) Les petites tables de logarithmes (4105) que je publiai avec La Caille en 760, so n t fort commodes pour ces calculs.

1891. DANS LES PAYS SEPTENTRIONAUX. AVANT LE MÉRIDIEN. Si la latitude de la Lune est au NORD du Soleil ou de l'étoile sur le cercle de latitude, AVANT la conjonction.

Si la Lune est au NORD, APRÈS la conjonction, et que la somme de l'angle de conjonction et de l'angle parallactique (1887) soit moindre que 90°.

Si la Lune est au MIDI, AVANT la conjonction, et que la somme de l'angle de conjonction et de l'angle parallactique soit plus grande que 90°.

1892. Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le méridien (1880), l'on aura une différence de hauteur additive dans les cas suivans.

Si la Lune est au NORD du Soleil ou de l'étoile, APRÈS la conjonction.

Si la Lune est au NORD, AVANT la conjonction, et que la somme des angles soit plus petite que 90°.

Si la Lune est au MIDI, APRÈS la conjonction, et que la somme des angles soit plus grande que 90°.

1893. APRÈS LE MÉRIDIEN. Ce sont les trois regles de l'article 1892.

Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le méridien (1880), ce sont les trois regles de l'article 1891.

Les préceptes de ces trois articles sont les seuls dont on ait besoin en Europe.

1894. L'angle parallactique peut se trouver obtus dans les pays septentrionaux de la zone torride, si la Lune est entre le zénit et le pole élevé; alors on changera les mots de NORD et de MIDI dans les articles 1891 et 1892; mais on prendra le supplément de l'angle parallactique avant de l'ajouter à l'angle de conjonction (1887).

1895. DANS LES PAYS MÉRIDIONAUX, c'est-à-dire, si le lieu pour lequel on calcule une éclipse est de l'autre côté de l'équateur, ayant une latitude géographique australe, AVANT LE MÉRIDIEN, l'on changera les mots de NORD et MIDI dans l'article 1891.

Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le cercle de déclinaison, l'on changera dans l'article 1892 les mots de NORD et MIDI.

1896. APRÈS LE MÉRIDIEN. On changera aussi dans l'article 1892 les mots de NORD et MIDI.

Mais si l'angle du vertical avec le méridien a été soustrait de l'angle de position (1880), on changera NORD et MIDI dans l'article 1891.

1897. Si l'angle parallactique est obtus dans les pays méridionaux, AVANT LE MÉRIDIEN ; on prendra l'article 1891. APRÈS LE MÉRIDIEN ce sera l'article 1892 : je suppose toujours qu'on prend le supplément de l'angle parallactique pour l'ajouter à l'angle de conjonction (1887).

1898. Les cas où la différence de hauteur est soustractive se peuvent conclure de ceux où elle est additive, en changeant dans les neuf articles précédens tous les mots MIDI et NORD, AVANT et APRÈS la conjonction, sans changer AVANT et APRÈS LE MÉRIDIEN.

1899. Lorsqu'on a ajouté la différence de hauteur SC avec celle du Soleil ou de l'étoile, ou qu'on l'a retranchée en suivant les regles précédentes, on a la hauteur vraie de la Lune et la distance au zénit ZA qui est sensiblement égale à ZC, à moins que la Lune ne soit très près du zénit; alors il faudroit résoudre le triangle ZCA et trouver l'hypoténuse ZA. Pour avoir la hauteur apparente de la Lune, on multipliera la différence des parallaxes par le cosinus de la hauteur vraie de la Lune que l'on vient de trouver; on aura la parallaxe de hauteur, à quelques secondes près (a); cette parallaxe se retranchera de la hauteur vraie de la Lune pour avoir sa hauteur apparente; et la différence des parallaxes horizontales, mutipliée de nouveau par le cosinus de cette hauteur apparente, donnera exactement la parallaxe de hauteur (1629), c'est-à-dire AL ou CD, FIG. 117 et 119.

1900. La parallaxe de hauteur CD (FIG. 119) abaisse la Lune ; ainsi l'on prend la différence entre CD ou AL et la quantité CS dont la hauteur vraie de la Lune étoit plus grande que celle du Soleil, et l'on a la différence de hauteur apparente SD.

Si la hauteur vraie de la Lune a été trouvée moindre que celle de l'étoile, on ajoutera cette différence avec la parallaxe de hauteur pour avoir la quantité SD dont le lieu apparent de la Lune sera plus bas que celui du Soleil.

1901. Après avoir trouvé la différence des hauteurs apparentes du Soleil et de la Lune, il faut avoir aussi la différence apparente d'azimut par le moyen de la différence vraie trouvée ci-dessus (1889). On peut prendre la différence vraie pour l'apparente dans tous les calculs où l'on ne veut pas mettre une grande précision, et, dans ce cas, le calcul d'une éclipse devient beaucoup plus simple; mais si l'on veut calculer tout à la rigueur, la différence vraie d'azimut AC

(a) On peut la prendre aussi à la vue, dans la table des parallaxes, pour différentes hauteurs qui se trouvent dans beaucoup de livres, entre autres, dans les tables de Gardiner de 1783 (4104), qui sont actuellement entre les mains de tous les astronomes.

exige une petite correction que je vais expliquer. Supposons les deux verticaux du Soleil et de la Lune très proche l'un de l'autre, comme ZCD et ZAL (FIG. 117). Soit un arc AC perpendiculaire au vertical ZC ; j'ai appellé cet arc la différence vraie d'azimut ; si l'on prend AL égale à la parallaxe de la Lune en hauteur (1629), en sorte que L soit son lieu apparent dans le vertical ZAL, et qu'on tire LD perpendiculaire au vertical du soleil CD, la différence apparente d'azimut, qui est LD, sera plus grande que la différence vraie AC, parceque AL n'est pas exactement parallele à CD. Si on veut savoir de combien la différence apparente LD surpasse la différence vraie AC, on considérera que AC : DL :: sin. ZA : sin. ZL (3875); ainsi il faut dire, Le cos. de la hauteur vraie de la Lune est au cos. de la hauteur apparente, comme la différence vraie d'azimut est à la différence apparente ; et comme on a déja les trois premiers logarithmes, cette opération est très facile.

Si l'on vouloit cependant l'éviter, on pourroit trouver la petite correction dans une table que j'ai donnée (*Connoiss. des mouv. cél.* 1764, *pag.* 120).

1902. Connoissant ainsi la différence apparente de hauteur SD (1900) [a], et la différence apparente d'azimut LD (1901), l'on résoudra le triangle SLD, et l'on trouvera la distance apparente SL, qui est le dernier résultat du calcul. Cette distance fera connoître si l'éclipse est commencée, et fera trouver le véritable commencement, si l'on fait le même calcul pour un temps plus ou moins avancé de quelques minutes.

1903. EXEMPLE. La différence de hauteur vraie entre la Lune et le Soleil, 41′ 25″0 (1889), étant ajoutée (1891) à la hauteur du Soleil 33° 16′ 23″ (1876), donne la hauteur vraie de la Lune, 33° 57′ 48″. La différence des parallaxes horizontales du Soleil et de la Lune, 54′ 0″14, multipliée par le cosinus de la hauteur vraie de la Lune, donne la parallaxe de hauteur à-peu-près 44′ 47″. Cette parallaxe, retranchée de la hauteur vraie de la Lune, 33° 57′ 48″, donne sa hauteur apparente, 33° 13′ 1″. Le cosinus de cette hauteur apparente, multiplié par la parallaxe horizontale, donne plus exactement la différence des parallaxes dans le sphéroïde aplati, 46′ 10″6; et si l'on emploie la hauteur apparente dans une troisieme opération, l'on trouvera 45′ 10″9 = AL ou CD; c'est la valeur exacte de la parallaxe de la Lune en hauteur : il en faut retrancher la différence de hauteur

(a) Si la Lune étoit à peu de degrés du zénit, on ne pourroit pas supposer CD = AL, et il faudroit une analogie de plus pour trouver ZD par le moyen de ZL et LD, comme dans l'art. 1899; alors de ZD l'on ôteroit ZS pour avoir SD.

vraie CS = 41′ 25″0 : il reste la différence de hauteur apparente SD, 3′ 45″9.

Pour avoir la différence apparente d'azimut LD, l'on dira : le cos. de 33° 57′ 48″ est à celui de 33° 12′ 37″, comme la différence d'azimut, 30′ 29″7, est à la différence apparente 30′ 45″7 = DL. Cette valeur de DL, avec celle de SD, nous donnera l'angle LSD de 83° 1′ 20″, et la distance apparente des centres du Soleil et de la Lune, 30′ 59″5, comme par la méthode précédente (1867)[a].

1904. La somme du demi-diametre du Soleil 16′ 0″8, et du demi-diametre horizontal de la Lune, 14′ 47″1, augmenté de 7″7, à cause de sa hauteur (1510), est de 30′ 55″6, quantité moindre de 3″9 que la distance apparente des centres; ainsi le centre de la Lune devoit se rapprocher encore du centre du Soleil de 3″9 pour que l'éclipse pût commencer. Si l'on refait un semblable calcul (1876 *et suiv.*) pour un temps plus avancé de 1′, ou pour 9ʰ 11′, l'on trouvera que la distance apparente des centres est de 30′ 37″5 plus petite que la précédente de 22″0; or 22″ : 1′ 0″ :: 3″9 : 11″; donc la distance des centres perdoit, dans l'espace de 11″ de temps, les 3″9 dont nous l'avons trouvée trop grande : ainsi l'éclipse devoit commencer à 9ʰ 10′ 11″, suivant les tables.

1905. Il faudroit ôter 7″ de la somme des demi-diametres, et la réduire à 30′ 48″6, si l'on vouloit avoir égard à l'irradiation (1395) et à l'inflexion des rayons qui rasent le limbe de la Lune (1992), c'est-à-dire qu'il faudroit diminuer de 3″½ le demi-diametre de la Lune, et d'autant celui du Soleil. En prenant le diametre dans mes nouvelles tables, il n'y a que 5″½ à ôter.

1906. Si l'on veut former l'orbite apparente de la Lune, affectée de la parallaxe, pour trouver le milieu de l'éclipse (1869), et le mouvement apparent, on se servira de l'angle LSD, 83° 1′ 20″; la somme ou la différence de cet angle et de l'angle parallactique (1877) donnera l'angle LSE : dans notre exemple, il est de 73° 43′ 0″[b]. L'on fera tous les calculs précédens pour une ou deux heures plus tard, la Lune étant, par exemple, en F, et l'on aura de même l'angle FSE, qu'on ajoutera avec l'angle LSE : ainsi l'on formera un triangle LSF dans lequel on connoîtra LS, SF, et l'angle LSF; on

(a) Ma méthode exige 12 lignes de calcul de moins que la méthode où l'on calculeroit la hauteur de la Lune à la maniere ordinaire. Il peut y avoir 15″ d'erreur sur la hauteur, mais cela est insensible sur la distance apparente que l'on cherche.

(b) Ce sera la somme, si la Lune et le vertical sont de différens côtés, par rapport au cercle de latitude.

cherchera le segment LX, qui donnera le temps où la Lune doit paroître en X, c'est le temps du milieu de l'éclipse (1869); on cherchera ensuite la perpendiculaire SX avec laquelle on trouvera facilement la grandeur de l'éclipse (1871). Il y a des cas où SL et SF sont du même côté, comme dans l'éclipse du 17 octobre 1701.

1907. Lorsqu'on a calculé deux fois les différences apparentes de longit. et de latit. (1910), on peut tracer sur un carton l'orbite apparente de la Lune, et la divisant en minutes, on peut y voir avec assez d'exactitude le changement des distances dans l'espace de quelques minutes; ce qui dispense de faire ce calcul deux fois pour le commencement, et deux fois pour la fin.

1908. Si l'on veut avoir exactement le milieu de l'éclipse, il faut que les calculs ne soient éloignés entre eux que d'une demi-heure, ou bien que l'un des calculs ne soit pas éloigné d'un quart d'heure du milieu de l'éclipse, ou de la plus grande phase, afin que la courbure de l'orbite ne soit pas sensible (1870). Ainsi l'on peut regarder le premier résultat comme une approximation, et calculer la distance des centres pour le temps de la plus grande phase, que l'on aura trouvé par le premier calcul; on combinera cette nouvelle distance des centres avec celle qu'on aura calculée pour le commencement ou pour la fin, et l'on en déduira plus exactement la grandeur et le temps de la plus grande phase.

1909. La nouvelle méthode que je viens de donner pour calculer une éclipse, est plus simple que celle du nonagésime [a]. 1°. On n'a besoin que de la hauteur de la Lune, et on la trouve facilement par le moyen de celle du Soleil. 2°. On a la parallaxe exacte qui convient à la hauteur apparente, par deux simples additions (1903), au lieu que dans la formule du nonagésime (1678), il faut faire deux fois une évaluation qui est bien plus compliquée. 3°. Lorsqu'on a une table des hauteurs, et des angles parallactiques, ma méthode est plus courte que celle du nonagésime, en supposant de pareilles tables pour cette méthode. 4°. On trouve l'angle qui donne le point du Soleil où doit commencer une éclipse (1856).

1910. Si l'on veut avoir non seulement la distance apparente des centres, mais encore les parallaxes de longitude et de latitude, on les trouve par le moyen du triangle SLE, dans lequel on calcule la différence des longitudes apparentes EL, 29′ 44″9, et la latitude ap-

(a) Du moins pour les éclipses de Soleil; et pour celles des étoiles, dans le cas que l'on n'auroit pas une table du nonagésime pour le lieu donné. Lorsqu'on a cette table, on peut réunir les avantages des deux méthodes; c'est ce que M. de Lambre fait par une méthode composée qu'il se propose de publier.

parente

parente SE = 8′ 51″5; comparant ces valeurs avec les différences vraies AB, 36′ 47″5, et BS, 35′ 46″4, l'on a la parallaxe de longitude 7′ 2″6, et celle de latitude 44′ 37″9, ainsi que par la méthode du nonagésime (1867). Mais si la différence de longitude étoit fort grande, et la latitude de la Lune de plusieurs degrés, il pourroit y avoir une inexactitude de 2 ou 3 secondes, pour la parallaxe de latitude, par cette méthode, à raison de ce que le point A et le point B ne sont pas rigoureusement à la même distance de l'écliptique (1675). Pour corriger cette erreur, il suffit d'augmenter la latitude de la Lune d'une quantité égale à $\frac{AB^2 \text{ tang. lat.}}{2.\ 57°}$ (4046). J'en ai donné une table au bas de celle de la *réduction au grand cercle;* on y voit pour chaque différence de longitude, et pour 5 degrés de latitude, ce qu'il faut ajouter à la latitude vraie de la Lune, avant que d'en ôter celle de l'étoile pour former SB. J'ai déja averti de cette attention dans la note de l'article 1884; et si l'on y a égard en commençant le calcul, la parallaxe de latitude sera aussi exacte que dans la méthode rigoureuse du nonagésime.

Cette correction n'a point lieu dans les éclipses de Soleil, ni même pour les étoiles, quand elles ont peu de latitude, ou que la parallaxe de longitude est petite, ou que la différence vraie de longitude n'est que de 15 à 20 minutes.

Quand on a trouvé SE, et qu'on en déduit la latitude apparente de la Lune, il faudroit aussi y faire une correction pareille, mais en sens contraire, c'est-à-dire, la diminuer de la quantité qui répond à LE; mais comme la valeur de LE, dans les éclipses d'étoiles, n'est que de 15 à 16′, cette correction est insensible. Il en est de même de celle qu'il faudroit faire aux différences de hauteur SC et SD, à moins que la Lune ne soit fort près du zénit.

Ainsi tout cela n'empêche pas que ma méthode ne soit plus simple que celle du nonagésime; cependant je donnerai un exemple détaillé de celle-ci (1971).

Méthode pour calculer la route de l'ombre et les lignes des phases sur la surface de la Terre.

1911. Après avoir déterminé les circonstances de l'éclipse générale pour le méridien de Paris (1793), par le calcul, ou par l'opération graphique dont on peut très bien se contenter (1798), nous allons chercher, par longitudes et latitudes, les pays de la Terre où commenceront ces phases; il faut savoir, par exemple, quel est le

point I de la Terre (FIG. 103), qui le premier de tous verra commencer l'éclipse, en voyant lever le Soleil; quel est le point V qui le premier verra l'éclipse centrale au lever du Soleil. On a vu la maniere de le trouver sans calcul, par le moyen d'un globe (1801); nous allons indiquer une méthode trigonométrique, et une opération graphique pour y parvenir.

1912. On trouvera, dans les tables de la Hire, et dans celles de Cassini, des méthodes pour résoudre quelques uns de ces problêmes; la Caille a donné une méthode graphique pour tracer les lignes des phases. M. du Séjour a publié des formules analytiques pour tracer la ligne de l'ombre, ou de l'éclipse centrale, dans le recueil que j'ai cité (1189); enfin il a donné, dans les Mémoires de l'académie, et dans son livre, en 1786, une théorie plus générale, et une analyse plus complete de tous les cas de ce problême; mais cela ne m'empêchera pas de suivre, dans cette partie, l'application des méthodes que j'ai expliquées ci-dessus, et qui sont plus familieres aux astronomes, quant à présent.

1913. Pour trouver la position du lieu I qui le premier verra l'éclipse, soit le centre de la projection en C (FIG. 118), l'orbite de la Lune KMG; le milieu de l'éclipse en M; le commencement de l'éclipse générale au moment où la Lune est en K; le triangle MCK, que nous avons employé pour trouver la portion MK de l'orbite (1796), servira aussi pour avoir l'angle MCK, en disant CK : R :: CM : cos. MCK : la somme ou la différence de cet angle MCK, et de l'angle PCM, que forme le méridien universel CP avec la perpendiculaire à l'orbite, donnera l'angle PCK, ou PCI, dont la mesure est l'arc DI du cercle de projection. Si l'on conçoit sur le cercle ADE le globe même dont il est la projection, et sur le globe un triangle sphérique PDI, le côté PD est égal à la déclinaison du Soleil, c'est-à-dire, à l'élévation de l'axe de la Terre au-dessus du cercle terminateur, ou du cercle de projection (1816); le côté DI est l'arc déterminé sur le cercle de projection; l'angle D est droit, puisque le méridien universel CPD est perpendiculaire au cercle terminateur : on pourra donc résoudre le triangle IPD, en disant premièrement : le sinus de PD est au rayon, comme la tang. de DI est à celle de l'angle DPI (3890). 2°. Le rayon est au cosinus de la déclinaison du Soleil, ou de PD, comme le cosinus du côté DI est au cosinus de l'hypoténuse PI (3889) : c'est la distance du lieu I au pole P du monde, ou le complément de sa latitude, si PI est moindre que 90°; mais si le côté DI étoit plus grand que 90°, l'hypoténuse PI seroit aussi plus grande; la latitude seroit méridionale, et égale au complément de

l'arc trouvé dans les tables par le calcul trigonométrique, ou plus généralement de dénomination contraire à la déclinaison du Soleil. Je suppose que le pole P, élevé au-dessus du cercle de projection, est le pole boréal du monde, c'est-à-dire que la déclinaison du Soleil est boréale : mais si c'étoit le pole austral qui fût élevé au-dessus du plan de projection, il faudroit tirer le méridien ou cercle horaire PI du pole austral, qui est supposé en bas de la figure, ou, ce qui reviendroit au même, prendre l'angle DPI pour distance à midi, ou au méridien supérieur, et non pour la distance à minuit; car alors les regles et les méthodes que nous avons expliquées, et que nous expliquerons, subsisteroient sans la moindre différence.

1914. L'angle DPI, formé au pole du monde par le méridien PI du lieu cherché, et par la partie supérieure PD du méridien universel, servira à trouver l'angle horaire du lieu I, c'est-à-dire, sa distance au méridien universel, ou le chemin qu'il a fait, et l'arc qu'il a décrit depuis son passage par le méridien universel, en y ajoutant 180°; car, comme le point I s'avance d'occident en orient, ou de droite à gauche vers le méridien universel PC où il arrivera à midi, l'angle DPI est sa distance au point de minuit, et l'angle horaire, compté d'un midi à l'autre, est plus grand que 180° de la quantité DPI. Si le lieu dont il s'agit étoit à gauche ou à l'orient du méridien universel, comme le point F, l'angle horaire CPF, compté de midi, seroit le supplément de l'angle DPF, trouvé par le calcul précédent.

1915. L'angle horaire pour Paris, qui est déterminé par l'heure donnée (196), étant diminué de 20° qui est la longitude de Paris (49), on le retranchera de l'angle horaire trouvé pour le point I, et l'on aura la longitude géographique du lieu de la Terre qui y répond, comptée du premier méridien (1016).

Exemple. Dans l'éclipse de 1764, CK = 1° 24′ 47″ (1796), CM = 39′ 21″, on fera cette proportion : 1° 24′ 47″ : R : : 39′ 21″ : cos. 62° 20′ 47″; ce sera la valeur de l'angle MCK : on y ajoutera l'angle d'inclinaison LCM, 5° 43′ 6″ (1795), puisque le milieu M de l'éclipse est à l'occident de la conjonction L, et le point K à l'occident du point M; on y ajoutera encore l'angle de position LCP = 23° 0′ 12″ (1876), parceque le cercle de latitude est à l'occident du méridien vers le nord, ou le cercle de déclinaison à l'orient, dans les signes ascendans (1834); l'on aura 91° 4′ 5″ (dont le supplément est 88° 55′ 55″) pour l'angle PCI qui est égal à l'arc DI; cet arc DI étant obtus, nous apprend que l'hypoténuse PI, et l'angle DPI, le seront également (3866). Pour trouver l'angle P, nous supposerons que la

déclinaison du Soleil, ou l'arc PD, étoit de 4° 48′ 50″ vers le milieu de l'éclipse, comme M. du Séjour l'a employée, et nous ferons cette proportion : sin. 4° 48′ 50″ : R : : tang. 88° 55′ 55″ : tang. 89° 54′ 37″; il en faut aussi prendre le supplément, puisqu'on a employé celui de DI; ainsi l'angle P est de 90° 5′ 23″, et l'angle horaire du lieu I, 270° 5′ 23″.

Le commencement de l'éclipse générale en I a été trouvé 7h 37′ 44″ (1796), ou 19h 37′ 44″, en comptant d'un midi à l'autre, ce qui fait 294° 25′ pour l'angle horaire à Paris, dont ôtant 20°, on aura 274° 25′ pour l'angle horaire, sous le premier méridien; on le retranchera de l'angle horaire du lieu I, 270° 5′ 23″; en ajoutant 360° pour la soustraction, il restera 355° 40′ 23″ pour la longitude géographique du lieu cherché I (1016).

1916. On fera aussi cette proportion, R : cos. 4° 48′ 50″ : : cosinus 88° 55′ 55″ : cos. 88° 56′ 8″, dont le supplément, 91° 3′ 52″, est la distance du lieu I au pole boréal du monde : ainsi ce lieu est à 1° 4′ de latitude australe, et à 355° 40′ de longitude; c'est-à-dire qu'il est situé dans le milieu de la mer du nord, entre la côte de Guinée et la côte du Brésil. On trouveroit, par une opération semblable, le point V qui le premier verra l'éclipse centrale au lever du Soleil; sa longitude est à-peu-près de 332° 28′, et sa latitude 18° 49′ boréale. On verra ci-après le résultat du calcul de M. du Séjour (1947). Le procédé est encore le même pour trouver la position du point X et du point F, les derniers de la Terre qui verront l'éclipse.

1917. La trace de l'ombre de la Lune sur la surface de la Terre peut se marquer sur un globe, ou sur une carte de géographie, en déterminant de quart-d'heure en quart-d'heure la longitude et la latitude du lieu qui doit voir l'éclipse centrale, pendant l'espace de temps compris entre ceux où la Lune a été en V et en X. Commençons par le point M de la projection, et cherchons quel est le pays de la Terre qui, projeté au point M, aura l'éclipse centrale à l'heure même du milieu de l'éclipse générale (1794).

La ligne CM, considérée comme une ligne droite de la projection, représente un arc du cercle de la Terre dont elle est la projection, et qui est compris entre le point C qui répond perpendiculairement au Soleil, et le point de la Terre qui est projeté en M. Or on a vu que les arcs comptés du centre de la projection ont leurs sinus mêmes pour projection (1820) : ainsi, pour trouver l'arc de la Terre qui répond à CM, il suffit de savoir quels sont les degrés dont CM est le sinus; l'on fera donc cette proportion : le rayon de la projection, exprimé en secondes, est au sinus total, comme la

perpendiculaire CM est au sinus de l'arc de la Terre qui lui répond.

On considérera ensuite le triangle sphérique PCM, dont on connoît deux côtés, et l'angle compris; savoir, l'arc CM que nous venons de trouver, l'arc CP complément de la déclinaison du Soleil, ou sa distance au pole, et l'angle PCM, égal à celui que forme le méridien avec la perpendiculaire CM, ou l'équateur avec l'orbite relative de la Lune (1802); on cherchera le côté PM, et l'angle CPM, par les analogies suivantes, en abaissant une perpendiculaire MZ du point M sur le méridien PC (3915, 3918).

R : cos. PCM : : tang. CM : tang. CZ; ou a CP — CZ = PZ;
Cos. CZ : cos. PZ : : cos. CM : cos. PM.
Sin. PZ : sin. CZ : : tang. PCM : tang. CPM.

Au moyen de PM et de l'angle P on trouvera la longitude et la latitude du point M, par les considérations que nous avons employées ci-dessus pour trouver celles du point I (1915).

1918. Tous les autres pays de la Terre qui doivent avoir l'éclipse centrale, se trouveront par une semblable opération, ou pour un moment donné, ou pour une latitude donnée, ou enfin pour un angle horaire pris à volonté : mais il est plus commode de choisir un temps donné. Supposons, par exemple, qu'à une heure fixe, la Lune étant en O, on demande quel est le point O de la Terre où l'éclipse paroîtra centrale, c'est-à-dire, le pays qui est projeté au point O en même temps que la Lune s'y trouve; ce pays de la Terre, voyant tout-à-la-fois le Soleil et la Lune au point O de la projection, aura une éclipse centrale.

1919. Pour connoître le côté MO, on se servira du mouvement horaire de la Lune, en disant : une heure ou 60′ sont au mouvement horaire de la Lune sur son orbite relative, comme la différence entre le temps donné et celui du milieu M de l'éclipse générale est au mouvement MO. On cherchera l'angle MCO par cette proportion : la perpendiculaire CM est au côté MO, comme le rayon est à la tangente de l'angle MCO; cet angle, combiné avec l'angle PCM que le méridien fait avec la perpendiculaire, donnera l'angle PCO; on cherchera le côté CO, en disant : le sinus de l'angle MCO est à MO, comme le sinus total est à CO; ensuite, le rayon de la projection est au sinus total, comme la ligne CO est au sinus de l'arc de la Terre dont elle est la projection. Par ce moyen, l'on a, dans le triangle sphérique PCO, deux côtés PC, CO, et l'angle compris PCO; on trouvera, par les analogies rapportées ci-dessus (1917), le côté PO, et l'angle CPO, d'où l'on tirera la latitude et la longitude du point O (1915). Telle est la méthode de la Hire.

1920. Mais il vaut mieux, comme l'observe M. de Lambre, tirer sur le globe un arc HO qui sera égal à HV, ou HX, ou à l'angle MCV (1797). Alors on trouvera l'angle sphérique OHX, en disant : MX : MO : : R : cos. OHX; car, en considérant le petit cercle du globe dont H est le pole, et dont XV est la projection, on verra que MX en est le rayon, et MO le sinus d'un arc du petit cercle; la mesure de cet arc est l'angle sphérique MHO, complément de l'angle OHX. Dans le triangle PDH, dont on connoît PD et DH, on cherchera les angles P et H, et l'hypoténuse PH. Connoissant les angles OHX et PHD, l'on aura PHO; on a aussi PH et HO = HX; on en conclura PO, distance au pole pour le lieu cherché, et l'angle HPO qui, combiné avec DPH, donnera l'angle horaire DPO, et par conséquent la longitude du point O. Les deux côtés PH et HO sont constans pour toute l'éclipse, et le triangle PHO est propre à la solution du problême, dans les trois cas différens de ce problême, c'est-à-dire qu'on peut à volonté chercher le lieu O pour une heure donnée à Paris, ou pour une latitude prise à volonté, ou pour l'heure du lieu O (1923).

1921. Exemple. Le 1er avril 1764, le milieu de l'éclipse générale étant supposé 10h 22′ 41″, au méridien de Paris (a), on demande quel pays de la Terre aura l'éclipse centrale à 10h 42′ 30″, c'est-à-dire, 19′ 49″ après le milieu. Je suppose encore la déclinaison du Soleil 4° 48′ 50″ (1915), DH, ou PCM = 28° 44′ 26″, inclinaison de l'orbite sur l'équateur; dans le triangle PDH, on dira : R : cos. PD : : cos. DH : cos. PH, 29° 6′ 25″; ensuite sin. DH : R : : tang. DP : tang. DHP, 9° 56′ 3″; enfin DP : R : : tang. DH : tang. DPH, 81° 17′ 59″.

Pour avoir HX, on dira : CA : CM : : R : cos. HX = 43° 8′ 33″. La demi-durée de l'éclipse centrale, 1h 21′ 5″ : 19′ 49″ : : R : cos. OHX, 75° 51′; ôtant DHP, reste 65° 55′ pour l'angle PHO. Pour trouver la latitude par le triangle PHO, on dira : R : cos. PHO : : tang. HO : tang. segment Hz, 20° 55′, ce qui donne Pz 8° 11′. Ensuite cos. Hz : cos. Pz : : cos. HO : sin. latit. 50° 39′; enfin sin. Pz : sin. Hz : : tang. PHO : tang. HPO, 79° 54′. Ajoutant DPH, 81° 18′ 0″, on aura l'angle horaire DPO, compté depuis minuit, 161° 12′. En comptant de même celui de Paris, on a 160° 37′; il reste 0° 35′ dont ce lieu est à l'orient de Paris; ainsi sa longitude est 20° 35′. Ce lieu est à l'orient de Calais. On verra ci-après (1969) la table

(a) On trouve à la vérité 10h 22′ 29″ (art. 1795) par des calculs plus exacts, et la demi-durée un peu plus grande : mais il eût été inutile de refaire tous les exemples pour une différence de quelques secondes.

de tous les pays qui avoient l'éclipse centrale en 1764, depuis V jusqu'en X.

1922. Cette méthode donne, par un calcul très simple, le *maximum* de latitude; car si l'on prolonge HP en N, jusqu'à la rencontre de l'orbite (ou en général d'une ligne de phases), PN sera la plus petite distance au pole de tous les pays qui verront cette phase. Pour trouver le lieu N, on a HN = HX = 43° 8′ 33″; on en ôte PH, 29° 6′ 25″, reste 14° 2′ 8″; ainsi la latitude du lieu N est 75° 57′ 52″. Pour la longitude on a MN = MX cos. NHX. = MX cos. PHD (1920), ou en temps, 1ʰ 19′ 52″; le milieu de l'éclipse en M est 10ʰ 22′ 41″; ainsi la Lune est en N à 11ʰ 42′ 33″, l'angle horaire pour Paris est 4° 21′ 45″, celui du lieu N est NPC = DPH 81° 17′ 59″; la somme est 85° 39′ 44″ à l'orient, à Paris, ce qui donne la longitude du lieu N, 105° 39′ 44″.

1923. Au lieu de supposer un moment donné, si l'on vouloit chercher le lieu qui aura l'éclipse centrale, pour une latitude déterminée, on auroit dans le triangle PHO les trois côtés : on chercheroit les angles PHO, et OPH, et l'on auroit DHO, ou XHO; alors MO = MX cos. DHO donneroit l'heure de Paris, et par conséquent la longitude. Si la donnée est l'angle horaire du lieu, on aura l'angle HPO; connoissant deux côtés PH et HO, avec un angle opposé, on cherchera PO, complément de la latitude, et l'angle PHO: ajoutant DHP, on aura DHO; et parceque MO est égal à la demi-durée multipliée par le cosinus de cet angle, on aura l'heure de Paris, et par conséquent la longitude.

1924. On peut trouver de même une suite de pays qui auront l'éclipse d'un doigt, ou de telle autre grandeur qu'on voudra : voici d'abord le procédé graphique indiqué par La Caille (*Leçons d'astron. art.* 1169). Du point M (FIG. 120), où est le milieu de l'éclipse, on prend MA égale à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune; on tire par ce point A la ligne BAE parallele à l'orbite de la Lune; elle marque sur la projection une suite de points qui auront successivement un simple contact de la Lune et du Soleil, au nord du Soleil, sans aucune éclipse (1788). Du point A l'on prendra AQ d'un quart du diametre du Soleil, ou de trois doigts, et la ligne OQR marquera des pays où l'on doit voir le Soleil éclipsé de trois doigts; on prendra AS égale au diametre du Soleil, et la ligne SY marquera une suite de points où l'on verra la Lune entiere sur le Soleil, touchant le bord méridional du Soleil, puisque A est le lieu où le bord boréal du Soleil paroît touché par celui de la Lune, et qu'en avançant de tout le diametre du Soleil, ce sera son autre

bord qui sera touché par le même bord austral de la Lune. Ainsi le petit intervalle MS est la demi-largeur de l'espace où l'on voit une éclipse annulaire, quand le diametre de la Lune est plus petit que celui du Soleil, et une éclipse totale, si le diametre de la Lune est plus grand, c'est-à-dire, si le point S tombe au-dessous du point M.

1925. On peut trouver la longitude et la latitude d'un point R de la Terre qui voit l'éclipse de trois doigts, et d'un point Z qui voit les deux bords se toucher inférieurement, en employant la méthode pour laquelle nous avons déterminé sur l'orbite celui qui voyoit l'éclipse centrale (1918) : la seule différence consiste à employer CQ au lieu de CM; la ligne QR est égale à la portion MH de l'orbite lunaire qui serviroit à trouver un lieu de la Terre, comme H, qui voit l'éclipse centrale au même instant. Mais, dans cette méthode, on suppose que HR soit la plus courte distance de la Lune H à un point R de la projection, quoiqu'en décrivant son parallele ou son ellipse, le point R puisse s'en approcher davantage, et que la ligne HR puisse différer de plusieurs degrés de la ligne de la plus courte distance. Je corrigerai cette méthode (1939), et M. du Séjour s'en est occupé, en résolvant le problême d'une maniere plus rigoureuse (*Mém. de l'acad.* 1765, *pag.* 306; 1767, *pag.* 156).

1926. Au reste, La Caille ne s'est servi de ces principes que pour exécuter sur une carte géographique, ainsi que dans notre planche XIV, le type général d'une éclipse, qu'on fait graver dans les éphémérides, toutes les fois qu'il y a une éclipse de Soleil visible à Paris. Ces principes suffisent même pour former une carte semblable à celle que *madame le Paute* donna pour l'éclipse du 1 avril 1764 [a]; et M. d'Agelet pour celle de 1778. Il n'est question dans les cartes que de donner aux astronomes un avertissement général, sauf à faire des calculs plus rigoureux pour les endroits où l'on se propose d'observer. On voit sur la carte de 1764 la trace de l'ombre, qui formoit sur la Terre une courbe ovale, et qui parcouroit environ 12 lieues par minute: cette vîtesse est double de celle d'un boulet de canon, qui est d'environ 200 toises par seconde, ou 5 lieues par minute (*Journal des Savans*, avril 1769). Mais quoique les principes que je viens d'exposer suffisent pour ces cas-là, cette branche du calcul des éclipses étant par elle-même curieuse et intéressante, je vais donner quelques détails de plus à ce sujet, et y appliquer la méthode des projections, soit par une opération graphique, soit par le calcul trigonométrique; je finirai par des tables détaillées qui ont servi à

(a) A Paris, chez Lattré, graveur, rue S. Jacques.

construire

construire la carte des phases de l'éclipse tracée avec soin dans la planche XIV.

1927. Pour trouver graphiquement les phases de l'éclipse, en divers pays de la Terre, avec plus de précision que par le globe, il faut tracer une projection ortographique des méridiens et des paralleles, telle qu'on la voit dans la planche XIII (FIG. 122); C est le centre, et CA le rayon de la projection, égal à 54′ 0″ dans notre exemple; P est la projection du pole, dont la distance CP=54′ cos. déclin. =53′ 49″ (1818): les ellipses, qui représentent les paralleles de 10°, 20°, de latitude, y sont tracées, suivant la méthode de l'article 1829; chacune a son demi-grand axe égal au cosinus de sa latitude (1816), et le demi-petit axe égal au cos. de la latitude, multiplié par le rayon de projection, et par le sinus de la déclinaison du Soleil (1815); les voici pour 1764, de 10° en 10°, en commençant par l'équateur, 4′ 32″, 4′ 28″, 4′ 16″, 3′ 55″, 3′ 28″, 2′ 55″, 2′ 16″, 1′ 33″, 0′ 47″.

1928. La distance du centre C de la projection au centre de chaque ellipse est égale au produit de 54′ par le sinus de la latitude et le cosinus de la déclinaison (1819); ces distances prises aussi de 10 en 10°, sont de 9′ 21″, 18′ 24″, 26′ 54″, 34′ 35″, 41′ 13″, 46′ 36″, 50′ 34″, 53′ 0″. Chacune des abscisses, prise sur le grand axe, est égale au demi-axe multiplié par le sinus de l'angle horaire, et chaque ordonnée (1830) égale au demi-petit axe multiplié par le cosinus de l'angle horaire, comme dans la table suivante; par ce moyen, il est aisé de tracer exactement chacune de ces ellipses, en supposant qu'on ne veuille pas se servir de l'opération indiquée (1831), ou du compas de proportion, ou du compas elliptique, dont l'usage est peu commode.

1929. Toutes les ellipses des paralleles terrestres, étant ainsi tracées, se trouvent divisées en heures, et il est aisé d'en tracer le contour; elles touchent la circonférence ABTR du cercle de projection en deux points, l'un à l'orient, l'autre à l'occident : ces points séparent l'ellipse en deux parties, dont l'une est l'arc diurne, et l'autre l'arc nocturne; si l'on veut savoir, par le calcul, à quel endroit de chaque ellipse est le point de contact du cercle de projection, il ne faut que trouver les arcs sémi-diurnes pour chaque latitude. Le cosinus de l'arc sémi-diurne est égal à la tangente de la latitude, multipliée par la tangente de la déclinaison, quand on néglige la réfraction (1028). Ces arcs sémi-diurnes en degrés, depuis l'équateur jusqu'à 80° de latitude, sont, dans notre exemple, de 90°, 90° 51′, 91° 45′; 92° 47′, 94° 3′, 95° 46′, 98° 23′, 103° 23′, 118° 32′;

si on les convertit en temps, on aura l'heure et la minute qui doit se trouver sur l'ellipse dans le point de contact.

Table des abscisses et des ordonnées des ellipses qui représentent les paralleles terrestres dans l'éclipse de 1764, en supposant le rayon de projection de 54′ 0″, et la déclinaison, 4° 48′ 50″.

Latitudes	Midi.		I heure.		II heures		III heures.		IV heures.		V heures.	
	Ab.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.
0°	0	4′ 32″	13′ 59″	4′ 21″	27′ 0″	3′ 54″	38′ 11″	3′ 11″	46′ 46″	2′ 15″	52′ 10″	1′ 10″
10	0	4 28	13 46	4 19	26 35	3 52	37 36	3 9	46 3	2 14	51 22	1 9
20	0	4 16	13 8	4 7	25 22	3 41	35 53	3 1	43 57	2 8	49 1	1 6
30	0	3 55	12 6	3 47	23 23	3 24	33 4	2 46	40 30	1 58	45 10	1 1
40	0	3 28	10 42	3 21	20 41	3 0	29 15	2 27	35 50	1 44	39 57	0 54
50	0	2 55	8 59	2 49	17 21	2 31	24 33	2 4	30 4	1 27	33 32	0 45
60	0	2 16	6 59	2 11	13 30	1 58	19 6	1 36	23 23	1 8	26 5	0 35
70	0	1 33	4 47	1 30	9 14	1 21	13 4	1 6	16 0	0 46	17 50	0 24
80	0	0 47	2 26	0 46	4 41	0 41	6 38	0 33	8 7	0 24	9 3	0 12

1930. On peut chercher aussi par le calcul à quels points du cercle de projection doivent passer les différens paralleles; on considérera le parallele BCK (FIG. 111), KT le sinus de la distance du centre T, ou du point par où passe l'équateur, au point K par où l'astre doit passer pour paroître sur le cercle terminateur; or sin. TKC : TC : : R : TK, c'est-à-dire que le cosinus de la déclinaison est au sinus de la latitude, comme le rayon est au sinus de la distance entre l'équateur et le point de section du cercle de projection, et du parallele terrestre dont le rayon est BC.

On peut aussi, dans la *figure* 122, imaginer un arc mené du pole au point cherché N; et, dans le triangle sphérique PRN, on aura cos. PR : R : : cos. PN : cos. RN, ce qui revient au même.

1931. Dans l'éclipse de 1764, la déclinaison du Soleil étant de 4° 49′, on trouve par l'analogie précédente que le parallele de 10° touchoit le cercle de projection à 10° 2′ de l'équateur, les suivans à 20° 4′, 30° 7′, 40° 10′, 50° 15′, 60° 21′, 70° 34′, et 81° 13′; le parallele de 85° 11′, c'est celui qui touche le cercle de projection en R ou à 90°, c'est-à-dire, au sommet du méridien universel de la figure, puisque la déclinaison est supposée de 4° 49′. Les paralleles qui sont plus éloignés de l'équateur que le complément de la déclinaison, ne touchent point le cercle de projection; mais leurs ellipses en sont

éloignées au sommet, ou dans leur plus proche distance, d'une quantité RI (FIG. 111), égale au sinus verse de l'arc FI, qui est la déclinaison du Soleil plus la distance du parallele au pole du monde.

On auroit pu décrire encore sur la *figure* 122 les paralleles de 10° et de 20°, au midi de l'équateur; mais cela auroit rendu la figure trop grande pour ce volume.

1932. Par les points de division de chaque ellipse, on a tiré d'autres ellipses qui se coupent toutes au pole P (FIG. 122); car les cercles horaires, dans cette projection ortographique, sont aussi des ellipses (1814) : mais comme ce sont de grands cercles, ces ellipses ont toutes pour centre le centre C de la projection, et pour grands axes des lignes égales au diametre de la projection, et qui aboutissent dans les différens points où ces ellipses touchent la circonférence de la projection au-delà de P. Le petit axe de chacune de ces ellipses est le produit du grand axe par le sinus de l'angle d'inclinaison, c'est-à-dire, de l'angle que fait le cercle horaire lui-même avec la ligne des centres (1815), ou la ligne menée de la Terre au Soleil.

1933. Si, pour décrire ces ellipses avec précision, l'on veut savoir quel angle forment les axes avec le méridien universel CP, ou à quel point du cercle de projection passe chaque cercle horaire, et quelles sont les valeurs des petits axes, on imaginera un triangle sphérique rectangle PCS, sur le globe que représente la projection, formé, par exemple, par le cercle de trois heures PS, et le méridien PC, avec un arc CS abaissé perpendiculairement du Soleil sur le cercle horaire CS; l'angle au Soleil PCS, formé par le méridien universel PC et par la perpendiculaire CS, se trouvera en disant : le rayon est au cosinus de la distance du Soleil au pole, comme la tangente de 45° est à la cotangente de l'angle cherché (3897), qui est celui du petit axe avec le méridien universel : ainsi, en multipliant la tangente de l'angle horaire P par le sinus de la déclinaison, l'on aura la tangente de l'angle que forme le grand axe de chaque ellipse avec le méridien CPR. Ces angles sont pour 1^h, 2^h, 3^h, 4^h, 5^h, de 1° 17′, 2° 47′, 4° 49′, 8° 16′, et 17° 24′. En prenant ces quantités-là sur la circonférence, à droite et à gauche du sommet R de la projection, on pourra tirer le grand axe de chaque ellipse, pour la décrire avec plus de facilité.

1934. On peut encore considérer le triangle sphérique PQR; dans lequel l'angle P est l'angle horaire, et PR la déclinaison; QR est l'angle du grand axe de ce méridien avec le méridien universel : ce triangle donne la même proportion.

1935. Quant à l'inclinaison du rayon solaire, ou de la ligne des

centres du Soleil et de la Terre, sur le plan du cercle horaire, elle est égale à l'arc perpendiculaire CS, abaissé du Soleil sur ce cercle; on la trouve par le même triangle sphérique PCS, en disant (3898): le rayon est au sinus de la distance du Soleil au pole, comme le sin. de l'angle horaire est au sinus du côté, qui est égal à l'inclinaison sur le plan de projection; le triangle PRQ donne aussi l'angle Q qui exprime la même inclinaison. Le sinus, multiplié par le rayon de projection, donne le demi-petit axe de l'ellipse du cercle horaire. Ces demi-axes, dans notre exemple, sont de 13′ 56″, 26′ 54″, 38′ 3″, 46′ 36″, et 51′ 59″.

1936. Ayant décrit les paralleles et les méridiens sur la projection, on tirera le cercle de latitude CT, formant avec le méridien CPR l'angle de position RCT (1833); il est dans cette éclipse de 23° 0′: on prendra CL égale à la latitude de la Lune 39′ 38″, on tirera l'orbite LF, faisant un angle de 84° 17′ avec le cercle de latitude (1745, 1795, 1839). Au point L de la conjonction, on marquera 10ʰ 31′ 18″, qui est le temps de la conjonction calculée; on prendra sur l'orbite le mouvement horaire relatif, 27′ 21″, par le moyen duquel on divisera l'orbite en heures et en minutes, avant et après la conjonction, depuis 7ʰ 38′, jusqu'à 13ʰ 7′, c'est-à-dire, pendant toute la durée de l'éclipse (1796).

1937. La ligne DEG (FIG. 122), parallele à l'orbite, et qui en est éloignée de la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, marque sur la Terre une suite de points qui verront les deux bords se toucher (1788, 1924), comme l'orbite elle-même y marque une suite de points qui voient les centres coïncider : mais il n'est pas exactement vrai que le point E de la Terre, qui voit le contact des bords lorsque la Lune est sur la ligne BE perpendiculaire à l'orbite, ne les a pas vus plus près, ou qu'il ne verra pas ensuite la Lune entamer le bord du Soleil : enfin il n'est pas vrai que la distance BE doive être la plus courte distance ou la plus grande phase, puisque cette plus courte distance arrive ordinairement sur une ligne inclinée à la perpendiculaire; c'est ce que la Caille avoit négligé à l'art. 1172, où il n'avoit pour objet que de dresser en général une figure approchée des phases de l'éclipse.

1938. Le problême des plus grandes phases données, considéré généralement, seroit impraticable, même par les méthodes directes; mais M. du Séjour, pour simplifier l'équation, a pris pour donnée l'angle que forme la ligne de la plus grande phase avec la perpendiculaire BE sur l'orbite; cet angle, étant supposé d'une certaine quantité, détermine la latitude, l'heure, et la quantité de la plus

grande phase, par le moyen d'une équation; elle a servi à construire la table de la limite de l'éclipse qui se trouvera ci-après (art. 1969). M. du Séjour trouve qu'il y auroit une erreur de 3° 33′ ½ sur la longitude, et de 0h 35′ 49″ sur l'heure du contact, pour la latitude de 16° 57′, si l'on supposoit que la plus grande phase arrive sur la perpendiculaire à l'orbite relative (*Mém.* 1765, *pag.* 306).

1939. Pour trouver, par la méthode graphique, cette ligne de la plus grande phase sous une latitude donnée, je vais employer d'abord un procédé semblable à celui de l'article 1844. Il faut trouver deux heures, l'une sur le parallele, et l'autre sur l'orbite, qui soient éloignées de la somme des demi-diametres, et en même temps plus près que les autres points semblables qui précedent et qui suivent; ces heures ne seront pas des heures pareilles, parceque le lieu cherché ne sera pas sous le méridien de Paris : mais la différence des heures, prises sur l'orbite et sur le parallele terrestre, sera la différence des méridiens.

Par exemple, en mettant une pointe du compas sous l'équateur, à 9h 45′ du matin, avec une ouverture égale à la somme des demi-diametres, elle tombe à 8h 55′ de l'orbite, qui est divisée suivant les heures de Paris. En portant le compas de 9h 50′ à 9h 0′ de l'orbite, la distance est sensiblement la même, ainsi que la différence des heures de l'équateur et de l'orbite; en sorte que 9h 47′ ou 48′, pour ce pays de l'équateur, est véritablement le temps de la plus courte distance, et de la plus grande phase, réduite à un simple contact, pour un pays situé sous l'équateur, qui compte 50′ de plus que nous, ou qui est plus oriental que Paris de 0h 50′, c'est-à-dire de 12° ½, et qui a par conséquent 32° ½ de longitude.

1940. Si je fais la même opération sous le parallele de 30°, je vois, en essayant différentes heures sur le parallele, que, si je mets les pointes de compas à 1h 49′ du soir sur ce parallele, et à 4h 28′ sur l'orbite, la distance sera égale à la somme des demi-diametres, et que ce sera la plus courte qui ait lieu avant et après; en sorte que le contact y arrivera, comme plus grande phase, à 1h 49′ : or ce pays compte 2h 39′ de moins que Paris, il est donc de 39° ¾ plus oriental; ainsi il a 59° ¾ de longitude. On trouveroit de même la suite de tous les points qui sont dans la table de la limite de l'éclipse (1969).

1941. Si l'on tire une ligne parallele à l'orbite, qui soit au-dessus de la ligne du contact GED, de la douzieme partie du diametre du Soleil, elle marquera de même une suite de points qui doivent avoir l'éclipse d'un doigt. Mais pour avoir des points où ce soit la plus grande phase, et afin de trouver le milieu de l'éclipse pour chaque

point, il faut faire le même tâtonnement que pour le contact, en portant sur divers paralleles, et sur l'orbite, une ouverture de compas égale à la somme des demi-diametres, moins la douzieme partie du diametre du Soleil, et ainsi des autres phases.

1942. Pour appliquer le calcul à ces opérations graphiques, il faudroit chercher la distance apparente des centres pour chaque lieu trouvé, par les méthodes ordinaires (1860, 1866 ou 1875), et recommencer ce calcul pour deux ou trois instans, à chaque latitude, afin de reconnoître si l'on a trouvé exactement l'heure de la plus grande phase donnée, par exemple, l'heure où l'on y a observé le milieu de l'éclipse, et sa grandeur d'un doigt.

Faisant le même calcul pour différentes latitudes, on aura une suite de points où doit paroître le contact des deux bords, et l'on en tracera la courbe sur une carte, comme celle de la planche XIV. Ce calcul seroit long, mais on ne le fait que pour un petit nombre de points. D'ailleurs, on ne cherche communément ces lignes que par pure curiosité, pour avertir, dans les éphémérides, les habitans des pays où l'on peut espérer de voir une éclipse : cela ne vaut guere la peine de chercher une exactitude plus grande que celle des lignes droites paralleles à l'orbite, ou des opérations graphiques dont je viens d'indiquer la méthode. Mais, dans le cas où l'on voudroit même calculer ces distances exactement, je crois que la méthode indirecte que j'ai proposée au commencement de cet article, seroit encore plus courte que les méthodes analytiques.

1943. Il en est à-peu-près de même, quand on cherche le point de la Terre qui doit voir le contact des deux bords au lever du Soleil. Comme plus grande phase, ce contact est tout-à-la-fois le commencement, le milieu, et la fin de l'éclipse au lever du Soleil, qui arrivent en un seul instant. Le point G (FIG. 122), où le cercle de projection est coupé par la ligne DG du contact, est bien un point où l'on voit le commencement de l'éclipse au lever du Soleil, mais il n'est pas exactement vrai que ce contact y soit la plus grande phase. Ce point n'est pas non plus le plus méridional de tous les lieux de la Terre où l'on voit l'éclipse : il est nécessaire d'y appliquer les mêmes opérations que pour les autres points des lignes de limites. M. du Séjour trouve, par un calcul rigoureux, qu'à 19° 36′ 33″ de latitude australe, le contact étoit la plus grande phase, et arrivoit au lever du Soleil, à 6h 6′ 48″, sous une longitude de 346° 3′ 49″.

1944. Quant au point le plus méridional de tous ceux qui ont vu l'éclipse, on trouve qu'à 20° 5′ 47″ de latitude, le contact est arrivé à 5h 25′ du matin, dans un lieu plus occidental que Paris de 3h 2′ ou

45° ½, c'est-à-dire, qui est à 334° ½ de longitude. C'est aux environs du point marqué B dans la carte (FIG. 123). On verra la différence qu'il y a entre ce point de la ligne de limite, et le point dont la projection est en G (FIG. 122), en calculant la longitude et la latitude de celui-ci. Si CM est de 39′ 21″ (1915), MD = 30′ 47″, CD = 8′ 34″, CG = 54′ 0″, on aura l'angle DCG = 80° 52′ 19″; ôtant l'angle DCA = 62° 20′ 47″ (1915), on a l'arc AB = 18° 31′ 32″. Connoissant l'arc AB, on a la latitude du parallele qui passe au point A du cercle de projection; car sin. latit. = sin. AG cos. déclin. (1913, 1930); cette latitude est de 18° 27′ 28″. Pour trouver la longitude de ce point-là, on cherchera l'angle au pole, ou l'arc sémi-diurne, dont le cosinus = tang. déclin. tang. latit. = 88° 23′ 21″ (1028, 1929): on cherchera aussi DG = M*g*, qui, réduit en temps de l'orbite, donnera 1ʰ 56′ 57″; ainsi la Lune étoit en *g*, et le Soleil paroissoit en A, à 8ʰ 25′ 32″; l'angle horaire pour Paris étoit donc 53° 37′; celui du lieu A le surpasse de 34° 46′; et puisque ce sont des angles du matin, le point A est plus occidental que Paris, et sa longitude est 345° 14′. On trouve 346° 4′, en calculant rigoureusement le point qui doit voir le contact pour plus grande phase, et au lever du Soleil; c'est le point B sur la carte.

1945. Le point de la plus petite phase est un autre cas assez simple du problême des phases: il s'agit de trouver la moindre quantité de doigts éclipsés au milieu de l'éclipse du côté du nord. Nous avons vu qu'au midi il y a une suite de points où se voit le contact du bord austral de la Lune avec le bord boréal du Soleil; mais l'attouchement du bord boréal de la Lune n'avoit point lieu en 1764; la plus proche distance des centres n'a pu être plus grande, pour les pays septentrionaux, que la ligne MH (FIG. 118), différence entre le rayon de la projection et la plus courte distance. Le pays dont le parallele touche le cercle de projection en H, et qui voit le milieu de l'éclipse au lever du Soleil, la Lune étant en M, voit aussi exactement la plus petite distance possible pour ce point-là. En effet son mouvement est parallele à l'orbite de la Lune; car le parallele, touchant le cercle de projection en H, se confond avec lui; il est donc perpendiculaire au rayon HC, et parallele à l'orbite LM; le point H voit donc la moindre éclipse, ou la plus petite éclipse qu'il soit possible de voir, du côté du nord, sur la surface de la Terre. Pour trouver la position géographique du point H, je considere l'angle PCM = 28° 43′ (1915), dont le complément est HE = 61° 17′. Or, par la trigonométrie (3886) on a R : cos. PD :: cos. DH : cos. PH; donc le sinus de l'arc HE, multiplié par le cosinus de la décli-

naison, donne le sinus de la latitude (1930) pour le point de la Terre dont le parallele touche en H le cercle de projection, et il se trouve de 60° 54′. L'angle DPH est 81° 18′ : on peut l'avoir par le moyen de l'arc sémi-diurne sous cette latitude, qui est 98° 42′. La Lune étant en M à 10ʰ 22′ 29″, l'angle horaire pour Paris, ou son supplément (1914), n'est que de 24° 23′; ainsi le lieu cherché est de 74° 19′ à l'occident de Paris, c'est-à-dire, à 305° 41′ de longitude : c'est le point boréal de la Terre qui voit la plus petite phase possible; la plus grande distance des centres y est de 14′ 39″, ou de 5 doigts et demi, c'est-à-dire, égale à MH, au lever du Soleil. C'est donc sous le parallele de 60° 54′, à l'endroit marqué A dans la carte de l'éclipse de 1764, planche XIV, que doivent se terminer toutes les lignes des phases du côté du nord, qui ne diminuent pas au-delà de 5 doigts et demi. Ce pays est dans la terre de Labrador, à l'orient de la baie d'Hudson. Nous avons vu ci-devant le pays le plus septentrional qui pût voir l'éclipse (1922).

1946. Après avoir indiqué la maniere de tracer la ligne des phases sur la Terre par longitudes et latitudes, nous allons parler des *courbes d'illumination* qui terminent les pays où peut s'observer une éclipse. La courbe du milieu de l'éclipse, au lever et au coucher du Soleil, est BCAHDM (PLANC. XIV). La ligne qui va de B en H, et qui est marquée *milieu de l'éclipse, au lever du Soleil,* n'est pas la suite des points qui se levent, ou qui voient le Soleil quand la Lune est au milieu de son orbite, ou dans le moment du milieu de l'éclipse générale: c'est la suite des points qui voient se lever le Soleil, au moment de la plus grande phase qu'ils aient à voir; c'est pourquoi toutes les courbes des phases de trois doigts, de six doigts, etc. se terminent sur cette ligne BCADM, où elles marquent les points de la Terre qui voient la plus grande phase de trois doigts au lever du Soleil, de six doigts au lever, etc.

1947. TROUVER *les lieux où le milieu de l'éclipse arrive, au lever et au coucher du Soleil.* Le point 9ˢ 1′ 23″ de l'orbite lunaire (1797) coupe le cercle de projection sur la droite en B (FIG. 122), vers l'endroit où ce cercle est touché par l'ellipse du parallele de 18° 5′ de latitude; or le Soleil, ayant 4° 48′ 50″ de déclinaison, se leve à 5ʰ 53′ 45″ sous cette latitude, son arc sémi-diurne étant de 6ʰ 6′ 15″ : ainsi le point qui se trouvera sur le bord du cercle, à 9ʰ 1′ 23″ de Paris, comptera 5ʰ 53′ 45″; la différence est 3ʰ 7′ 38″ dont il comptera moins que Paris, ou dont il sera plus occidental que Paris, ce qui vaut 46° 54′; donc sa longitude sera 333°, 6′, comptée du premier méridien ; c'est à-peu-près le résultat du calcul de M. du Séjour (*Mém,*

(*Mém. acad.* 1766, *pag.* 258). Ce point est entre les isles du Cap-Verd et celles de l'Amérique, et c'est là le premier endroit de la Terre où l'on a commencé de voir l'éclipse centrale au lever du Soleil; il est marqué C dans la carte.

1948. On observera que le point d'intersection B (FIG. 122) de l'orbite, avec le cercle de projection, n'est pas à 18° de l'équateur ou du point A, mais qu'il est le point où le parallele de 18° coupe le plan de projection; ce point B est celui où l'arc diurne est séparé de l'arc nocturne par le plan de projection, ou le plan d'illumination, perpendiculaire au rayon du Soleil. Les divisions, marquées 10°, 20°, etc. sur le cercle ABNTR, ne sont pas des arcs de 10°, et de 20° pris sur ce cercle, mais les points où il rencontre les paralleles qui sont à 10° et à 20° de l'équateur; aussi le sommet R de ce cercle, au lieu d'être marqué de 90°, répond à 85° 11', complément de la déclinaison du Soleil, parcequ'il est touché par le parallele de 85° 11', qui est tout entier au-dessus du cercle d'illumination, et du cercle de projection; mais on n'a pu le représenter dans la figure, à cause de son extrême petitesse.

1949. Du côté de l'orient, l'orbite doit couper le cercle de projection, à 11h 43' 35" (1796), à l'endroit où il est touché par le parallele de 75° 7' 22" de latitude; il est aisé d'en conclure la longitude de ce point, ou du pays qui, le dernier de tous, a vu l'éclipse centrale, ou qui l'a vue au coucher du Soleil. Cette longitude est de 132° 25'; ce point est situé au nord de la Chine, et il est marqué D dans la carte de l'éclipse, (planche XIV, FIG. 123).

Il faut faire un semblable calcul pour avoir les pays qui voient la plus grande phase de trois doigts, de six doigts, etc. au lever du Soleil. Si l'on se contente de l'opération graphique, l'on choisit un parallele quelconque, et pour chaque ligne des phases, par exemple, celle qui est éloignée de l'orbite de la somme des demi-diametres, moins trois doigts, on trouve, comme dans les articles 1939, 1942, un point de l'orbite, et un point de l'ellipse, éloignés de la quantité qu'exige cette phase, et tels que, pendant quelques minutes, la Lune soit à la même distance du parallele terrestre, considéré vers l'endroit où il touche le cercle de projection, et où par conséquent arrive le lever ou le coucher du Soleil. On trouvera ci-après la table de tous les pays qui doivent avoir le milieu de l'éclipse au lever ou au coucher du Soleil; M. du Séjour a traité cette matiere analytiquement dans les *Mémoires de* 1765 (*pag.* 322); 1766, (*pag.* 187), et dans son *Traité analytique* (pag. 170).

1950. On voit aussi sur la carte la courbe de tous les pays où l'é-

clipse commence et finit, soit au lever, soit au coucher du Soleil, sous la forme d'un huit de chiffre, dont le nœud est près du pole; la courbe s'étend depuis la Tartarie jusqu'au Bresil.

Pour tracer cette courbe, on cherche successivement les points où elle coupe les divers paralleles de la Terre : on choisit un parallele quelconque, par exemple, l'équateur qui passe au point A du cercle de projection (FIG. 122); on prend une ouverture de compas égale à la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune; et mettant l'une des pointes en A, on fait avec l'autre une intersection sur l'orbite de la Lune, qui tombe en Z, à $7^h\ 37'\frac{1}{2}$. L'arc sémi-diurne est de $6^h\ 0'$; car on néglige ici l'effet des réfractions : ainsi le point A de la Terre compte $6^h\ 0'$ du matin, tandis qu'il est $7^h\ 37'\frac{1}{2}$ à Paris; donc ce lieu est à $1^h\ 37'\frac{1}{2}$ à l'occident de Paris, c'est-à-dire que sa longitude est de $355°\ 37'\frac{1}{2}$. Cette opération est exacte, et n'exige point de tâtonnement : il est sûr que ce point A verra les deux bords du Soleil et de la Lune se toucher au lever du Soleil; il pourra voir ensuite une plus grande éclipse, mais cela n'intéresse pas la question présente. Si l'on fait l'intersection à gauche, avec la même ouverture de compas, pour avoir la fin au lever du Soleil, on tombera sur $9^h\ 39'\frac{1}{3}$; c'est l'heure qu'il étoit à Paris lorsque la Lune étoit dans ce point de son orbite : mais il étoit $6^h\ 0'$ du matin pour le point de l'équateur qui se levoit en A; donc ce point est à $3^h\ 39'\frac{1}{3}$ à l'occident de Paris, où à 325° 10' de longitude, peu éloigné de Cayenne. M. du Séjour trouve 325° 14' de longitude.

1951. On pourroit trouver aussi, par le calcul trigonométrique, la position de ces points. Par exemple, pour un point Q (FIG. 118), dont la latitude est donnée, on trouvera deux points m et n, qui serviront à connoître les longitudes de deux pays, dont l'un verra le commencement et l'autre la fin de l'éclipse au lever du Soleil. En effet, dans le triangle sphérique DPQ, on cherchera l'angle horaire P, et l'arc DQ; ainsi l'on aura QH, et par conséquent son sinus Qx, et son cosinus Cx, ce qui donne Qq; et cette valeur, jointe à celle de Qn, fera trouver nq, et par conséquent mn; ce qui donnera l'heure de Paris, et par conséquent la longitude du lieu.

1952. On cherchera ainsi sous différens paralleles, à l'occident de la projection, la longitude des différens lieux qui voient le commencement et la fin de l'éclipse au lever du Soleil; on en trouvera la table ci-après. En faisant la même chose sur le bord oriental du cercle de projection pour chaque parallele, on trouvera les longitudes des lieux qui doivent avoir le commencement ou la fin de l'éclipse au coucher du Soleil : le commencement, en prenant les

intersections à droite sur l'orbite lunaire; la fin, en les faisant sur la partie gauche, ou sur l'extrémité orientale de l'orbite.

1953. Quand tous ces points du commencement et de la fin de l'éclipse, au lever et au coucher du Soleil, sont rapportés sur un globe, ou sur une carte géographique, il en résulte une courbe singuliere, qui ressemble quelquefois à un huit de chiffre; quelquefois aussi elle ne contient qu'un seul ovale, ou deux ovales séparés : M. du Séjour a donné toutes les propriétés géométriques et astronomiques de ces courbes, les points de croix, d'inflexion, de rebroussement, les points isolés, etc. dans les *Mémoires* de 1769 (*pag.* 348 *et suiv.*), comme il l'avoit annoncé dans ceux de 1768 (*pag.* 187 *et* 188). Celle que l'on voit dans la carte, planche XIV (FIG. 123), a vers le point K, au-dessus du pole arctique, un nœud ou une intersection formée par trois points, vers l'endroit de la Terre où le Soleil ne fait que se coucher un instant à minuit, ou rase l'horizon; ce qui arrive sous le parallele de 85° 11', complément de la déclinaison du Soleil. La Caille [a] (art. 1177) ne parle que d'un seul point, qui a le commmencement et la fin, au lever et au coucher du Soleil. Mais, pour mettre plus de précision dans cette recherche, j'observe d'abord que le point qui, en se couchant et se levant, c'est-à-dire, à minuit, au-delà du pole P, voit le commencement de l'éclipse, ne verra point la fin à ce même moment, à moins que toute l'éclipse ne soit réduite à un simple contact pour ce point là, c'est-à-dire que la ligne d'attouchement ne passe par le point R; mais c'est un cas unique, et dont il est inutile de parler : de même la ligne BCADM, qui marque sur le globe le milieu, au lever et au coucher du Soleil, ne peut pas être coupée en un même point par les deux lignes courbes, dont l'une marque le commencement au lever et au coucher du Soleil, et l'autre la fin au lever et au coucher du Soleil; celle du commencement, au lever du Soleil, se termine et se joint à celle du commencement, au coucher du Soleil, lorsque la Lune est vers le point 10^{s} 14' (FIG. 122), éloignée du sommet R de la projection de 30' 48", ou de la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune; la ligne de la fin au lever se termine, et celle

(a) En posant, dit-il, tous ces points sur la carte ou sur le globe, on aura une courbe rentrante qui se coupera elle-même au point où le Soleil ne fait que paroître un instant à midi, ce qui arrive sous le parallele de .... complément de la déclinaison du Soleil, et à la longitude de .... où tombe sur l'orbite le point M du milieu de l'éclipse. Mais le point de la Terre qui verra le milieu de l'éclipse, au lever et au coucher du Soleil, étant en D (FIG. 118), le verra quand la Lune sera aux environs de la perpendiculaire D*r* abaissée sur l'orbite.

de la fin au coucher commence, lorsque la Lune est, vers 12^h 25′, éloignée du point R vers l'orient de la somme des demi-diametres.

1954. Pour déterminer sur la Terre ces deux points, l'on remarquera d'abord qu'ils sont sur le parallele de 85° 11′, où le Soleil ne fait que raser l'horizon; mais ils sont à des longitudes fort différentes. La Lune étant au point de l'orbite marqué 10^h 14′ $\frac{1}{3}$ (FIG. 122), on a 10^h 14′ $\frac{1}{3}$ à Paris, en comptant depuis minuit, et le point qui est en R comptant 0^h, il compte moins; il a moins de longitude, il est plus occidental de 10^h 14′ $\frac{1}{3}$, ou 153° 35′; sa longitude est donc de 226° 25′. C'est le point qui est commun aux lignes du commencement au lever, et du commencement au coucher. On trouvera de même le point où se réunissent les courbes de la fin au lever, et de la fin au coucher; car la Lune étant au point de son orbite marqué 12^h 25′, est éloignée du point R de la somme des demi-diametres; et le lieu de la Terre, qui pour lors est arrivé en R, comptant 12^h 25′ de moins, a aussi une longitude moindre de 186° $\frac{1}{4}$; sa longitude est donc de 193° 45′: M. du Séjour trouve 193° 49′ $\frac{1}{3}$, comme on le verra dans la table.

Sous le parallele de 85° 11′, il faut distinguer trois points, au lieu d'un seul qui est indiqué dans la figure de la Caille. Pour qu'on apperçoive distinctement ces différens points, je les ai représentés séparément dans la *figure* 124, sur le côté de la carte. Le cercle GHI est le parallele de 85° 11′, où le Soleil ne fait que raser l'horizon le jour de l'éclipse; les points G, H, I, sont ceux où ce cercle est touché par les courbes du commencement, du milieu, et de la fin. Le premier point G est à 226° 24′ de longitude, il voit le commencement au lever et au coucher du Soleil; le dernier point I est à 193° 49′, il voit la fin au lever et au coucher du Soleil: entre ces deux points est un lieu intermédiaire H qui voit le milieu, ou la plus grande phase, au lever et au coucher du Soleil; c'est l'endroit où le parallele de 85° 11′ est touché par la ligne du milieu, et ce point de contact sépare le milieu au lever d'avec le milieu au coucher.

1955. Ce lieu de la Terre, qui doit voir le milieu de l'éclipse au lever et au coucher du Soleil, est aussi sur le parallele dont la latitude est égale au complément de la déclinaison du Soleil 85° 11′; ou, suivant M. du Séjour, 85° 14′: c'est le lieu qui se trouve en L (FIG. 120), lorsque la Lune est aux environs du point N, où aboutit la perpendiculaire LN; cette ligne exprime à-peu-près la plus grande phase ou la plus courte distance possible pour le point L, et c'est au moment du minuit qui joint le lever avec le coucher du Soleil.

Pour savoir à quelle heure la Lune étoit en N, on emploie les triangles semblables CMT, LTN, dans lesquels on connoît CT = 44′ 56″, TM = 21′ 36″, CL = 54′ 0″, et l'on fait cette proportion : CT : TM :: CL : NM, que l'on trouve répondre à 57′ 0″ de temps; ce temps, ajouté avec celui du milieu de l'éclipse générale en M, $10^h\ 22'\ 41''$, donne $11^h\ 19'\ 41''$ pour l'heure qu'il étoit à Paris lorsque la Lune étoit en N; et comme l'on comptoit 0^h dans le lieu L, il s'ensuit qu'il étoit plus occidental que Paris, de $11^h\ 19'\ 41''$, ou de $169°\ 55'\frac{1}{4}$; ainsi sa longitude étoit de $210°\ 4'\ 30''$.

1956. A parler exactement, ce n'est pas au point N que la distance LN est réellement la plus courte possible pour le point L; mais comme le mouvement en L est toujours très petit, et que l'inclinaison de l'orbite TN, par rapport à la tangente en L, ne va jamais qu'à 29°, il n'y a pas d'erreur sensible : je trouve, par exemple, que, dans le cas où la déclinaison seroit de 10°, et l'inclinaison de 27°, la perpendiculaire LN différeroit de 2° de la ligne qui marqueroit la plus grande phase.

1957. Ces courbes d'illumination que l'on voit dans la carte (FIG. 123), paroissent très bizarres; et il est nécessaire de donner ici quelques considérations sur la nature du phénomene qu'elles représentent, pour faire sentir les raisons générales de leur situation et de leur contour dans différens cas. Les courbes du coucher sont plus vers la droite, ou plus orientales que celles du lever, parceque les pays qui quittent déja l'horizon, ou le cercle de projection quand l'éclipse commence, ont plus de longitude, et sont plus orientaux que ceux qui y arrivent, ou qui ont le Soleil levant [a]. Les courbes du coucher sont aussi plus au nord que celles du lever : cela arrive en général dans les signes ascendans, sur-tout quand la Lune est en même temps dans son nœud ascendant; car alors elle va en se rapprochant du nord, depuis le commencement jusqu'à la fin de l'éclipse : le mouvement de l'ombre tend vers le nord, et les pays qui, en se couchant, sont éclipsés sur la gauche ou sur la partie orientale RU de la *figure* 122, sont plus au nord que ceux qui ont vu l'éclipse, en se levant, dans la partie droite GABT.

Le pays situé en B sur la carte, qui est à-peu-près le plus méridional de tous ceux qui peuvent voir l'éclipse au Soleil levant, ne voit qu'un contact, ou un instant d'éclipse; et ce pays voit tout à la fois le commencement, le milieu, et la fin : ainsi les trois courbes

(a) La carte géographique est tournée autrement que la *figure* 122 qui a servi à la décrire, parceque les géographes mettent l'orient à la droite, et les astronomes à la gauche (153).

commencent en un point B, qui est à l'occident de la figure, parceque la Lune arrivant par l'occident, les pays les plus occidentaux sont ceux qui voient l'éclipse les premiers.

Dans des pays un peu plus septentrionaux que le point B, la Lune étant un peu plus basse, il y a plus de parallaxe, la Lune mord davantage sur le Soleil, l'éclipse y dure plus long-temps, il se passe plus de temps entre le commencement et la fin; il y a donc plus d'espace entre le lieu E qui se leve quand l'éclipse commence (vers les isles du Cap-Verd), et le lieu F (au-dessus des Antilles) qui se leve quand l'éclipse finit; voilà pourquoi la courbe s'élargit, et se renfle en E et en F : mais le point E qui se leve quand l'éclipse commence, est plus oriental que celui qui se leve quand l'éclipse finit; et la distance de ces deux points, ou la largeur de la courbe, répond à la plus grande durée de l'éclipse. La courbe se rétrécit ensuite, à cause de la petitesse des degrés de longitude, qui fait que la courbe occupe moins d'espace; la plus grande largeur en longitude est à 18° 5′ 24″ de latitude, comme on le verra dans la table (1969).

1958. En arrivant au parallele de 85° 11′, le Soleil ne se couche qu'un instant : donc les trois points qui séparent la partie droite et la partie gauche de chaque courbe, c'est-à-dire, où l'on voit le commencement, le milieu, ou la fin de l'éclipse, au lever, et tout-à-la-fois au coucher du Soleil, doivent être sur ce cercle-là; et les courbes qui marquent la suite de ces points, doivent toucher sa circonférence : voilà pourquoi les trois courbes se rapprochent, et se terminent sur ce parallele, vers le nord, en trois points dont nous avons parlé (1954).

1959. Les deux courbes du milieu de l'éclipse ne doivent pas se rencontrer au même point que celles du commencement et de la fin; car les pays qui ont 85° 11′ de latitude, arrivant l'un après l'autre au nord de la projection, dans le point R du sommet (FIG. 122), celui qui y arrive quand l'éclipse commence a plus de longitude que celui qui y arrive quand elle est à son milieu, et la différence est proportionnelle au nombre de degrés qui répondent à la demi-durée de l'éclipse, pour les pays les plus septentrionaux de tous, où l'éclipse n'étoit que de cinq doigts (1945).

1960. La courbe de la fin, au lever, coupe celle du commencement, au coucher, en un point K (FIG. 124) très voisin du parallele de 85° 11′, parceque le pays où, après avoir vu l'éclipse commencer au coucher du Soleil, on la voit finir le lendemain matin au lever du Soleil, a nécessairement une nuit fort courte; il est par conséquent situé à une latitude fort grande, et fort peu éloignée de

celle où le Soleil ne se couche point; il est à 85° 3′ 28″ de latitude, et 210° 12′ 22″ de longitude. Il y a encore deux autres points d'intersection R et S; le point R est celui où l'on voit le commencement au coucher, et ensuite le milieu au lever du Soleil; le point S est celui où l'on a le milieu au coucher, et ensuite la fin au lever. Au reste la différence de ces points, quoiqu'elle fasse plus de 30° en longitude, n'occupe pas sur la carte un espace sensible. Mais il est toujours vrai qu'il faut considérer six points, là où les figures ordinaires sembloient n'en indiquer qu'un seul.

Si la déclinaison du Soleil étoit australe, ce seroit à la partie supérieure du parallele de 85°, et non pas à la partie inférieure, que se feroient les contacts G, H, I, des trois courbes; et la ligne du commencement au lever couperoit celle de la fin au coucher de la même maniere que celle du commencement au coucher coupe la courbe de la fin au lever du Soleil.

1961. Il y a d'autres intersections entre ces différentes courbes; mais elles ne peuvent faire aucune difficulté; par exemple, le point qui est sur la route de l'éclipse centrale, et sur la courbe du commencement de l'éclipse, au lever du Soleil, a vu en effet ces deux phénomenes, mais successivement, et à des heures différentes. Cette route de l'ombre ne s'étend pas à gauche jusqu'à la courbe de la fin de l'éclipse, non plus que les autres lignes des phases, parceque les pays qui ont vu la fin au lever, ne peuvent rien voir de plus.

1962. L'heure où arrive chaque phase se trouve naturellement par les calculs que nous avons indiqués; ainsi il est facile de tirer, sur la figure de l'éclipse, la courbe qui marque les pays où chaque phase paroîtra à VI heures du matin, comme on le voit sur la gauche, dans la carte (FIG. 123), et ainsi de toutes les autres heures, VII, VIII, etc. jusqu'à celles du soir, qui sont sur la droite de la figure; mais il faut observer que ces lignes des heures ne se rapportent pas aux lignes du commencement et de la fin de l'éclipse, mais seulement à celles du milieu, ou de la route de l'ombre, et des plus grandes phases. On pourroit marquer les heures sur les lignes du commencement et de la fin, puisque ce sont les arcs sémidiurnes de chaque latitude, qui indiquent l'heure du lever et du coucher du Soleil; mais cela pourroit mettre trop de confusion.

1963. Il y a des cas où la courbe, qui ressemble ici à une espece de huit, se divise en deux ovales détachés, comme dans l'éclipse du 24 juin 1778, dont M. d'Agelet a publié la figure; on en voit un abrégé sur la gauche de la planche XIV. Je vais tâcher de faire sentir la raison de ces deux courbes (*fig.* 123, *n°* 2).

Lorsque la latitude de la Lune est petite, ou au-dessous de 30′ environ, le cercle de la pénombre, qui n'a qu'environ 30′ de rayon, n'atteint pas jusqu'au pole; c'est alors que les courbes des phases sont détachées. La courbe du lever est à l'occident, ou à gauche au-delà de l'Amérique, parceque la Lune vient de ce côté-là, ainsi que les pays de la Terre qui arrivent successivement à l'hémisphere éclairé. La courbe du coucher est à l'orient, puisque la Lune et la pénombre quittent la Terre de ce côté-là : elle étoit en Afrique dans l'éclipse de 1778. Le point L pour le lever, et le point C pour le coucher, sont ceux qui se trouvoient dans l'horizon du globe, ou dans le cercle de projection, qui est le cercle terminateur de la lumiere et de l'ombre, au moment du premier ou du dernier contact, ou effleurement extrême des bords du Soleil et de la Lune vers le nord; le point L de la Terre, entre le Kamtschatka et le cap Mendocin, ne voyoit donc qu'un instant de contact, qui étoit tout-à-la-fois le commencement, le milieu et la fin de l'éclipse. C'étoit au midi du Soleil, parceque ce point étant plus élevé, il voyoit la Lune plus basse, ou plus au midi. Le point C est au-dessus de la mer caspienne. Tous les pays situés au-dessus de LC étoient trop au nord, et voyoient la Lune trop basse pour qu'elle pût leur cacher le Soleil. La ligne EO désigne l'autre limite : le point E, situé entre Lima et Taïti, se levoit au moment où le bord de la Lune touchoit l'extrémité supérieure du Soleil, un seul instant, pour aller éclipser des lieux plus orientaux.

Le point A, qui est le plus oriental de la courbe du lever, est celui qui se trouvoit à l'horizon du globe, lorsque la pénombre commençoit à le toucher, à $1^h 8'$, comptées au méridien de Paris. C'étoit le commencement de l'éclipse générale; on y voyoit commencer l'éclipse au lever du Soleil : mais peu après on la voyoit plus considérable. Bientôt tous les pays de la Terre qui sont sous la courbe LAE, arrivant à l'horizon, tandis que la Lune s'avançoit aussi du même côté, on y voyoit commencer l'éclipse successivement. Il y a toujours deux points de l'horizon coupés par le cercle de la pénombre, et par conséquent deux points, l'un au-dessus, et l'autre au-dessous de A, qui voient commencer l'éclipse au lever du Soleil; ce qui forme la courbe LAE.

Lorsqu'à deux heures le centre de la Lune arrivoit dans la projection, et sur la circonférence de l'horizon, c'étoit le milieu de l'éclipse, ou à-peu-près, pour les pays qui répondoient à cet horizon; ils sont marqués par la courbe LME.

1964. La Lune, à 3 heures, étoit assez avancée pour commencer

à

à quitter les parties occidentales de la Terre; alors tous les pays LGE, en arrivant à l'horizon, voyoient successivement la Lune abandonner le Soleil : ils avoient la fin de l'éclipse au lever du Soleil. Comme il y a encore deux points d'intersection du cercle de la pénombre avec le cercle de l'horizon, il y a aussi deux points de la Terre qui voient à la fois finir l'éclipse au lever du Soleil; et comme ces points sont toujours plus occidentaux, parcequ'ils se levent plus tard que les précédens; ils forment la courbe LGE, convexe vers l'occident.

La Lune avançant toujours vers l'Afrique, l'atteignoit lorsque les pays CDO se couchoient successivement, en sorte qu'ils ne virent que le commencement de l'éclipse au coucher du Soleil. Enfin la Lune, quelque temps après, étant encore plus avancée à l'orient, la pénombre quitta la Terre, lorsque les pays CFO arrivoient peu-à-peu dans le cercle de projection, et ils avoient la fin entiere de l'éclipse, en perdant de vue le Soleil dans l'horizon.

Les points qui sont sur la courbe du milieu CO sont les pays qui, après avoir déja vu la moitié de l'éclipse, arrivoient à l'horizon dans le temps que le centre de la Lune étoit sur le bord de la projection, et que l'éclipse étoit à son milieu; ils avoient le milieu de l'éclipse au coucher du Soleil, plus ou moins grande, suivant qu'ils étoient plus ou moins près du point B où elle étoit totale, ou de la route de l'ombre, MB.

1965. Ces courbes GEA, DOF, sont plus obtuses, plus élargies vers le midi, en E et en O, que du côté du nord, vers L et vers C, parceque le mouvement de la Terre étant plus sensible pour les régions voisines de l'équateur, il passe dans la même durée de phase une plus grande portion de la Terre vers E et O que vers L et C.

Aussi, dans l'éclipse du 17 octobre 1781, la courbe du lever, étant coupée par l'équateur, ressembloit plus à une ellipse.

Les deux points M et B, qui terminent l'éclipse centrale, ne sont pas éloignés de 180° en longitude, quoiqu'il y ait plus de 180° d'éclairés au nord, quand le Soleil a une déclinaison boréale; mais pendant trois heures que l'ombre emploie à parcourir le disque de la Terre, les pays de la Terre avancent aussi vers l'orient; ceux qui étoient encore levés en Afrique, lorsque l'ombre atteignoit la Terre vers la Californie, sont couchés trois heures après, quand l'ombre traverse la Nigritie; ceux qui, pendant ces trois heures, se sont levés du côté de l'Amérique, sont venus trop tard, puisque l'ombre

y avoit déja passé; voilà pourquoi il y a moins de pays qui voient une éclipse.

Ces considérations suffisent pour appercevoir la raison des ovales détachés, qui forment les courbes d'illumination quand la Lune a peu de latitude. A mesure que cette latitude augmente, et que le bord de la pénombre approche du bord de la projection, au nord ou au midi, ces courbes se rapprochent, se touchent, se pénetrent, et s'entrelacent, comme dans l'éclipse de 1764.

Quelquefois la ligne du contact, telle que EAB (FIG. 120), est assez éloignée du centre C pour ne couper que LHF du cercle de projection; elle ne passe point de l'autre côté LXE, c'est-à-dire, dans l'hémisphere occidental : alors il n'y a aucun pays qui voie l'éclipse au coucher du Soleil, et il n'y a qu'une seule courbe au lieu de deux. L'éclipse du 19 janvier 1787 approchoit un peu de ce cas-là, du moins une des courbes y étoit très petite, comme on le peut voir dans mes éphémérides, où il y a des cartes de toutes les éclipses, tracées par M. du Vaucel.

1966. La valeur de MH (FIG. 118) est ce qui regle la figure de ces différentes courbes, comme l'observe M. de Lambre, dans un mémoire manuscrit qu'il m'a communiqué.

Premier cas. Lorsque MH est plus grande que la somme des demi-diametres, il y a deux ovales détachés; car la Lune étant parvenue en R, en sorte que BR soit égale à la somme des demi-diametres, il n'y aura qu'un seul point B qui voie le contact au lever: la même chose étoit arrivée au point K; et dans tout l'intervalle KR, la courbe avoit deux points; ainsi c'est une courbe fermée, une espece d'ovale (1963).

A l'orient du point M, il y a un point O correspondant au point R, qui donne un lieu T qui voit un simple contact; quand la Lune sera en G, le point F sera encore le seul; et dans l'intervalle OG ou TF, la courbe aura deux points : ainsi l'on a de ce côté une autre courbe fermée, détachée de la premiere; le plus souvent cette seconde courbe sera, comme la premiere, une espece d'ovale (FIG. 123, n°. 2).

Dans l'intervalle RO il n'y aucun point de contact au lever du Soleil; tous les pays qui se levent, pendant ce temps, voient le Soleil entier, puisque leur distance à l'orbite ou au centre de l'ombre surpasse la somme des demi-diametres.

Le premier ovale appartient tout au lever, puisqu'il est tout entier à la droite du point D; mais le second, commençant au point T, ap-

partient en partie au lever, en partie au coucher : nous reviendrons là-dessus, en parlant du terme de chaque courbe.

Deuxieme cas. Si MH est égale à la somme des demi-diametres, les points R et Q se confondent en M : les deux courbes ont un point commun ; l'une appartient toute au lever, du moins dans le cas de la figure ; l'autre en partie au lever, en partie au coucher. Celle-ci sera même un double ovale, ou un 8 de chiffre. (1953).

Troisieme cas. Si MH est plus petite que la somme des demi-diametres, les deux courbes se croiseront, comme nous l'avons expliqué (1953) ; et il en résultera un 8 de chiffre. Il peut même avoir lieu dans le premier cas où HM est plus grande que la somme des demi-diametres ; et outre l'ovale détaché, qui a lieu à droite depuis le commencement de l'éclipse générale en K jusqu'en R, il peut y avoir un huit de chiffre qui commence en O, et finit en G.

Cela auroit eu lieu dans l'éclipse de 1764, si CM n'étoit que de 21'. La Lune étant parvenue en O, une courbe de contact recommence au point T, et forme un 8 de chiffre, parceque D*r* est plus petite que la somme des demi-diametres. Il y a un point d'intersection pour un pays vers *a*, qui ayant vu commencer l'éclipse au coucher du Soleil, quand la Lune étoit en O, la verroit finir en se levant en *b*, quand la Lune seroit en *c* ; car ce point appartient à la ligne du commencement au coucher, aussi-bien qu'à celle de la fin au lever.

1967. Pour se convaincre mieux qu'il y a un 8 de chiffre dans ce cas-là, il faut considérer que toutes les latitudes, en remontant depuis I jusqu'en D, et redescendant de D en F, donnent sans interruption un point de commencement à l'horizon, et un point de fin qui est plus occidental, puisque celui-ci arrive plus tard à l'horizon ; il est donc nécessaire que la ligne de fin croise celle de commencement : sans cette intersection, la ligne de commencement, orientale par rapport à celle de fin en montant, deviendroit occidentale en descendant.

Mais il faut remarquer, dans le troisieme cas, que si la perpendiculaire D*r*, abaissée du sommet de la projection sur l'orbite relative, est plus grande que la somme des demi-diametres, il n'y a plus qu'un simple ovale, à gauche de la projection, comme à la droite ; car tous les points de cette courbe de contact seront au coucher du Soleil ; elle n'en aura aucun au lever, ou à la droite de D.

Dans le second cas, les branches de commencement et de fin qui commencent en A (FIG. 123, n°. 3), en remontant vers le pole, se toucheront en C. Ensuite elles se sépareront, sans se croiser ; elles

se réuniront en D, s'y croiseront, et se termineront en B. Le point d'osculation C sera celui qui se leve en H (FIG. 118), lorsque la Lune est en M. Le point D d'intersection sera celui qui, s'étant couché dans la partie DF, en voyant le premier contact, reviendra se lever dans la partie DH pour y voir l'autre contact.

1968. D'après ces considérations, M. de Lambre établit les regles suivantes pour les éclipses qui sont centrales en quelque lieu de la Terre.

1°. Si HM surpasse la somme des demi-diametres, il y aura deux ovales détachés; et si la perpendiculaire D*r* est plus petite, l'ovale le plus près du pole sera double, ou se changera en un huit de chiffre.

2°. Si HM est égale à la somme des demi-diametres, les deux ovales auront un point commun, celui qui verra le contact à l'horizon, au moment du milieu de l'éclipse générale; et l'ovale le plus près du pole sera double, parceque la perpendiculaire D*r* sera plus petite que la somme.

3°. Si HM est plus petite, l'ovale simple n'aura pas lieu : il n'y aura que le huit de chiffre.

Quand l'orbite sera entièrement hors de la projection, le huit de chiffre aura lieu, à moins que la distance du sommet D à l'orbite ne soit plus grande que la somme des demi-diametres : alors il n'y aura qu'un ovale simple, qui se réduit à un point, quand la plus courte distance des centres est égale au rayon de projection, plus la somme des demi-diametres.

Mais le cas qui donne un ovale, et un huit tout-à-la-fois, est si rare, que je n'en ai point vu d'exemple, parcequ'il suppose que la somme des demi-diametres est moindre que HM, et plus grande que D*r*; or ces deux lignes different ordinairement peu.

1969. Les opérations graphiques, aidées de quelques calculs assez simples, peuvent suffire pour trouver les courbes d'illumination, celles des différentes phases, et les principales affections des six courbes qu'aucun auteur d'astronomie n'avoit encore expliquées; il y auroit de plus grands détails à donner sur cet article, s'il ne falloit mettre des bornes à cet ouvrage. Mais, pour donner un modele des calculs que l'on peut faire dans ces cas-là, pour mettre, dans l'exemple que j'ai choisi, toute l'exactitude possible, et pour qu'on voie précisément à quels points de la *figure* 123 doivent passer toutes les courbes des phases qui y sont représentées, je vais donner une table de tous ces points, par longitudes et latitudes, calculées avec soin d'après les formules rigoureuses de M. du Séjour, qui sont

dans les *Mémoires* de 1765, 1767 et 1769, et dans son *Traité analytique*. C'est M. du Vaucel qui a calculé les courbes des phases, et placé ces courbes sur une projection ortographique d'une partie du globe. Les tables de l'éclipse centrale et annulaire avoient été calculées par M. du Séjour (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 258; 1767, *pag.* 192), de même que la limite de l'éclipse du côté du midi (*Mém.* 1768, *pag.* 95), et une partie de la courbe du commencement et de la fin : on peut voir, dans les *Mémoires* de 1769, et dans le *Traité analytique* de M. du Séjour, la théorie de ces courbes d'illumination (1957); mais il nous suffit d'en avoir fait connoître la formation et l'origine.

Tables des pays de la Terre où l'on a vu les différentes phases de l'éclipse du 1 avril 1764.

ECLIPSE CENTRALE.

Heures dans chaque lieu.				Longitude en supposant celle de Paris 20°.			Latitude géog. septentrionale.		
5h	53′	45″	Lever du Sol.	333°	8′	30″	18°	5′	24″
6	0	0	......	334	41	30	18	14	7
7	0	0	......	348	2	15	21	7	58
8	0	0	......	358	44	45	26	38	4
9	0	0	......	7	17	30	34	26	55
9	21	12	......	9	57	22	37	38	11
9	30	0	......	11	2	15	39	0	20
10	0	0	......	14	44	0	43	48	22
10	30	0	......	18	34	0	48	38	54
10	31	16	Latitude	18	43	55	48	51	0
11	0	0	de Paris.	22	43	30	53	20	1
11	30	0	......	27	20	30	57	40	19
Midi			......	32	28	0	61	31	26
1	0	0	......	44	6	30	67	34	14
2	0	0	......	57	5	15	71	36	19
3	0	0	......	70	52	0	74	7	20
4	0	0	......	85	6	15	75	33	41
5	0	0	......	99	36	45	76	11	52
5	25	12	Maximum	105	45	45	76	15	26
6	0	0	de latitude.	114	18	15	76	8	42
7	0	0	......	129	9	45	75	23	31
7	13	4	Au coucher du Soleil.	132	25	15	75	7	22

Eclipse annulaire, ou contact intérieur des bords du Soleil et de la Lune, en supposant l'inflexion de $4''\frac{1}{2}$, *et le diametre de la Lune augmenté, à raison de sa hauteur.*

AU MIDI DU SOLEIL.

Latitude.		Longitude.			Heure dans le lieu de l'observ.		
38°	0'	7°	26'	20"	9h	9'	7"
40	0	9	3	15	9	21	59
42	0	10	36	52	9	34	51
44	0	12	7	47	9	46	48
45	0	12	53	8	9	52	53
46	0	13	38	51	9	58	57
47	0	14	24	11	10	5	0
48	0	15	10	30	10	11	2
48	30	15	33	53	10	14	3
49	0	15	57	25	10	17	4
50	0	16	45	0	10	23	8
51	0	17	33	40	10	29	13
52	0	18	23	55	10	35	22
54	0	20	9	25	10	47	50

AU NORD DU SOLEIL.

Latitude.		Longitude.			Heure pour le lieu de l'observ.		
36°	0'	11°	17'	0"	9h	24'	19"
40	0	14	25	15	9	49	58
42	0	15	57	45	10	2	34
44	0	17	31	29	10	15	8
45	0	18	19	5	10	21	26
46	0	19	7	15	10	27	44
47	0	19	56	50	10	34	5
48	0	20	47	40	10	40	29
48	30	21	13	50	10	43	43
49	0	21	40	20	10	46	58
50	0	22	34	50	10	53	51
52	0	24	28	50	11	6	55
56	0	28	50	20	11	55	24
60	0	34	14	40	12	7	34

Limite de l'éclipse, ou table des lieux où l'on a dû observer le contact extérieur des limbes au nord du Soleil, calculée pour les différentes valeurs de l'angle que fait la ligne de la plus grande phase avec la perpendiculaire à l'orbite relative (1938). Mém. de l'acad. 1768, *pag.* 172.

Angle supposé.	Longitude.			Latitude vraie.				Heure dans chaque lieu.			
0°	334°	31'	0"	20°	5'	47"	Méridion.	5h	25'	12"	Matin.
Lever du Soleil.	346	3	49	19	36	33		6	6	48	
4	352	39	25	18	51	52		6	50	56	
8	5	32	0	16	0	3		7	24	45	
12	15	50	55	12	0	58		8	12	21	
16	24	20	15	6	57	15		8	57	36	
20	32	10	30	0	15	25		9	47	3	
22	36	32	16	4	36	49	Septentrion.	10	20	2	
23	39	58	2	8	32	30		10	46	22	
23	45	56	10	16	56	53		11	46	6	
22	48	47	37	20	24	48		0	15	40	Soir.
20	52	29	30	24	22	34		0	48	53	
16	58	44	2	29	25	44		1	42	24	
12	65	17	20	33	2	50		2	50	57	
8	73	4	27	35	51	40		3	21	21	
4	82	40	7	37	52	24		4	17	46	
0	96	47	30	38	42	52		5	25	12	
. . . . . .	108	13	12	38	10	43		6	15	0	

Courbe du milieu de l'éclipse.

Latitude vraie.	Milieu au lever.	Milieu au coucher.
	Longitude.	Longitude.
19° 30' Mérid.	346° 9' 13"	
19 0	345 50 52	
15 0	345 4 30	
10 0	343 47 45	
5 0	342 18 30	
0 0 Septen.	340 40 15	
10	336 47 45	
20	332 13 20	
30	326 58 25	
38 42 52"	. . . .	96° 47' 30"
40	320 3 20	108 33 25
48 50	315 13 10	111 28 50
60	306 38 25	117 6 20
70	296 28 40	125 22 20
80	276 8 45	144 49 45
84 11 10	246 53 20	173 33 10
84 41 10	237 44 55	182 40 5
85 11 10	219 7 5	201 17 15
85 11 43	218 21 7½	202 0 7½
85 14 23	210 13 0	210 13 0

Le dernier point de chaque colonne est commun à la courbe du commencement au coucher, et de la fin au lever du Soleil, comme on le voit à la page suivante.

Eclipse de 3 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude vraie.
7h Matin.	358° 1' [illegible]5"	8° 41' 13" Mérid.
8	10 53 0	4 9 15
9	21 29 0	2 29 20 Septent.
10	29 50 45	10 46 38
11	36 42 30	19 31 10
Midi	43 11 15	27 35 48
1 Soir.	51 20 45	34 20 10
2	59 30 0	39 41 0
3	68 7 0	43 34 46
4	79 49 30	46 5 41
5	92 16 45	47 16 16
6	106 30 45	47 7 9

Eclipse de 6 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
7h Matin.	354° 34' 0"	0° 43' 11" Septent.
8	7 39 0	5 26 15
9	17 13 11	12 15 19
10	25 21 15	20 7 5
11	32 2 30	29 18 33
Midi.	39 22 15	37 22 38
1 Soir.	47 23 0	44 7 41
2	57 9 30	49 24 51
3	68 22 30	53 2 4
4	80 39 0	55 22 28
5	93 52 45	56 27 11
6	107 52 15	56 19 6

Eclipse de 9 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
6h Matin.	338° 11' 15"	8° 25' 59" Septent.
7	352 4 45	11 2 6
8	2 56 0	16 0 13
9	12 29 0	23 8 28
10	19 42 45	31 44 52
11	27 5 45	40 41 46
Midi.	35 20 30	48 51 36
1 Soir.	45 9 15	55 26 36
2	56 31 45	60 15 36
3	69 7 45	63 33 31
4	82 19 30	65 33 35
5	96 25 30	66 28 21
6	111 21 15	66 25 1

Eclipse de 9 doigts au midi du ☉.

Heures.	Longit.	Latitude.
6h Matin.	329° 55' 45"	30° 22' 38" Septen.
7	342 20 0	35 51 10
8	352 15 30	40 34 35
9	0 9 30	50 25 47
10	7 40 0	62 43 30
11	17 26 [illegible]	74 59 13
Midi.	29 10 0	82 55 15
1 Soir.	44 45 0	86 2 0
2	59 33 30	87 13 59
3	74 56 15	87 47 0
4	89 35 30	88 3 22
5	104 22 15	88 10 51
6	119 19 15	88 9 30

Eclipse de 7 doigts au midi du ☉.

Heures.	Longit.	Latitude.
6h 0 Matin.	322° 53' 0"	44° 31' 5" Septen.
7 0	334 32 0	49 53 23
7 52	340 7 45	62 39 38
7 52	337 14 45	68 56 8
7 0	322 3 30	75 57 59
6 0	360 0 45	77 47 9

Commencement et fin de l'éclipse, au lever ou au coucher du Soleil. Mém. 1769, *pag.* 390.

Latitudes vraies.	Longitudes des lieux. Commenc. au lever.	Commenc. au coucher.	Fin de l'écl. au lever du Soleil.	Fin au couc.	
19° 36' 12" Mérid.	. . . . . .	. . . . . .	345° 21' 43"	. . . . . .	Sommet N à l'occident de B
19 34 23	348° 3' 48"	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	(1)
19 30	347 13 58	. . . . . .	343 26 28		
19 0	348 45 20	. . . . . .	341 46 20	. . . . . .	
15 0 0	353 6 45	. . . . . .	335 48 45		
10 0 0	355 4 59	. . . . . .	331 31 59		
5 0 0	355 49 30	. . . . . .	328 4 30		
1 1 54	355 39 39	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	(2)
0 0 0	355 33 30	. . . . . .	325 14 0		
10 0 0 Septen.	353 15 31	. . . . . .	320 8 1		
18 5 24	349 59 13	. . . . . .	316 18 13	. . . . . .	Plus grande largeur.
20 0 0	349 2 12	. . . . . .	315 23 22		
30 0 0	342 45 54	. . . . . .	309 52 24		
38 10 15	. . . . . .	108° 48' 16"	. . . . . .	. . . . . .	Sommet M
38 12 2	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	108° 13' 12"	(3)
40 0 0	334 42 50	112 34 10	303 23 50	101 32 10	
48 50	330 31 25	124 19 50	300 2 55	99 33 20	
50 0 0	329 34 32	125 12 43	299 20 32	99 34 13	
56 17 21	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	100 39 17	(4)
60 0 0	321 29 10	152 58 55	291 48 58	101 41 5	
60 55 52	320 42 2	. . . . . .	291 2 2	. . . . . .	Plus petite largeur.
70 0 0	311 27 55	142 9 55	281 23 23	108 41 55	
75 7 22	. . . . . .	149 16 3	. . . . . .	115 36 3	Plus grande largeur.
80 0 0	291 46 31	161 11 44	260 26 31	127 42 14	
84 41 10	255 23 25	199 5 5	221 38 25	166 5 50	
85 0 23	244 40 40	208 14 5	212 11 40	175 21 55	
85 3 28	. . . . . .	212 12 22	210 12 22	. . . . . .	Intersection K.
85 7 10	239 50 5	213 14 40	207 7 35	180 25 10	
85 9 10	237 42 10	215 12 5	205 8 40	182 24 5	
85 11 43	. . . . . .	218 21 7	202 0 7	. . . . . .	(5)
85 14 27	226 23 59	226 23 59	193 49 30	195 40 30	Sommets G et L.

(1) Point du passage de la portion du commencement à celle de la fin ; la durée de l'éclipse a été instantanée pour ce point de la Terre : il est le plus austral de tous ceux qui ont vu le commencement au lever du Soleil. C'est aussi l'extrémité de la courbe du milieu au lever du Soleil.

(2) Lieu qui a vu le premier contact extérieur visible sur la Terre.

(3) Point du passage de la portion de la courbe appartenante au commencement de l'éclipse, à celle qui appartient à la fin. La durée de l'éclipse a été instantanée pour ce point particulier de la Terre : il est le moins boréal de tous ceux qui ont vu la fin au coucher du Soleil.

(4) Lieu qui a vu le dernier contact extérieur des limbes visibles sur la Terre.

(5) Ces deux points font les intersections avec le milieu au coucher, et le milieu au lever du Soleil.

Trouver

Trouver la différence des méridiens, ou la différence de longitude, au moyen d'une éclipse de Soleil, ou d'une éclipse d'étoile par la Lune.

1970. LA MÉTHODE la plus exacte que nous ayons pour connoître les longitudes géographiques (47), ou les différences des méridiens (51, 54), est certainement celle des éclipses de Soleil ou d'étoiles : le seul inconvénient de cette méthode est la longueur des calculs qu'elle exige ; mais cela n'empêche pas que nous n'en fassions un usage continuel. Je vais l'expliquer avec soin, pour mettre tout le monde à portée de l'employer, et par là procurer, s'il est possible, à la géographie et à l'astronomie, plus de secours qu'elle n'en a trouvés jusqu'à présent dans cette partie des observations.

1971. Lorsqu'on a observé le commencement et la fin d'une éclipse de Soleil, l'immersion et l'émersion d'une étoile cachée par la Lune, ou celles d'une planete, il faut en déduire le temps de la conjonction vraie ; et quand on a le temps de la même conjonction pour chacun des deux pays, la différence des temps est évidemment celle des méridiens, (*Képler, astron. pars opt.* 393. *Mém. présentés, tom. I, pag.* 539). Cette méthode est la plus directe, la plus élégante et la plus sûre dont on puisse faire usage, et je ne pense pas même qu'on en doive employer d'autre. Je choisis pour exemple le cacul d'une éclipse d'étoile, comme renfermant quelques considérations de plus que celui d'une éclipse de Soleil ; mais j'y ajouterai toujours les modifications qu'exigent les éclipses de Soleil.

1972. Soit S (FIG. 121) le Soleil ou l'étoile qui sont éclipsés ; L la situation apparente du centre de la Lune, par rapport à l'astre, au commencement de l'éclipse ; F le lieu apparent du centre de la Lune au moment de l'émersion ; LF le mouvement apparent de la Lune, par rapport à l'astre, dans l'intervalle de la durée de l'éclipse ; GHI un arc de l'écliptique, passant à la distance HS de l'astre ; DSE un parallele à l'éclipt., passant par le centre de l'astre. Si FA est parallele à DE, l'on aura le mouvement apparent en latitude AL, et le mouvement relatif apparent en longitude FA sur un arc de grand cercle : cet arc se confond sensiblement avec le parallele à l'écliptique ; mais il est plus petit de quelques secondes que l'arc GI de l'écliptique.

1973. On connoît à-peu-près par les tables l'heure de la conjonction vraie, calculée, de même que les longitudes et les latitudes vraies de la Lune, et de l'astre éclipsé au commencement et à la fin

de l'éclipse ; on calcule pour les mêmes instans la différence des parallaxes en longitude et en latitude, par les méthodes qui ont été détaillées (1666 et suiv. 1910) ; on ajoute chaque parallaxe à la longitude vraie, ou bien on la retranche suivant les cas que nous avons expliqués (1678), et l'on a les longitudes apparentes ou affectées de la parallaxe, dont la différence est le mouvement apparent de la Lune sur l'écliptique ; on en retranche le mouvement du Soleil ou de l'astre éclipsé ; s'il est rétrograde, on les ajoute, et l'on a la valeur de GI, mouvement relatif apparent sur l'écliptique.

On applique de même les parallaxes en latitude, pour chacun des deux instans, à la latitude vraie de la Lune calculée par les tables (ou à sa distance au pole boréal de l'écliptique), et l'on a les latitudes apparentes IL, GF, au commencement et à la fin de l'éclipse. La différence de ces latitudes apparentes, ou leur somme, si l'une étoit australe et l'autre boréale, est le mouvement apparent de la Lune en latitude : on en ôte le mouvement en latitude de l'astre éclipsé, si sa latitude change dans le même sens que celle de la Lune ; et l'on a la valeur de AL : on multiplie la différence des longitudes apparentes, c'est-à-dire, GI, par le cosinus de la latitude apparente (3877), en prenant celle qui tient le milieu entre les latitudes IL et GF, et l'on a la valeur du mouvement FA mesuré dans la région de l'éclipse ; il est plus petit que le mouvement sur l'écliptique. J'ai indiqué une table de la différence (1868), table XCV.

1974. Dans le triangle FAL rectangle en A, l'on connoît les deux côtés FA et AL ; on trouvera l'hypoténuse FL, en disant : le mouvement en longitude dans la région de l'astre est au mouvement en latitude, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison de l'*orbite apparente* (1869), ou de l'angle LFA. Le cosinus de l'inclinaison apparente est au mouvement apparent en longitude, dans la région de l'astre, comme le rayon est au mouvement apparent FL en ligne droite, sur l'orbite apparente de la Lune relativement à l'astre S, qui est toujours supposé immobile pendant la durée de l'éclipse.

Dans le triangle LSF, on connoît trois côtés, le mouvement apparent FL en ligne droite, la somme des demi-diametres de la Lune et de l'astre éclipsé ; celui de la Lune étant augmenté à raison de sa hauteur sur l'horzion (1510), cette somme doit être diminuée de 2″, à cause de l'inflexion des rayons (1992), et encore de 3″½, à cause de l'irradiation si c'est le Soleil (1395). La somme des demi-diam. pour le commencement est SL, pour la fin c'est SF : on cherchera les angles SLF et SFL (3980) ; on peut pour cela se servir de l'analogie suivante (3914) : le mouvement FL est à la somme des deux distances

observées, ou des deux sommes des demi-diametres SL et SF, comme leur différence est à la différence des segmens BL et BF. La moitié de cette différence trouvée, étant ajoutée avec la moitié du mouvement FL, donnera le plus grand des deux segmens, qui répond à la plus grande somme des demi-diametres : cette demi-différence, retranchée de la moitié du mouvement FL, donnera le plus petit des deux segmens.

1975. Je suppose, par exemple, que l'on veuille commencer par le segment qui est du côté de la plus grande latitude apparente, soit qu'elles soient de même dénomination, ou de dénominations différentes ; si dans la premiere observation la latitude apparente, calculée IL, est plus petite que dans la seconde, on se servira du rayon de la Lune et du segment, qui répondent à la seconde observation ; mais si la latitude est plus grande au commencement de l'éclipse, on choisira le segment qui répond à ce commencement ; c'est-à-dire qu'on prendra le segment et le demi-diametre du même côté. Avec ce segment, on fera la proportion suivante : la somme SF des demi-diametres apparens, qui répond à ce segment BF, est au rayon ou à l'unité, comme le segment est au cosinus de l'angle adjacent BFS. Cet angle, ajouté avec celui de l'inclinaison apparente LFA, donnera l'angle SFA, égal à l'angle DSF ; c'est le complément de l'angle de conjonction apparente SFK, qui répond à la plus grande latitude GF.

Le rayon est à la somme des demi-diametres apparens SF, comme le cosinus de l'angle DSF est à SD. Cette quantité, divisée par le cosin. de la latitude HS de l'astre S, si ce n'est pas le Soleil, donnera la distance HG à la conjonction apparente, pour celle des deux observations qui répond à la plus grande des deux latitudes apparentes de la Lune. Cette distance à la conjonction apparente, avec le mouvement apparent, pourroit servir à trouver la conjonction apparente si l'on en avoit besoin.

On ôtera cette distance de la longitude vraie du Soleil ou de l'étoile, si c'est le commencement de l'éclipse, auquel répond la plus grande latitude ; on l'ajoutera avec la longitude du Soleil, si c'est la fin de l'éclipse, et l'on aura la longitude apparente de la Lune observée. Cette longitude apparente observée, étant comparée à celle qu'on avoit calculée, donnera l'erreur des tables en longitude.

Il pourroit arriver que l'immersion fût après la conjonction apparente en longitude : le cas est rare ; mais si l'on avoit lieu de le

craindre, on pourroit s'en assurer en calculant par les tables seules l'immersion et la conjonction apparente.

1976. On prendra ensuite le mouvement vrai de la Lune s'il s'agit d'une étoile, ou la différence des mouv. en longit. sur l'écliptique, trouvés avant le calcul des parallaxes, et l'on dira : ce mouvement est à une heure, ou 3600″, comme l'erreur des tables en longitude est à un nombre de secondes de temps qu'on ôtera de l'heure de la conjonction calculée par les tables, si l'on a trouvé par observation une longitude plus grande que par les tables, et l'on aura l'heure de la conjonction déduite de l'observation; c'est ce qu'il falloit trouver. Je donnerai un exemple de l'autre maniere de procéder (1980), qui est plus simple quand il s'agit d'une étoile.

Il est toujours utile de trouver également la conjonction et l'erreur des tables, par le moyen de l'autre triangle SBL, qui est du côté de la plus petite latitude, en prenant l'autre segment BL, et l'autre somme SL des demi-diametres: on prendra la différence des deux angles SLB, CLF (égal à LFA), dont on a pris la somme dans le premier calcul, et l'on aura l'angle SLC ou ESL, et le cosin. SE: on cherchera de même l'heure de la conjonction vraie. Le résultat doit être exactement le même, puisque les deux observations du commencement et de la fin n'en font qu'une seule pour la détermination de la longitude et de la latitude de la Lune.

Le triangle SFD qui a servi à trouver la différence de longitude apparente SD, sert aussi à trouver la différence des latitudes apparentes, c'est-à-dire, FD, qu'on ajoutera avec la latitude de l'astre S, si celle de la Lune F, qu'on a calculée par les tables, a été trouvée plus grande que celle de l'astre, en sorte que le point F soit plus éloigné de l'écliptique que le point D; et l'on aura la latitude apparente de la Lune, qui, comparée avec celle qu'on a tirée des tables, fera connoître l'erreur des tables en latitude.

Il peut arriver un cas où l'on seroit embarrassé de savoir si le point F est plus ou moins éloigné de l'écliptique GI que le point D; c'est le cas où la différence FD des latitudes apparentes de la Lune et de l'astre ne seroit que d'environ 30″ dans chacune des deux observations. L'erreur des tables laissant à-peu-près une incertitude de 30″, on ne sauroit pas si le centre de la Lune a passé au nord ou au midi de l'astre S: dans ce cas le commencement et la fin d'une éclipse ne suffiroient pas pour déterminer la latitude. On pourroit y suppléer de plusieurs manieres; 1°. par la grandeur de l'éclipse, s'il s'agit du Soleil; 2°. par la différence de déclinaison observée

entre la Lune et l'astre avant l'immersion ou après l'émersion; 3°. par les alignemens avec des taches; 4°. par l'observation faite dans un autre pays; 5°. par la hauteur méridienne de la Lune observée le même jour; et l'on jugeroit si la Lune est plus au nord ou au midi par l'observation que par les tables; mais, dans ce cas, l'observation de l'éclipse ne seroit pas propre à déterminer la latitude. Les préceptes que nous venons de donner pour trouver la conjonction vraie, suffisent à ceux qui ont déja l'habitude de ces sortes de calculs; les autres auront besoin de se fortifier par l'exemple suivant.

1977. EXEMPLE. Le 6 avril 1749, l'étoile *Antarès* fut éclipsée par la Lune à Berlin, à 14ʰ 6′ 19″ de temps vrai, et elle reparut de l'autre côté de la Lune à 15ʰ 12′ 54″. Le même jour j'observai l'immersion à Paris, à 13ʰ 1′ 20″; je me propose de chercher la différence des méridiens, entre Paris et Berlin, par la comparaison de ces observations. Pour faire ce calcul, par la méthode exacte que je viens de détailler, il faut connoître déja à-peu-près la différence des méridiens que l'on cherche, ou bien le premier calcul ne sera qu'une approximation, et on le recommencera pour trouver le même résultat une seconde fois avec plus de précision. Par exemple, si je n'avois aucune idée de la longitude de Berlin, je prendrois la différence entre les heures de l'immersion à Paris et à Berlin, c'est-à-dire, entre 13ʰ 1′ 20″, et 14ʰ 6′ 19″, et je supposerois qu'il y a 1ʰ 4′ 59″ de différence entre les deux méridiens; mais sachant d'avance que cette différence n'est pas fort éloignée de 44′ 4″, je me suis servi de cette connoissance.

1978. Il faut donc réduire au méridien de Paris les deux observations de Berlin, les réduire aussi en temps moyens, et calculer pour les deux instans tous les élémens de l'éclipse. Voici ces calculs faits par M. Carouge, plusieurs fois et avec une extrême précision, soit pour les deux observations de Berlin, soit pour celle de Paris: il s'est servi des secondes tables de Mayer (1460), et de l'aplatissement, supposé $\frac{1}{230}$, pour corriger les hauteurs du pole.

Elémens du calcul pour l'éclipse d'Antarès par la Lune, observée le 6 avril 1749, à Paris et à Berlin.

	Immersion à Paris.	Immersion à Berlin.	Emersion à Berlin.
Temps vrais des trois observations.	13ʰ 1′ 20″	14ʰ 6′ 19″	15ʰ 12′ 54″
Temps réduits à Paris.	13 1 20	13 22 15	14 28 50
Temps moyens correspondans.	13 3 32,8	13 24 27,6	14 31 1,8
Longitudes de la Lune par les tables.	8ˢ 5° 31 42,4	8ˢ 5° 43 16,6	8ˢ 6° 20 7,8
Latitudes australes de la Lune par les tables.	3 47 58,7	3 47 18,7	3 43 10,3

	Immersion à Paris.	Immersion à Berlin.	Emersion à Berlin.
Parallaxes horizontales pour chaque lieu	57′ 16″2	57′ 15″9	57′ 17″ 1
Temps vrais réduits en degrés.	195° 20 0	211° 34 45	228° 13 30
Ascensions droites du Soleil.	15 58 2,3	15 58 50,7	16 1 24,7
Ascensions dr. du milieu du ciel (1014, 1661).	211 18 2,3	227 33 35,7	244 14 54,7
Angles de l'écliptique et du méridien.	70 6 11,1	74 24 29,8	80 2 8,1
Longitudes du point culminant.	7s 3 32 21,7	7s 20 0 42,8	8 6 7 56,1
Déclinaisons du point culminant.	12 42 46,2	17 46 6,0	21 21 38,6
Hauteurs de l'équateur.	41 8 46	37 28 30	37 28 30
Hauteurs corrigées (1693).	41 23 37,2	37 42 58,9	37 42 58,9
Hauteurs du point culminant.	28 40 51,0	19 56 52 9	16 21 20,3
Hauteurs du nonagésime (1661).	34 25 4,3	25 7 16 4	19 4 51,1
Longitudes du nonagésime (1662).	6 1 39 10,4	6 13 29 23,3	7 5 36 29,2
Distances vraies de la Lune au nonagésime.	63 52 32,0	52 13 53,3	30 43 38,6
Parallaxes de longitude (1666).	29 14,9	19 20,6	9 38,1
Parallaxes de latitude (1681).	48 13,0	52 52,8	55 16,2
Hauteurs apparentes de la Lune.	10 1 33	10 20 28	11 26 47
Demi-diametres horizontaux de la Lune.	15 38,3	15 38,5	15 38,8
Augmentation (1510).	2,9	2,7	3,0
Demi-diametres apparens.	15 41,2	15 41,2	15 41,8
Longitudes apparentes de la Lune.	8 6 0 57,3	8 6 2 37,2	8 6 29 45,4
Latitudes apparentes.	4 36 12,1	4 40 11,8	4 40 26,4

1979. Avec ces élémens nous avons tout ce qu'il faut pour trouver l'heure de la conjonction, et nous commencerons par celle de Berlin.

Le mouvement apparent en latitude, dans l'espace de $1^h\ 6'\ 35''$ qu'a duré l'occultation, c'est-à-dire, la valeur de AL, est de 14″67, dont la latitude apparente croissoit; le mouvement apparent en longitude sur l'écliptique étoit de 27′ 8″2 = GI, et de 27′ 2″73 dans la région de l'étoile, sur un grand cercle FA (3879): l'on trouvera donc (1974) l'angle AFL, 0° 31′ 4″6, et le côté FL, ou le mouvement de la Lune sur son orbite apparente, 27′ 2″8.

1980. Le demi-diametre apparent de la Lune est de 15′ 41″2 = SL pour le premier instant, et de 15′ 41″8 = SF pour la fin, que l'on pourroit diminuer chacun de $3''\frac{1}{2}$, si l'on vouloit avoir égard à l'inflexion (1992)[a]. Ayant abaissé du centre S de l'étoile une perpendiculaire SB[b] sur l'orbite apparente FL, on cherchera les segmens BL = 13′ 31″, 03 et BF = 13′ 31″, 76, et l'angle SLB = 30° 29′ 11″3. Ayant mené LC parallele à AF, et l'angle L étant du côté de la plus petite latitude IL, on en ôtera l'angle AFL ou CLF 31′ 4″6, et l'on aura l'angle SLC = LSE = 29° 58′ 6″7. Dans le triangle ESL

(a) En prenant le diametre de la Lune dans mes nouvelles tables, il n'y auroit que deux secondes à ôter. Si c'étoit une éclipse de Soleil, il faudroit diminuer aussi le demi-diametre du Soleil (1987).

(b) Cette perpendiculaire SB n'est pas la plus courte distance de la Lune à l'étoile, à cause de la courbure de l'orbite apparente (1870).

on connoît SL, et l'angle ESL; on trouvera ES 13′ 35″33, qui, divisée par le cosin. de la latitude apparente de la Lune, donne 13′ 38″04 pour la distance apparente IH de la Lune à sa conjonction sur l'écliptique : c'est ce que Képler et Boulliaud appellent *scrupula incidentiae.* Cette distance apparente IH est à l'occident de l'étoile, et précede la conjonction apparente, puisqu'il s'agit de l'immersion, et que la Lune étoit moins avancée que l'étoile; mais la parallaxe de longitude faisoit paroître la Lune plus avancée vers l'orient de 19′ 20″6, parceque la longitude de la Lune est plus grande que celle du nonagésime (1866) : ainsi le lieu vrai de la Lune étoit encore plus éloigné de l'étoile que le lieu apparent. Il faut donc ajouter la parallaxe avec la distance à la conjonction apparente, et l'on aura 32′ 58″, 64 pour la distance de la Lune à la conjonction vraie, en minutes de degrés comptées sur l'écliptique; ce qui fait (a) 0ʰ 59′ 35″, 6 à raison de 36′ 51″,2 pour 1ʰ 6′ 35″ de temps, qui est la différence des deux longitudes vraies calculées (1973); ces 59′ 35″6 sont la différence entre l'observation et la conjonction vraie : or l'immersion avoit été observée à 14ʰ 6′ 19″; donc le temps vrai de la conjonction étoit à 15ʰ 5′ 54″, 6 au méridien de Berlin.

1981. Il y a des cas où la ligne FL du mouvement apparent est située différemment par rapport à DE, qui est parallele à l'écliptique; mais on pourra prendre, dans tous les cas, la somme de l'angle SFB du triangle, et de l'angle d'inclinaison AFL; l'on aura toujours l'angle DSF du côté où la différence de latitude apparente DF est la plus grande (1975).

1982. Pour vérifier le calcul précédent, il est bon de chercher aussi la conjonction par l'émersion de l'étoile. L'on connoît SF = 15′ 41″8, et le segment FB = 13′ 31″76; on trouve l'angle SFB = 30° 27′ 50″6; l'on ajoute ensemble les deux angles SFB, BFA; l'on a SFA = DSF = 30° 58′ 55″. Dans le triangle DSF, rectangle en D, dont on connoît l'hypoténuse SF, et l'angle DSF, on trouve SD = 13′ 27″5, qui, étant divisé par le cosinus de la latitude apparente 4° 40′ 19″ (milieu entre les latitudes pour l'immersion et l'émersion), donne GH = 13′ 30″1, distance à la conjonction apparente, mesurée sur l'écliptique. Dans cette seconde observation, la Lune paroissoit plus orientale que l'étoile; mais à cause de la parallaxe de longitude, qui la faisoit paroître plus avancée, le lieu apparent étoit plus orien-

(a) Pour réduire en temps ces différences de longitude, on ne fait qu'ajouter à leur logarithme un logarithme constant, qui est la différence entre le logarithme de 3600″, ou une heure, et celui du mouvement horaire vrai de la Lune, par rapport au Soleil, sur l'écliptique.

tal que le lieu vrai de 9′ 38″05 : donc il reste 3′ 52″, dont la Lune avoit réellement passé sa conjonction vraie avec l'étoile, ce qui fait en temps 6′ 59″4 : cet intervalle étant ôté de l'heure de cette seconde observation 15h 12′ 54″, on trouve le temps vrai de la conjonction vraie à 15h 5′ 54″6, aussi-bien que par la premiere observation.

On sent bien qu'il ne doit y avoir aucune différence, si l'on a bien opéré, puisque le temps de la conjonction étant déterminé par le mouvement FL, qui dépend des deux observations conjointement, on ne sauroit trouver qu'un seul résultat par ces deux observations; mais une différence de quelques décimales ne seroit ici d'aucune conséquence.

1983. Pour connoître la vraie latitude de la Lune par cette observation, on cherchera aussi les côtés DF et EL, par le moyen des triangles DSF et LSE qu'on a résolus ci-dessus; on trouvera EL = 7′ 50″0, et DF = 8′ 4″9; on ajoutera ces quantités à la latitude de l'étoile 4° 32′ 10″2 = IE = GD, parceque la Lune paroissoit plus méridionale que l'étoile; et l'on aura les latitudes apparentes de la Lune IL, GF, 4° 40′ 0″2, et 4° 40′ 15″1; on en ôtera les parallaxes de latitude 52′ 52″8, et 55′ 16″1, parceque la latitude australe de la Lune étoit augmentée par la parallaxe; et l'on aura 3° 47′ 7″4, et 3° 44′ 59″0 pour les latitudes vraies de la Lune IM, GN, conclues de l'observation : ces deux latitudes se trouvent être plus petites de 11″3 que celles des tables. On remarquera que l'orbite vraie MN de la Lune se rapproche ici de l'écliptique GI, quoique l'orbite apparente LF s'en éloigne.

1984. Le même jour j'observai à Paris l'immersion d'Antarès à 13h 1′ 20″ (*Mém. acad.* 1755) : il s'agit de trouver aussi la conjonction vraie de la Lune à l'étoile par l'observation de Paris. On feroit la même opération que pour Berlin (1978), si l'on avoit observé à Paris l'émersion aussi-bien que l'immersion; mais les nuages m'ayant empêché de faire la seconde observation, je vais y suppléer par une autre méthode, qui servira d'exemple en pareil cas.

1985. La latitude vraie de la Lune, calculée par les tables pour le moment de l'observation, est 3° 47′ 58″7; il en faut ôter 11″3, dont nous avons trouvé, par l'observation de Berlin, que les tables donnoient ce jour-là une latitude trop grande (1983); et nous aurons pour la latitude vraie de la Lune, au moment de l'immersion observée à Paris, 3° 47′ 47″4; il y faut ajouter la parallaxe de latitude 48′ 13″, 0, pour avoir la latitude apparente de la Lune 4° 36′ 0″4, et en ôter la latitude de l'étoile 4° 32′ 10″2, ce qui donne, pour la différence apparente en latitude EL au moment de l'observation,

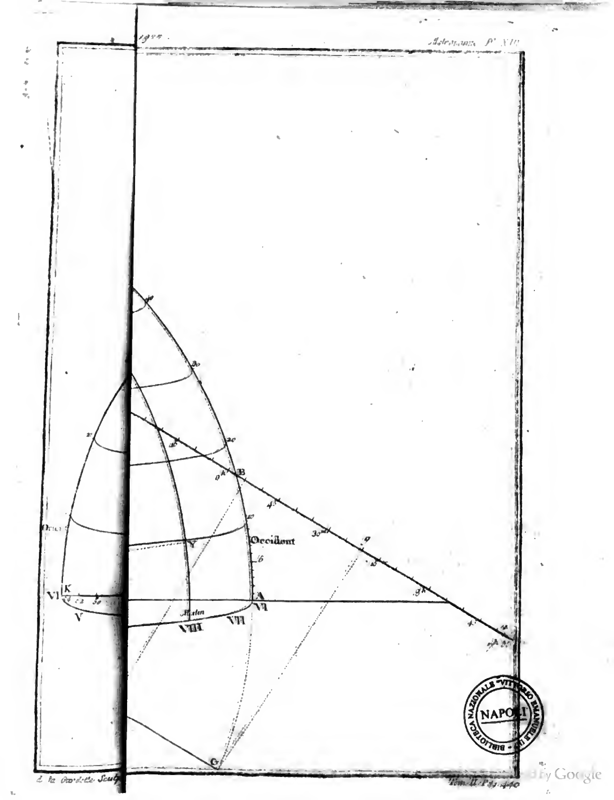
3′

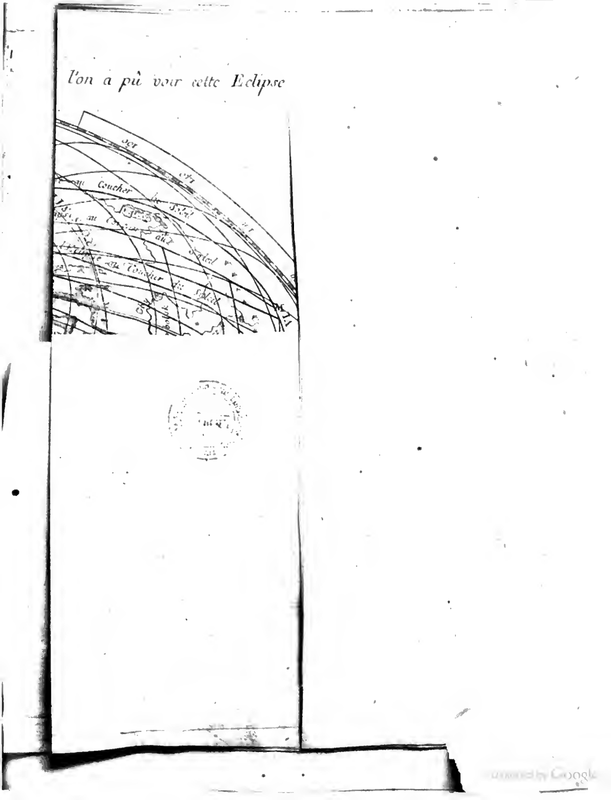
Fig. 117.

Fig. 119.

Ecliptique.

Fig. 121.


Astronomie Pl. XIV
Occident
Orient
B
Y
A
K
G
VI
V
VIII
VII
VI
Matin


l'on a pû voir cette Eclipse
Couchér
du Soleil
au Couchér
au Couchér du Soleil

3′ 50″2. Dans le triangle SLE, on connoît LE, et SL = 15′ 41″2, demi-diametre apparent de la Lune : l'on cherchera le côté SE par la méthode que j'ai expliquée (1761). Ce côté, divisé par le cosin. de la latitude apparente de la Lune au moment de cette observation, donnera la différence apparente de longitude sur l'écliptique 15′ 15″4 ; il y faut ajouter la parallaxe de longitude 29′ 14″, 9, pour avoir la distance à la conjonction vraie 44′ 30″7. On réduira cette différence en temps, par le moyen du mouvement 36′ 51″2 de la Lune, qui a lieu en 66′ 35″ de temps ; et l'on aura celui de 1h 20′ 25″5, intervalle de temps entre l'observation de Paris, 13h 1′ 20″, et le temps vrai de la conjonction vraie, qui se trouvera par conséquent être à 14h 21′ 45″5 pour Paris.

1986. On aura donc les deux temps de la conjonction de la maniere suivante :

Temps vrai de la conjonction vraie à Berlin, . . .	15h	5′	54″6
Temps vrai de la conjonction vraie à Paris, . . .	14	21	45,5
Donc la différence des méridiens est	0	44	9,1
Et par rapport à l'observatoire royal de Paris . .	0	44	10,9
On trouve 3″3 de plus en employant l'inflexion de 3″½, c'est-à-dire qu'on a		44	14,2

Grischow trouvoit 11″ de plus par d'autres observations (*Mém. présentés à l'acad. tome I*). Il y a plusieurs autres déterminations de cette différence des méridiens, qui sont entre 44′ 5″ et 44′ 15″.

La longitude d'Antarès étoit alors 8s 6° 16′ 18″8 ; c'est aussi la longitude vraie de la Lune pour le 5 avril 14h 21′ 45″, temps vrai réduit à l'observatoire royal de Paris, ou 14h 23′ 57″, temps moyen : la latitude vraie de la Lune étoit de 3° 45′ 12″7, suivant l'observation. La longitude calculée par les tables de Mayer est trop grande de 3″6, et la latitude trop petite de 11″3 : cette erreur augmente de 7″5, si l'on a égard à l'inflexion de 3″½.

1987. Quand on a observé le commencement et la fin d'une éclipse de Soleil, les deux distances à-peu-près égales, SL et SF, sont la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune ; mais il faut augmenter le demi-diametre de la Lune à raison de sa hauteur (1510), le diminuer de 2″, et celui du Soleil de 3″½ (1395, 1992). On peut même encore ôter 2″ de la somme des demi-diametres pour le commencement d'une éclipse de Soleil, parcequ'il n'est pas possible de l'appercevoir, à moins que la Lune ne soit avancée de 2″ sur le Soleil. Cependant on pourroit, dans ce cas-là, ne pas diminuer le demi-diametre de 3″, et supposer qu'on apperçoit l'impression de la Lune

dès qu'elle intercepte une partie de cette irradiation solaire de $3''\frac{1}{2}$.

Quand on a observé plusieurs phases avec un micrometre (2483), on a également des distances entre les centres de la Lune et du Soleil; on les prend deux à deux, l'une avant, l'autre après le milieu, et calculant le mouvement apparent de la Lune dans l'intervalle des deux observations, on a toujours un triangle SLF, dont les trois côtés sont connus, et par lequel on trouve comme ci-dessus (1980) le temps de la conjonction vraie.

Quand on a mesuré la distance des cornes ou des pointes de lumiere qui sont formées par les intersections des limbes du Soleil et de la Lune, on peut en conclure la distance SL (FIG. 106), entre les centres du Soleil et de la Lune. En effet, la demi-distance des cornes, c'est-à-dire, AB avec le demi-diametre SA du Soleil pris dans les tables, sans diminution, fera trouver $SB = \sqrt{SA^2 - AB^2}$; et avec le demi-diametre de la Lune LA, diminué de $2''$, elle fera connoître LB: la somme est la distance SL des centres du Soleil et de la Lune, dont on se servira pour trouver la conjonction par la méthode précédente.

1988. Si l'on n'a que le commencement de l'éclipse, ou seulement la fin, comme cela arrive souvent, on est obligé de supposer la latitude de la Lune exactement connue dans chaque observation; cela n'influe pas beaucoup sur le résultat, sur-tout si la distance des deux observateurs n'est que de peu de degrés, ou si la latitude apparente n'est que de peu de minutes. Dans ce cas, on peut se contenter de calculer par les tables la distance apparente des centres (1867, 1903), après avoir rectifié les tables, s'il est possible, par une autre observation complete; ou bien calculer la distance apparente pour les deux pays, en faisant varier la différence des méridiens jusqu'à ce que ces distances soient égales. Ces calculs peuvent aisément se faire avec ma méthode des angles parallactiques (1875); car dès qu'on connoît la latitude de la Lune et sa longitude, on calcule la distance apparente des centres pour l'heure de l'observation faite sous le méridien inconnu: si on la trouve plus grande, ou plus petite que par l'observation, on change la supposition faite pour la différence des méridiens, et par conséquent la longitude et la latitude, ce qui donne une autre distance apparente des centres. Alors, par une regle de trois, on trouve quelle est la différence des méridiens qu'il faut supposer pour trouver par le calcul la même distance des centres que par observation.

On peut calculer, par cette méthode des angles parallactiques, la

conjonction vraie, en cherchant l'orbite apparente (1906), et faisant tous les calculs précédens (1974 *et suiv.*).

On peut aussi trouver la conjonction, en comparant le commencement de l'éclipse observé dans un endroit avec la fin observée dans un autre, pourvu que l'on réduise les deux observations au même méridien, et que l'on emploie la parallaxe qui convient au temps et au lieu de chaque observation. Je l'ai fait ainsi pour l'éclipse de Soleil de 1787, dont nous n'avions vu que le commencement à Paris (*Mém.* 1787).

1989. La maniere de déterminer les longitudes des différens pays de la Terre, par la conjonction vraie, calculée pour les deux pays, est la plus exacte que nous ayons; le seul inconvénient qu'on y trouve, est la longueur du calcul qu'elle suppose; c'est un obstacle, à cause du peu de personnes qui s'occupent de ces recherches. Les éclipses des principales étoiles sont les plus utiles de toutes pour la théorie de la Lune, et la détermination exacte des longitudes des villes : Aldebaran, en supposant 45′ de parallaxe en latitude, doit être eclipsé lorsque le nœud de la Lune est vers $4^s\ 13°$, et 6^s de longitude, comme en 1680, 1699, 1700, 1701, 1717, 1718, 1719, 1755, 1773, 1774, 1776; on en observa plusieurs en 1774. Lorsque le nœud est vers $0^s\ 6°$, et $7^s\ 5°$, comme en 1753, c'est l'épi de la Vierge; on l'a observé en 1727, 1745, 1753 et 1764. A $0^s\ 19°$, et $9^s\ 23°$, c'est Antarès, comme en 1709, 1749 et 1766; enfin, à $4^s\ 13°$, et $11^s\ 10°$, le cœur du Lion fournit des éclipses, comme en 1683, 1747, 1765 et 1776. On ne sauroit donner trop d'attention à ces sortes d'éclipses, dont la plupart nous échappent, ou par le mauvais temps, ou par l'heure où elles arrivent; ce sont les meilleures de toutes les observations. Les éclipses des étoiles de seconde et de troisieme grandeur sont plus fréquentes, mais elles ne sont pas si faciles à observer avec exactitude.

1990. Lorsque la Lune a passé l'opposition, sa partie orientale est éclairée, sa partie occidentale est obscure; ainsi les immersions se font dans la partie éclairée, et les émersions se font dans la partie obscure; c'est-à-dire, à gauche, dans une lunette astronomique. Je crois que ce sont là les seules émersions dont on puisse être bien assuré; car quand l'étoile sort de la partie éclairée de la Lune, sa lumiere, trop foible par rapport à celle de la Lune, ne se distingue pas facilement au premier instant de l'émersion.

Lorsqu'on a vu une planete ou une étoile entrer sous la Lune, et que l'on sait à quelle distance elle doit passer par rapport au centre de la Lune, il faut imaginer une ligne au travers des taches de la

Lune, à la distance du centre qui est connue, et l'on essaie de remarquer vis-à-vis de quelles taches doit se faire l'émersion ; car si l'on n'est pas prévenu de la situation du point de l'émersion, c'est en vain que l'on espere appercevoir l'étoile au moment de son émersion ; et ces observations, au lieu d'être les plus exactes que l'on ait, deviennent les plus trompeuses : je pourrois citer plusieurs exemples où des astronomes habiles s'y sont mépris considérablement.

1991. Il arrive souvent dans les éclipses d'étoiles ou de planetes par la Lune, que l'astre éclipsé paroît tout entier pendant quelques secondes sur le disque éclairé de la Lune ; on a attribué ce phénomene à l'atmosphere de la Lune, et M. Euler entreprend de prouver son existence par les éclipses de Soleil (*Mém. de Berlin*, 1748, *p.* 103). M. de l'Isle l'attribuoit à la diffraction ou à l'inflexion des rayons qui rasent les bords de la Lnne (*Mém. pour servir à l'hist. de l'astron.* 1738, *pag.* 249.). Ce phénomene, observé par Grimaldi et par Newton (*Opt. parte III*), servoit sur-tout à M. de l'Isle pour expliquer les anneaux que l'on voit autour du Soleil dans les éclipses totales ; pour moi, je pense que c'est une simple illusion optique, occasionnée par l'irradiation ou le débordement de lumiere (a).

M. du Séjour l'explique en supposant la lumiere de la Lune un peu plus réfrangible que celle des étoiles (*pag.* 431).

L'atmosphere de la Lune est insensible, et ne sauroit produire un effet si sensible ; car dans les éclipses de Soleil on voit le bord de la Lune très net et très bien terminé, à l'exception de quelques inégalités dans certaines parties de sa circonférence ; les taches de la Lune sont toujours de la même couleur ; Vénus, quand elle est éclipsée par la Lune, ne change pas de forme et de couleur ; enfin on a vu dans une occultation de Jupiter par la Lune, que le bord de la Lune paroissoit sur le bord même de Jupiter (*Mém. acad.* 1715). Ainsi l'atmosphere de la Lune est trop peu considérable pour faire paroître les étoiles sur le disque éclairé de la Lune, quoiqu'elle suffise peut-être pour produire un autre phénomene dont nous allons parler.

1992. L'INFLEXION des rayons qui rasent les bords de la Lune paroît prouvée par les observations des éclipses de 1764 et de 1769, que M. du Séjour a discutées dans plusieurs mémoires, et sur-tout

(a) On peut voir, dans l'essai du docteur Jurin sur la vision distincte et indistincte, que l'apparence d'une étoile sur le disque de la Lune ne vient que du cercle de dissipation dans lequel l'étoile se trouve lorsqu'elle est fort proche de la Lune (*Optique de Smith*, *tom. I*, *pag.* 236 de la traduction du P. Pezenas ; Avignon, 1767, 2 vol. *in*-4°). M. du Séjour (*pag.* 429).

dans les volumes de 1767, *pag.* 239, 1775, *p.* 365 et 1780; et dans son *Traité, pag.* 253, 395, 418) : il la fait d'environ 3″$\frac{1}{2}$, et il l'attribue à une petite réfraction de l'atmosphere de la Lune. Ayant comparé d'abord les distances des cornes de l'éclipse ou des pointes du croissant qu'elle paroît former, et que Short avoit observées à Londres, M. du Séjour vit qu'on ne pouvoit les concilier. La réfraction dans l'atmosphere de la Lune, et les causes physiques d'inflexion dont la Hire, Euler, Grégory et M. le Monnier avoient parlé, lui firent naître l'idée de calculer les mêmes phases, avec une formule dans laquelle entroit la supposition d'une inflexion dont la valeur pouvoit se déterminer ensuite, en comparant la formule avec les observations; il trouva qu'il falloit, pour concilier toutes ces observations, faire l'inflexion d'environ 3″ $\frac{1}{2}$. M. Méchain et M. Lexell ont trouvé le même résultat. Mais cela revient au même que d'ôter 3″$\frac{1}{2}$ du demi-diametre de la Lune. M. du Séjour diminue aussi de 3″$\frac{1}{2}$ le demi-diametre du Soleil (*Traité analyt. pag.* 264, 394, 428). *Voyez* art. 1395.

Il y a des cas où l'effet de l'inflexion est différent de celui que produiroit une diminution dans le diametre de la Lune (*Mémoires,* 1775, *pag.* 356; *Traité, pag.* 418), et des cas où cet effet est insensible (*pag.* 323, 360). M. du Séjour en attribue 1″8 à l'inflexion, et 1″5 au demi-diametre de la Lune; mais elle revient au même que la diminution du diametre de la Lune, quand il s'agit du commencement et de la fin d'une éclipse : on voit même que les observations n'ont pas encore complètement décidé entre ces deux hypotheses; en sorte qu'il est permis de s'en tenir à une diminution de 7″ dans le diametre de la Lune, qui étoit dans mes premieres tables; et c'est ce que j'ai fait (1863, 1867, 1905). Mais, en 1788, j'ai diminué de 1″3 le demi-diametre de la Lune; ainsi il ne resteroit plus que 2″ pour l'effet total trouvé par M. du Séjour : l'on peut donc supposer l'inflexion 1″, en diminuant encore de 1″, dans les éclipses, le demi-diametre de la Lune que j'emploie dans mes nouvelles tables.

1993. S'il y a une inflexion, la durée de l'éclipse, entre le commencement et la fin, en sera diminuée, puisque l'inflexion fera toujours paroître trop grande la distance des bords de la Lune et du Soleil. En effet, soit S le bord du Soleil (FIG. 117), B le bord de la Lune, T l'observateur sur la Terre; le rayon SBT, courbé dans l'atmosphere de la Lune, fera que le Soleil nous paroîtra sur une ligne TBA, au lieu de TS qui passe sur la Lune; ainsi l'éclipse commencera plus tard, et elle finira plutôt. Au contraire, la durée de l'éclipse annulaire est augmentée par l'inflexion; et la bande terrestre, où l'é-

clipse paroît annulaire, est élargie par cette cause physique. M. du Séjour a comparé toutes les observations de l'anneau faites en 1764, et il a reconnu que la durée en avoit été plus longue qu'elle n'auroit dû l'être (*Mém. acad.* 1767, *pag.* 201). La circonstance la plus favorable pour constater ces phénomenes seroit celle d'une éclipse qui seroit totale pour les pays où la Lune seroit fort élevée sur l'horizon, et annulaire dans les pays où la Lune seroit plus basse : telle fut l'éclipse du 23 septembre 1699. Ce point d'astronomie physique mériteroit qu'on entreprît quelques voyages pour observer les éclipses de Soleil dans les pays où elles sont totales ou annulaires; il exige du moins qu'on se rende très attentif à mesurer les distances des cornes avec de bons héliometres, le plus près qu'il est possible du commencement ou de la fin d'une éclipse.

1994. L'inflexion de 3″½ est égale au double de la réfraction horizontale qui a lieu dans l'atmosphere de la Lune, multipliée par la distance de la Lune au Soleil, et divisée par la distance du Soleil à la Terre (*Mém. acad.* 1767, *p.* 215). L'attraction du globe lunaire sur le rayon qui en rase les bords, y produiroit une courbure hyperbolique, et une semblable inflexion mais elle est absolument insensible (*Ibid. pag.* 213; *Traité, pag.* 427).

Différentes sortes d'éclipses.

1995. Les éclipses des planetes par la Lune se calculent de la même maniere que les éclipses de Soleil, ou d'étoiles; la seule différence consiste à prendre la somme des mouvemens de la planete et de la Lune en latitude, et de leurs mouvemens en longitude, réduits à la région de la planete (3881), ou bien leur différence, suivant que les mouvemens se font en sens contraires, ou du même sens; cela donne le mouvement relatif en longitude et en latitude, qui sert à trouver l'inclinaison de l'orbite relative (1745), dont on se sert si l'on emploie l'opération graphique. On prend de même la somme ou la différence des mouvemens apparens (1973), pour avoir l'inclinaison apparente, avec laquelle on calcule l'immersion, l'émersion, et le milieu de l'éclipse (1906).

Les éclipses des planetes par la Lune sont assez fréquentes; Mercure est la seule planete que l'on puisse rarement observer quand elle est cachée par la Lune; je n'en connois que deux observations : une qui fut faite au Brésil par Margraf, dans le dernier siecle; et une du 8 mai 1774, au château de Bon-repos près de Toulouse.

Vénus fut éclipsée en 1704, 1708, 1715, 1720, 1785; Mars en

1676, 1707, 1726; Jupiter en 1686, 1704, 1708, 1715, 1716, 1740, 1788; Saturne en 1630, 1661, 1671, 1678, 1687, 1722, 1728, 1762, 1775 (*Mém. de l'acad.* 1775).

1996. Les planetes sont quelquefois assez proche l'une de l'autre pour s'éclipser mutuellement; Mars parut éclipser Jupiter le 9 janvier 1591; il fut éclipsé par Vénus le 3 octobre 1590 (Képler, *Astron. Pars Opt. p.* 305); Mercure fut caché par Vénus le 17 mai 1737 (*Philos. Trans. n°.* 450).

1997. On trouve aussi plusieurs exemples des occultations d'étoiles par les planetes : Saturne couvrit l'étoile ∘ de 6e grandeur, qui est à la corne australe du Taureau, le 7 janvier 1679, suivant Kirch, (*Miscell. Berolin. p.* 205).

Jupiter couvrit l'étoile du Cancer appellée l'*Ane austral*, le 4 septembre 241 avant J. C.; Gassendi observa le 19 décembre 1633, Jupiter qui cachoit une étoile aux pieds des Gémeaux; et Poind observa en 1716 l'occultation de l'étoile *a* des Gémeaux par Jupiter (*Phil. Trans. n°.* 350; *Abrégé, IV,* 319).

Le 18 janvier 272 avant J. C. Mars couvrit l'étoile boréale au front du Scorpion. Gassendi vit Mars couvrir l'étoile qui est à l'extrémité de l'aile de la Vierge. Mars en 1672 couvrit une des étoiles du Verseau, et nous avons eu occasion de parler des remarques dont ce phénomene fut l'occasion (1719, 2275).

Vénus dut cacher la belle étoile au cœur du Lion, le 16 septembre 1574, suivant Mœsthlinus, et le 25 septembre 1598, suivant Képler (*Astr. Pars Opt.* Riccioli, *Almag. I,* 721).

1998. Les cometes couvrent aussi quelquefois des étoiles fixes. Le 12 de janvier 1764, je vis la comete qui paroissoit alors, sortant de dessus une étoile de septieme grandeur à la queue du Cygne; l'étoile étoit encore enveloppée dans la chevelure de la comete. On a vu une semblable éclipse en 1775. Ces sortes d'observations seroient très curieuses pour la théorie des cometes, pourvu qu'on ait parfaitement les positions des petites étoiles; elles nous feroient connoître la parallaxe de la comete (*art.* 1718), et elles nous donneroient celle du Soleil (3156).

1999. Enfin, on peut regarder comme des especes d'éclipses semblables à celles du Soleil, les passages de Mercure et de Vénus sur son disque dans leurs conjonctions inférieures; mais à cause de l'importance de ces passages, du grand nombre d'ouvrages publiés à ce sujet, et des voyages immenses qu'ils ont occasionnés, je vais en parler plus au long, et ce sera la matiere du livre suivant.

LIVRE ONZIEME.

DES PASSAGES DE VÉNUS ET DE MERCURE SUR LE SOLEIL.

VÉNUS et Mercure, qui tournent autour du Soleil à une moindre distance que la Terre (*art.* 1088), se trouvent entre nous et le Soleil, à chaque révolution synodique; et si ces planetes n'ont alors que peu de latitude, on voit sur le Soleil une tache noire et ronde, dont la largeur paroît occuper environ la trentieme partie de celle du Soleil, si c'est Vénus; et seulement la 150e partie, si c'est Mercure.

2000. Averrhoès crut avoir apperçu Mercure sur le Soleil; mais Albategnius, et Copernic (*liv. II, c.* 10), ne pensoient pas qu'il fût possible de l'y voir, à la vue simple; et ils avoient raison. Képler crut aussi avoir apperçu Mercure sur le Soleil, à la vue simple; mais il reconnut ensuite que ce ne pouvoit être qu'une tache du Soleil : il s'en trouve quelquefois d'assez grosses pour qu'on puisse les entrevoir sans lunettes. Galilée assuroit en avoir vu, et les avoir montrées à d'autres, à la vue simple; et nous en citerons des exemples (3235). Mais à l'égard de Mercure qui n'a que 12″ de diametre, quand il est dans sa conjonction inférieure, il est impossible qu'on l'ait jamais apperçu sur le Soleil, sans le secours des lunettes : c'est tout ce que l'on pouvoit faire, en 1761, que d'y appercevoir Vénus, qui avoit 58″ de diametre (1391, 2157); je n'oserois même assurer qu'on l'ait apperçue à la vue simple. Gassendi nous assure que plusieurs fois, et entre autres le 10 septembre 1621, il n'a pu voir des taches qui, mesurées avec des lunettes, avoient une minute et un tiers de diametre. Cependant ceux qui ont bonne vue les voient avec de simples verres noirs, quand le ciel est bien pur : mais il n'est pas étonnant qu'avant la découverte des lunettes, on n'eût jamais observé Mercure, ni même Vénus, sur le Soleil.

2001.

2001. Ces passages n'arrivent que lorsque Vénus et Mercure, dans leur conjonction inférieure, n'ont pas une latitude apparente plus grande que le demi-diametre du Soleil, et celui de la planete, c'est-à-dire, lorsque la conjonction arrive fort près du nœud, tout au plus à la distance de 1° $\frac{3}{4}$ pour Vénus.

2002. Ces passages sont importans; il fournissent un moyen de déterminer exactement le lieu du nœud de Mercure, ou de Vénus, et la longitude héliocentrique, indépendamment de la parallaxe du grand orbe : mais les passages de Vénus ont sur-tout l'avantage singulier de pouvoir faire connoître exactement la parallaxe du Soleil (2151), d'où dépendent les distances de toutes les planetes entre elles, et par rapport à nous (1222); c'est ce qui leur a donné une si grande célébrité, et ce qui m'engage à les traiter séparément dans ce XI[e] livre.

Il y a dans les passages de Vénus trois choses qui concourent à donner de l'avantage à ces sortes d'observations; 1°. la grande précision avec laquelle on observe le contact de ces petits corps très noirs, placés sur un fond très brillant; il n'y a dans l'astronomie que ce seul cas où l'on puisse observer une distance à un dixieme de seconde près; 2°. le rapport connu de la parallaxe de Vénus au Soleil, avec celles de toutes les autres planetes; 3°. la grandeur de cette parallaxe qui va jusqu'à 21", et qui produit un quart-d'heure de différence entre les observations extrêmes.

2003. Képler fut le premier qui, en 1627, après avoir dressé sur les observations de Tycho ses tables rudolphines, osa marquer les temps où Vénus et Mercure passeroient devant le Soleil; il annonça même un passage de Mercure pour 1631, et deux passages de Vénus, l'un pour 1631, et l'autre pour 1761, dans un avertissement aux astronomes, publié à Leipsick en 1629 : *Admonitio ad astronomos rerumque cœlestium studiosos, de miris rarisque anni 1631 phœnomenis, Veneris putà et Mercurii in Solem incursu.* Képler n'avoit pas pu donner à ses tables un degré de perfection assez grand pour annoncer d'une maniere exacte et infaillible ces phénomenes, dans lesquels le calcul dépend de quantités fort petites; cependant les deux passages qu'il avoit prédits eurent lieu effectivement, et celui de Mercure fut observé (2006) huit jours avant la mort de Képler, arrivée le 15 novembre 1631, nouv. st. Celui de Vénus qu'il avoit annoncé pour le 6 décembre 1631, dut arriver aussi : il est vrai que Gassendi se prépara inutilement à l'observer; mais, suivant mes tables, il devoit être fini le 7 au matin, avant le lever du Soleil. Il y eut un autre passage de Vénus en 1639,

que Képler n'avoit point annoncé, et qui fut observé en Angleterre (2044).

2004. Vénus revient toujours à sa conjonction inférieure au bout d'un an et 219 jours (1173) : mais il en est de ces éclipses comme des éclipses de Lune (1750); il ne suffit pas que Vénus soit en conjonction avec le Soleil, il faut qu'elle soit vers son nœud, et que sa latitude vue de la Terre n'excede pas le demi-diametre du Soleil, c'est-à-dire, environ 16'. Soit C le centre du Soleil (*Pl. XV, fig.* 125); NCD l'écliptique; NEVS l'orbite de Vénus; V Vénus en conjonction, c'est-à-dire, au moment où elle répond perpendiculairement au point C de l'écliptique où est le Soleil; CV la latitude géocentrique de Vénus; si cette latitude ou seulement la perpendiculaire CM est plus petite que le rayon CO du Soleil, il est évident que Vénus paroîtra sur le disque SOE du Soleil.

2005. Il en est de même de Mercure, dont la révolution synodique moyenne, ou le retour de ses conjonctions au Soleil, est de 116 jours (1173). Dès qu'on connoît l'heure d'une de ces conjonctions inférieures, on peut trouver toutes les autres. On choisit celles qui arrivent quand le Soleil est près du nœud de Mercure, c'est-à-dire, vers le commencement de mai et de novembre; et en les calculant en détail (2046), l'on voit bientôt si la lat. géoc. au moment de la conjonc. vraie n'excede pas le demi-diam. du Soleil, et si Mercure peut paroître sur le disque du Soleil. C'est ainsi que Halley calcula, en 1691, 29 passages de Mercure tant pour le dernier siecle que pour celui-ci. Il y employoit des périodes de 6 ans, de 7, de 13, de 46, et de 265, qui fort souvent ramenent les passages de Mercure sur le Soleil au même nœud, et qui suffisent pour indiquer les années où il peut y en avoir (2021); de même pour les passages de Vénus, il reconnut les périodes de 8 ans, de 235, et de 243, qui ramenent les passages sur le Soleil, et il en calcula dix-sept (2039).

2006. La premiere observation que l'on ait eue d'un semblable phénomene, est le passage de Mercure, observé à Paris par Gassendi, le 7 novembre 1631 au matin; il en rendit compte lui-même dans une lettre adressée à Schickardus la même année, et qui se trouve à la fin de son *Institutio astronomica*, sous ce titre : *Mercurius in Sole visus.* J'ai été plus plus heureux, dit-il, que tous ces philosophes hermétiques, occupés à chercher *Mercurium in Sole* (c'est-à-dire, la pierre philosophale) : je l'ai trouvé; je l'ai contemplé, là où personne avant moi ne l'avoit vu. En conséquence de l'avertissement de Képler, publié en 1629, Gassendi se préparoit à observer Mercure sur le Soleil dans une chambre obscure, en recevant

l'image du Soleil sur un carton, au travers d'une lunette, comme il avoit coutume de le faire pour les éclipses de Soleil; dans la chambre qui étoit au-dessous, il avoit placé un observateur avec un quart de cercle de deux pieds, pour mesurer la hauteur du Soleil au premier signal; ce qui devoit lui donner le temps vrai de chaque observation (1033). Dès le 5 novembre il vouloit chercher Mercure sur le Soleil; mais le ciel fut pluvieux toute la journée, et le 6 il eut encore presque tout le jour un ciel couvert. Le 7 au matin, il ne put appercevoir le Soleil qu'au travers des nuages jusqu'à 9 heures; il remarqua pour lors un petit point noir sur son image du Soleil; mais ne croyant pas que le diametre de Mercure pût être si petit, il ne soupçonna pas que ce fût cette planete, et ne marqua sa position que d'une maniere assez vague. Cependant Gassendi fit ensuite réflexion que ce pouvoit être une petite tache formée ce jour-là; elle pouvoit servir à y comparer Mercure s'il venoit à y paroître ensuite; au moyen de quoi l'on pourroit déterminer la parallaxe de Mercure par cette tache, si dans quelqu'autre pays on se trouvoit avoir fait une pareille observation; en conséquence il mesura sa distance au centre du Soleil: quelque temps après il la mesura de nouveau, et trouva la distance un peu plus grande; il fut très étonné de cette différence, et commença de croire que ce n'étoit point une tache ordinaire, puisqu'elle avoit un mouvement si sensible; il eut même quelque idée que ce pouvoit être Mercure, mais sans oser se le persuader, tant il étoit préoccupé de l'idée que Mercure paroîtroit beaucoup plus gros. Enfin le Soleil ayant reparu, Gassendi mesura de nouveau la distance des centres, et la voyant fort augmentée, il comprit enfin que c'étoit Mercure qu'il voyoit; il frappa du pied pour avertir de prendre hauteur, afin d'avoir le temps vrai : mais celui qu'il avoit placé au quart de cercle avoit quitté son poste, ce qui lui fit perdre encore beaucoup de temps, en sorte qu'il ne put faire, pour ainsi dire, d'autre observation que celle de la sortie de Mercure; elle arriva à $10^h\ 28'$, le Soleil ayant $21°\ 44'$ de hauteur apparente; Mercure étoit à $32°\frac{1}{2}$ du vertical du centre du Soleil : mais Gassendi avoit quelque doute sur ce dernier point.

Ce passage de 1631, observé à Paris par Gassendi, le fut aussi à Insprук, par le P. Jean-Baptiste *Cisatus*, Jésuite; à Rufac en Alsace, par Jean *Remus Quietanus*, médecin; et à Ingolstadt par un anonyme : mais l'observation de Gassendi est la seule dont on ait tiré des résultats utiles à l'astronomie.

Ce passage de Mercure étant la premiere observation que les astronomes aient eue d'une longitude héliocentrique de cette planete,

a été employé pour la théorie de Mercure par plusieurs astronomes; suivant Cassini (*Elém. d'ast. pag.* 592), le milieu de ce passage dut arriver le 7 novembre 1631, à 7ʰ 44′ 16″ du matin, t. vr. et la conjonction vraie, à 7ʰ 50′, le lieu du Soleil et celui de Mercure étant à 7ˢ 14ᵈ 41′ 35″, et le lieu du nœud à 1ˢ 13° 24′ 43″; on peut voir aussi le calcul qu'en fit Halley (*Philos. Trans.* 1725). J'ai placé le résultat de ce passage parmi les observations de Mercure (*liv. VI, p.* 132).

2007. Depuis ce temps-là, nous avons eu 14 autres passages de Mercure sur le Soleil, dont j'ai mis aussi les résultats avec les autres observations de Mercure : on trouvera le détail des 8 premiers dans les *Elémens* de Cassini. Le second passage est celui du 3 novembre 1651, n. st., qui fut observé à Surate, dans les Indes, par *Shakerlaeus* (Shakerley), Anglois, qui avoit entrepris exprès ce grand voyage, pour observer ce passage qu'on ne pouvoit voir en Europe. L'observation est rapportée dans Wing, *Astronomia britannica;* mais elle est trop imparfaite pour qu'on en puisse faire usage.

2008. Le troisieme est celui du 3 mai 1661. Il fut observé à Dantzick par *Hevelius*, qui composa à ce sujet l'ouvrage intitulé, *Mercurius in Sole visus.* Cassini (*pag.* 584) en a fait un grand usage pour la théorie de Mercure. C'étoit le premier passage qu'on eût observé vers le nœud descendant; il fut aussi observé à Londres par *Huygens, Mercator* et *Street.* J'ai donné le calcul plus exact de l'observation d'Hevelius (*Mém.* 1786).

2009. Le 4ᵉ passage de Mercure arriva le 7 novembre 1677, et fut observé par Halley à l'isle de Sainte-Hélene, où il étoit allé pour cette observation; il le fut aussi par Gallet, à Avignon; par Tounley, en Angleterre; et par un anonyme, à Montpellier. J'ai donné le calcul exact de l'observation de Halley (*Mém.* 1786).

2010. Le 5ᵉ passage de Mercure fut observé le 10 novemb. 1690; à Canton, dans la Chine, par les PP. Fontanay et le Comte, jésuites; à Nuremberg, par *Wurzelbau;* à Erford, par *Kirch;* à Varsovie, par le P. *Kochanski;* à Sommerfeld, près de Leipsick, par Michel *Arnold.*

2011. Le 6ᵉ passage fut observé le 3 novembre 1697; à Paris, par Cassini, Maraldi et la Hire; à Roterdam, par Cassini le fils; à Tchaotcheoufou, dans la Chine, par le P. Fontanay; à Pékin, par le P. Visdeloup, jésuite; à Nuremberg, par Wurzelbau, etc. De l'Isle, qui, dans un avertissement, parle de toutes ces observations, a laissé dans ses manuscrits les détails de celles qui furent faites à la Chine; celle de Paris est rapportée par Cassini.

Je ne parle pas ici d'un passage du 5 mai 1707, qui fut entrevu à

Copenhague par Romer, sans qu'on en ait tiré aucune conséquence utile. On en attendoit un le 8 mai 1720 au matin. De l'Isle, qui étoit pour lors à l'hôtel de Taranne, chercha Mercure inutilement; et nous savons actuellement qu'il n'y avoit point de passage.

2012. Le 7ᵉ passage est du 9 novembre 1723: il fut observé à Paris, à Londres, à Gênes, à Bologne, à Padoue, etc. Halley, dans les Transactions philosophiques de 1725, en a fait usage pour corriger ses tables de Mercure; et de l'Isle donna à cette occasion des recherches assez étendues (*Mém. de l'acad.* 1723).

2013. Le 8ᵉ passage arriva le 11 novembre 1736 : c'étoit l'observation la plus complete qu'on eût faite en Europe d'un passage de Mercure; car en plusieurs endroits l'on observa l'entrée et la sortie. On peut voir à ce sujet les *Mém. de l'acad.* 1736.

2014. Le 9ᵉ passage est celui du 2 mai 1740, observé seulement à Cambridge, dans la nouvelle Angleterre, par Winthrop : l'observation se trouve dans les Transactions philosophiques; elle servit à de l'Isle en 1752, pour prédire le passage de 1753, en lui apprenant qu'il falloit ajouter 1′ 23″ à la longitude héliocentrique de Mercure, tirée des tables de Halley; le passage de 1740 étoit le second qu'on eût vu dans le nœud descendant. De l'Isle étoit allé exprès de Pétersbourg à Beresow, en Sibérie, pour y faire cette observation; mais les nuages se dissiperent une heure trop tard, et il manqua l'objet de ce pénible voyage.

2015. Le 10ᵉ passage a été observé dans toute l'Europe, le 5 novembre 1743 (*Mém. de l'acad.* 1743).

2016. Le 11ᵉ est celui du 6 mai 1753 : c'est le troisieme qu'on ait vu dans le nœud descendant; il a été observé de même dans toute l'Europe. On eut à Paris, et j'eus moi-même au château de Meudon l'observation la plus exacte; ce fut à cette occasion que je donnai ma méthode pour calculer ces sortes d'observations (2128). *Mém. de l'acad.* 1753 et 1754.

2017. Le 12ᵉ passage de Mercure est celui du 7 novembre 1756, observé à Pékin par le P. Amiot et le P. Gaubil, et à Pondicheri par le P. Cœurdoux, tous trois missionnaires jésuites. De l'Isle a donné le détail de cette observation avec les conséquences qu'il en avoit tirées, dans les *Mém. de l'acad.* pour 1758 (*voyez* l'art. 2158).

2018. Le 13ᵉ passage a été vu le 9 novembre 1769, au soir. La conjonction a dû arriver à 10ʰ 33′, avec 7ˢ 17° 50′ 49″ de longitude, et 7′ 39″ de latitude géocentrique; j'en ai rapporté les observations et les calculs dans les *Mém. de l'acad.* 1772. Il y en avoit un en 1776, qui n'a pas pu s'observer.

2019. Le 14e passage est celui de 1782; il a été vu à Paris, et ailleurs : j'en ai donné les détails dans les *Mém. de l'acad.* 1782.

2020. Le 15e est celui de 1786, qui a été complètement observé, et qui m'a donné occasion de faire de nouvelles tables de Mercure, en me faisant voir que le mouvement de l'aphélie étoit trop fort dans mes premieres tables (*Mém. de l'acad.* 1786).

2021. Les observations de ces passages font voir qu'il y a des périodes pour ces sortes de phénomenes; et Halley, qui les avoit apperçues, s'en servit pour les prédire tous (*Philos. Trans.* 1691, *pag.* 511; *Abrégé, I,* 430); Whiston (*Praelect. astron.*) : mais ces calculs ont été refaits sur mes nouvelles tables. La période la plus courte pour les passages de Mercure, dans son nœud *ascendant,* au mois de novembre, est celle de 6 ans 8^j 18^h 39$'$; on compte 1^j de plus, quand l'année du premier passage est la bissextile ou la suivante, par exemple, de 1776 à 1782, parcequ'il n'y a pour lors qu'une bissextile entre les deux passages qui arrivent dans les 6 ans; c'est-à-dire qu'on n'a compté qu'une fois un 29e jour au mois de février (1541). S'il y avoit une bissextile omise dans l'intervalle, par la regle du calendrier grégorien (1547), comme en 1700 ou 1800, il faudroit encore ajouter un jour de plus, et cette regle est générale pour toutes les périodes dont nous allons parler. Après cet intervalle de six ans, Mercure paroît de 31$'$ 26$''$ plus au nord que la premiere fois. Ainsi, pour que l'on puisse observer deux passages de Mercure sur le Soleil, au nœud ascendant, dans l'intervalle de 6 ans, il faut que, dans le premier passage, Mercure ait eu une latitude très méridionale, et qu'il ait presque rasé le bord austral du Soleil, afin que, dans le passage suivant, il puisse rencontrer le bord boréal du Soleil; cette circonstance arrive très rarement, en sorte que cette période ne ramene guere de passages.

2022. La seconde période est celle de 7 ans moins 7^j et 57$'$; elle avoit lieu de 1769 à 1776 : mais lorsqu'il n'y a qu'une bissextile en 7 ans, ce qui arrive quand l'année du premier passage est bissextile, on ajoute un jour à la date du second passage, ou l'on retranche du premier seulement 6 jours. A la fin de cette période, Mercure passe 23$'$ 12$''$ plus au midi que la premiere fois; c'étoit seulement 22$'$ 47$''$, suivant les calculs de Halley. Cette période ne peut avoir lieu que dans le nœud ascendant.

2023. La troisieme période est celle de 13 années, qui a eu lieu de 1769 à 1782, en ajoutant 2^j 17^h 42$'$; ou 1^j de moins, s'il se trouve 4 bissextiles dans l'intervalle, c'est-à-dire, si le premier passage est arrivé dans l'année qui précede la bissextile, ou qui est la troisieme

après la bissextile, Mercure passe 8′ 14″ plus au nord que la premiere fois. Cette période est fréquente dans l'un et l'autre nœud.

La quatrieme est de 46 années juliennes, et 4^h 42′; on suppose douze bissextiles dans l'intervalle, comme cela arrive lorsque la premiere observation a lieu dans la seconde ou la troisieme année après la bissextile; sinon il y a un jour de plus : il en faut encore ajouter un, quand le calendrier grégorien fait omettre une intercalaire (1547). Mercure, à la fin de cette période, passe 1′ 35″, plus au nord qu'au commencement de cette période ; c'étoit 1′ 22″, suivant Halley, qui donnoit au nœud trop de mouvement. Cette période a eu lieu de 1631 à 1677.

2024. La cinquieme période est celle de 217 années juliennes ; c'est la plus exacte de toutes, quoiqu'elle n'eût pas été remarquée jusqu'ici : il faut ajouter seulement 6^h 11′, s'il y a 54 bissextiles, ou si le premier passage est arrivé dans une année qui précede la bissextile, comme de 1631 à 1648, sinon il faut ajouter encore un jour; il en faut de plus ajouter deux, à cause des omissions de bissextiles en 1700 et 1800. Au bout de cette période Mercure passe seulement de 6″ plus au midi, suivant mes tables.

2025. Enfin, la sixieme période est celle de 263 années juliennes, 1^j 11^h 0′, comme de 1631 à 1894; on compteroit un jour de plus, si l'année du premier passage étoit bissextile, ou qu'il n'y eût que 65 bissextiles dans l'intervalle. L'omission de deux intercalaires en 1700 et en 1800 dans le calendrier grégorien, fait que la période qui commence aux passages de 1605, 1618 et 1631, sera de 263 ans 3^j 11^h. Après cet intervalle, Mercure passe 1′ 40″ plus au nord, suivant moi; Halley ne trouvoit que 10″, et il donnoit un jour de moins à cette période, mais par une erreur de calcul.

2026. Dans les passages du mois de mai au nœud descendant, les périodes de 6 et de 7 ans ne peuvent avoir lieu, parceque Mercure étant plus près de la Terre, sa latitude géocentrique est plus grande, même à égale distance du nœud ; Mercure paroît nécessairement au nord du Soleil, s'il l'a rencontré au commencement de cette période. Aussi il y a beaucoup plus de passages au mois de novembre qu'au mois de mai, parceque la section du cône est d'environ 70′, tandis qu'au mois de mai elle n'est que 39′, à cause de la grande distance de Mercure au Soleil. Les passages du mois de mai sont renfermés dans 6° de changement dans l'argument de latitude, tandis qu'au mois de novembre, vers le nœud ascendant, il y a 10° pour l'étendue dans laquelle ils peuvent arriver.

Ainsi la période la plus courte pour les retours de Mercure sur le

Soleil au mois de mai, est celle de 13 années juliennes 3^{j} 7^{h} et 53', sauf les considérations énoncées art. 2023, et Mercure passe plus au midi, de 17' 7". Cette période a eu lieu de 1740 à 1753.

2027. La seconde période est de 33 années juliennes, moins 2^{j} 0^{h} 52'; on retranche un jour de plus, si la premiere année est celle qui précede la bissextile, ou si la derniere année est bissextile, comme de 1707 à 1740. Mercure passe plus au nord de 13' 46".

2028. La troisieme période est de 46 années juliennes, en supposant qu'il y en ait 12 de bissextiles (2023), avec 6^{h} 40' de plus. Mercure passe de 3' $\frac{1}{4}$ plus au midi, à la fin de cette période, comme de 1661 à 1707.

2029. La quatrieme est de 217 ans et 2^{h}, en supposant 54 bissextiles dans cet intervalle (2024). Mercure est plus boréal de 13", comme de 1661 à 1878.

2030. La cinquieme est celle de 263 années juliennes, un jour et neuf heures, en observant ce qui a été dit (2025). Mercure passe seulement de 3' plus au midi que la premiere fois, suivant mes tables. Ces périodes de 217 et de 263 ans sont si exactes, qu'elles suffiroient presque pour trouver tous les passages futurs au moyen de ceux qui sont calculés; ainsi, à commencer de 1822 pour le nœud ascendant, et 1878 pour le nœud descendant, on verroit les passages revenir dans le même ordre qui a eu lieu depuis 1600. Pour savoir s'il n'y en auroit pas quelques uns de plus, on se serviroit des périodes plus courtes, 6, 7, 13 et 33 ans.

2031. Il y avoit plusieurs passages dans la liste de Halley, qui ne pourront avoir lieu, parceque la latitude sera plus grande qu'il n'avoit cru. M. Trebuchet en avoit fait la remarque à l'occasion des passages de Vénus, et il avoit fait une nouvelle liste, en se servant de mes tables de Mercure, plus exactes que celles de Halley. En même temps il avoit poussé les calculs beaucoup plus loin que Halley, qui s'étoit arrêté à 1799. M. de Lambre a refait cette table, en calculant chaque passage comme s'il eût été unique, et il s'est assuré qu'elle contenoit bien exactement tous les passages qui sont donnés par les tables. Enfin je l'ai corrigée en 1787 sur mes nouvelles tables de Mercure; elle contient 40 passages : on voit pour chacun le temps moyen de la conjonction vraie de Mercure au Soleil, la longitude en conjonction, le temps vrai du milieu du passage, la demi-durée et la plus courte distance des centres du Soleil et de Mercure. On a négligé dans cette table les petites équations du Soleil et l'aberration du Soleil et de Mercure : pour tenir compte de celle-ci, il suffiroit d'ajouter 6' $\frac{1}{2}$ de temps, pour avoir les temps des conjonctions apparentes (2883).

Passages

Passages de Mercure sur le Soleil, calculés pour trois siecles par les nouvelles tables.

Années.	Conjonction.	Temps moyen.			Longitude géocentrique.				Milieu. Temps vrai.			Demi-durée.			Plus courte distance.		
1605	1 nov.	7h	46'	13"	7s	9°	28'	34"	8h	23'	28"	1h	20'	14"	14'	5"	A
1615	2 mai	21	48	50	1	12	25	35	22	13	8	3	27	54	7	37	B
1618	4 nov.	1	39	15	7	12	5	6	2	4	9	2	33	25	5	42	A
1628	5 mai	5	56	42	1	15	30	47	5	33	25	3	9	34	9	41	A
1631	6 nov.	19	36	20	7	14	41	35	19	44	0	2	41	20	2	40	B
1644	8 nov.	13	13	10	7	17	17	36	13	13	51	1	58	27	10	48	B
1651	2 nov.	14	31	30	7	10	36	30	13	11	17	1	45	25	12	20	A
1661	3 mai	4	48	38	1	13	33	27	5	1	44	3	48	0	4	26	B
1664	4 nov.	6	26	48	7	13	7	51	6	48	58	2	38	44	4	2	B
1674	6 mai	12	50	25	1	16	38	5	12	17	45	2	15	12	13	4	A
1677	7 nov.	0	18	7	7	15	45	57	0	36	47	2	36	20	4	15	B
1690	9 nov.	18	6	0	7	18	20	46	18	6	10	1	48	5	12	12	B
1697	2 nov.	17	42	0	7	11	33	50	18	11	18	1	58	13	10	37	A
1707	5 mai	11	28	19	1	14	40	0	11	34	36	3	57	8	0	58	B
1710	6 nov.	11	19	24	7	14	10	50	11	38	59	2	42	18	2	20	A
1723	9 nov.	5	16	0	7	16	47	20	5	20	30	2	29	20	6	0	B
1736	10 nov.	22	59	23	7	19	23	38	22	55	10	1	21	14	13	58	B
1740	2 mai	10	36	37	1	12	43	49	12	14	0	1	30	0	14	44	B
1743	4 nov.	22	26	8	7	12	37	32	22	55	30	2	15	55	9	5	A
1753	5 mai	18	29	50	1	15	48	0	18	27	0	3	53	22	2	23	A
1756	6 nov.	16	17	28	7	15	13	41	16	36	19	2	42	37	1	2	B
1769	9 nov.	10	7	7	7	17	50	49	10	11	4	2	23	46	7	29	B
1776	2 nov.	9	10	7	7	11	3	36	9	49	53	0	36	42	15	43	A
1782	12 nov.	3	48	43	7	20	26	41	3	41	10	0	37	22	15	43	B
1786	3 mai	17	11	49	1	13	49	45	16	44	20	2	44	10	11	21	B
1789	5 nov.	3	9	50	7	13	40	48	3	37	0	2	26	9	7	22	A
1799	7 mai	1	13	50	1	16	54	11	1	2	21	3	42	22	5	31	A
1802	8 nov.	20	57	2	7	16	16	27	21	11	30	2	43	19	1	0	B
1815	11 nov.	14	44	19	7	18	52	42	14	46	18	2	13	52	9	14	B
1822	4 nov.	14	2	34	7	12	6	53	14	39	34	1	21	37	14	0	A
1832	5 mai	0	0	43	1	14	56	45	0	27	21	3	28	2	8	16	B
1835	7 nov.	7	57	15	7	14	43	8	8	21	42	2	33	53	5	37	A
1845	8 mai	8	3	39	1	18	1	49	7	42	18	3	22	33	8	58	A
1848	9 nov.	1	47	4	7	17	19	19	1	59	3	2	41	33	2	36	B
1861	11 nov.	19	29	34	7	19	54	44	19	29	34	2	0	23	10	52	B
1868	4 nov.	18	53	6	7	13	9	42	19	27	41	1	45	21	12	20	A
1878	6 mai	6	47	51	1	16	3	50	7	4	34	3	53	31	4	39	B
1881	7 nov.	12	46	59	7	15	46	57	13	8	53	2	39	6	3	57	A
1891	9 mai	14	54	18	1	19	9	1	14	23	6	2	34	20	12	21	A
1894	10 nov.	6	36	26	7	18	22	9	6	45	49	2	37	36	4	20	B

Pour les deux passages prochains, l'entrée et la sortie apparentes pour Paris seront en 1789 1h 18′ et 6h 10′ du soir [a]; en 1799, 9h 15′ du matin et 4h 36′ du soir.

2032. LES PASSAGES DE VÉNUS ont de semblables périodes: on se sert de sa révolution synodique, 583j 22h 6′ 52″, 13 (1173), par laquelle on trouve les temps de toutes les conjonctions moyennes; lorsqu'on a calculé ces conjonctions, on choisit celles qui arrivent aux environs des nœuds; c'est actuellement vers le commencement de juin et de décembre : on les calcule plus exactement (2047), et l'on trouve les retours de ces conjonctions.

La premiere période qui peut avoir lieu dans les passages de Vénus sur le Soleil à son nœud ascendant, ou au mois de décembre, est celle de 8 ans, moins 2j 11h 48′; Vénus passe la seconde fois 24′½ plus au midi que la premiere fois, comme de 1631 à 1639. Il n'y a point de différence à faire pour le nombre de jours, relativement aux années bissextiles; seulement s'il y avoit dans l'intervalle une année séculaire commune, on ajouteroit un jour à la date du second passage. Cette remarque a lieu pour toutes les autres périodes dont nous allons parler.

2033. La seconde est celle de 235 années juliennes 2j 13h, comme de 1639 à 1874. On compte un jour de plus, si la premiere conjonction s'est trouvée dans une année bissextile; et un jour de plus encore pour chaque année centenaire commune. La route de Vénus est de 24′¼ plus boréale dans la seconde observation que dans la premiere. Halley supposoit 11′ 33″ seulement, parcequ'il ne tenoit pas compte du mouvement du nœud, par rapport aux étoiles (1340).

2034. La période de 243 années juliennes ramene aussi les passages de Vénus, en ôtant seulement une heure du premier, comme de 1639 à 1882. Mais si la premiere année a été bissextile, on compte un jour de plus pour l'intervalle. On ajoute encore un jour pour chaque année centenaire qui n'auroit pas été bissextile. La route de Vénus, au bout de 243 ans, est la même, à 5″ près, suivant mes tables. Halley la croyoit plus méridionale de 13′ 8″. Ces périodes ne sont pas toujours rigoureusement les mêmes en différens siecles; il y a 25′ de plus vers l'an 2600, que vers l'an 900 pour la derniere période.

2035. Dans les conjonctions de Vénus qui arrivent au mois de juin, vers le nœud descendant, les mêmes périodes ont lieu, mais avec quelques différences. La premiere est de 8 ans moins 2j 7h 30′;

(a) Avant que ce livre paroisse, nous serons probablement en état de mettre dans le supplément le résultat de l'observation.

et Vénus devient plus boréale de 19′ 34″, suivant les observations qu'on a faites dans les deux passages de 1761 et 1769.

2036. La seconde période est de 235 ans $2^j\ 11^h\ \frac{2}{3}$. Vénus devient plus australe de 21′ 46″ à la fin de cette période, comme de 1769 à 2004.

2037. La troisieme est de 243 ans $4^h\ 9'$, comme de 1769 à 2012. Vénus à la fin de cette période paroît plus australe de 2′ 16″. Cette période de 243 ans est sans contredit la plus parfaite et la plus commode; elle suffit même, si on la combine avec celle de 8 ans, pour trouver tous les passages par le même nœud. Il convient donc de l'employer de préférence à toutes les autres. Quand on aura, par son moyen, déterminé un nouveau passage, on pourra se servir alors de la période de 8 ans, qu'on appliquera par addition, ou par soustraction, suivant les cas. Si, dans le passage déterminé par la période de 243 ans, la plus courte distance est australe dans le nœud descendant, on ajoutera les 8 ans, et on les retranchera si elle étoit boréale. Dans l'autre nœud, la période de 8 ans est additive, si la distance est boréale, et soustractive dans le cas contraire. Cette opération donnera presque toujours un passage : il suffit que la plus courte distance dans le passage auquel on applique la période de 8 ans, ne soit pas au-dessous de 8′ à 10′ dans le nœud ascendant, ou de 3′ ½ dans le nœud descendant.

C'est ainsi que Halley avoit dû trouver la période de 235 ans; mais il avoit oublié celle de 251 ans, moins deux jours, et Wargentin, qui en fit la remarque, reconnut par ce moyen plusieurs passages que Halley n'avoit point apperçus.

2038. De toutes les périodes qui menent d'un nœud à l'autre, celle de 121 ans ½ est celle qui doit ramener plus souvent les passages: mais l'heure de la conjonction, et la plus courte distance, varient trop sensiblement et trop inégalement, pour qu'on puisse y reconnoître une marche réglée; d'ailleurs, elle indique trop de passages qui n'ont pas lieu réellement. Voilà sans doute pourquoi Halley n'en avoit point parlé : cependant comme elle forme la seule communication qu'il y ait d'un nœud à l'autre, il est bon de la connoître pour savoir comment un seul passage étant connu, on en conclut tous les autres. On peut remarquer dans la table que les passages se suivent presque tous après ces intervalles, 8 ans, et 121 ½; 8, et 105 ½; 8, et 121 ½, etc. Ce qui doit être, puisque ces quatre nombres font 243.

2039. En se servant de ces périodes, Halley calcula 17 passages de Vénus, jusqu'à l'an 2117. M. Trebuchet, en corrigeant les latitudes d'après mes tables, trouva qu'il y en avoit 6 à retrancher; il corrigea

encore deux erreurs de calcul dans Halley ; et il étendit la table jusqu'à l'an 2498. M. de Lambre l'a refaite en entier d'après les tables de Vénus qui étoient dans le quatrieme volume de ma seconde édition; il a trouvé des passages qui avoient été omis par M. Trebuchet, et il a prolongé la table de 500 ans. J'y ai fait des réductions pour les rapprocher de mes nouvelles tables. Les trois passages observés y sont rapportés d'après les observations qu'on en a faites.

2040. Voici les principaux élémens pour les temps les plus éloignés dans l'un et l'autre nœud, suivant les nouvelles tables.

Années des passages	902.	2854.	1032.	2984.
Mouvement horaire relatif héliocent.	1′ 29″ 4	1′ 29″ 6	1′ 34″ 6	1′ 34″ 3
Mouvement en latitude héliocentrique	14 4	14 3	14 1	14 2
Mouvement sur l'orbite relative	1 30 5	1 30 8	1 35 6	1 35 4
Mouvement géocent. sur l'orbite relative	4 7 1	4 6 4	4 0 0	4 0 7
Mouvement en latitude géocentrique	39 2	38 9	35 4	36 6
Inclinaison de l'orbite relative	9° 7′ 33″	9° 4′ 50″	8° 28′ 40″	8° 31′ 0″
Durée du passage central	7h 34 37	7h 54′ 50	7h 53 8	7h 52 59

2041. Si l'on ajoute au dernier passage de l'an 2984, la période de 243 ans, on trouvera la plus courte distance pour le passage suivant, ou pour 3227, presque la même qu'en 1032. Ce qui pourroit faire soupçonner que la suite des passages reviendroit, à peu de chose près, la même que de 1032 à 2984, et recommenceroit tous les 1952 ans, du moins par les tables qui ont servi pour les premiers calculs, et qui supposoient le mouvement séculaire de Vénus, 6s 19° 11′ 30″, celui de l'aphélie, 2° 25′ 0″, et celui du nœud, 51′ 40″; mais depuis ce temps-là j'y ai fait divers changemens.

2042. On trouve dans cette table des passages douteux; et ils sont marqués d'un astérisque (*); par exemple, celui de 902 et celui de 2733. Si l'on augmentoit de 72″ le mouvement séculaire de Vénus, comme certaines observations semblent l'indiquer, le premier n'auroit plus lieu, mais se réduiroit à 15′ 42″; et comme le demi-diametre du Soleil sera de 15′ 45″, on trouveroit qu'il doit y avoir un passage cette année-là. Une petite erreur sur le mouvement du nœud (qui n'est connu que par le passage de 1639), pourroit aussi faire manquer quelques uns de ces passages, comme celui de l'an 2117. Par cette raison, il se pourroit à la rigueur qu'il n'y eût pas eu de passage en 1631, parceque cela tient à une minute de différence sur la latitude de Vénus : il y a cependant lieu de croire qu'il y en eut un, mais qu'il arriva pendant la nuit. On a négligé dans ces calculs les petites équations du Soleil, et l'aberration de Vénus qui donneroit 2′ 21″ à ajouter au temps de la conjonction calculée.

Table des passages de Vénus sur le Soleil pour deux mille ans.

Il y en a trente-cinq, en comptant les cinq qui sont douteux.

Années.	Temps moyen de la conjonction.	Longitude géocentrique.	Milieu du passage. Temps vrai.	Demi-durée pour le centre de Vénus.	Plus courte distance géocentrique.
	Vieux style.				
902	25 nov. 21h 16′ 56″	8s 9° 2′ 55″	20h 43′ 4″	. . . . .	18′ 14″ B *
910	22 nov. 9 18 38	8 6 33 47	9 42 59	3h 39′ 26″	6 15 A
1032	24 mai 6 44 49	2 8 37 45	6 42 20	3 51 29	3 16 A
1040	21 mai 23 15 54	2 6 29 9	23 57 8	. . . . .	16 16 B *
1145	25 nov. 20 0 6	8 11 1 30	19 28 50	. . . . .	17 7 B *
1153	23 nov. 8 1 33	8 8 32 21	8 28 22	3 31 56	7 22 A
1275	25 mai 10 21 23	2 10 57 7	10 13 28	3 42 52	5 18 A
1283	23 mai 2 53 23	2 8 48 30	3 29 16	1 41 58	14 14 B
1388	25 nov. 18 42 48	8 13 0 3	18 13 29	0 41 52	16 2 B
1396	23 nov. 6 48 22	8 10 31 12	7 17 22	3 23 40	8 24 A
1518	25 mai 13 56 10	2 13 16 22	13 42 39	3 29 28	7 21 A
1526	23 mai 6 26 1	2 11 7 35	6 57 5	2 28 57	12 16 B
	Nouveau style.				
1631	6 déc. 17 28 49	8 14 58 50	17 1 43	1 35 5	14 56 B
1639	4 déc. 6 9 40	8 12 32 15	6 39 40	3 17 0	9 0 A
1761	5 juin 17 44 34	2 15 36 31	17 30 10	3 8 0	9 30 A
1769	3 juin 10 7 54	2 13 27 8	10 36 23	2 59 53	10 10 B
1874	8 déc. 16 17 44	8 16 57 49	15 52 48	2 4 41	13 51 B
1882	6 déc. 4 25 44	8 14 29 14	4 59 2	3 1 43	10 29 A
2004	7 juin 21 0 44	2 17 54 23	20 36 19	2 44 50	11 19 A
2012	5 juin 13 27 0	2 15 45 22	13 46 46	3 20 45	8 20 B
2117	10 déc. 15 6 37	8 18 56 52	14 43 21	2 22 50	13 0 B
2125	8 déc. 3 18 40	8 16 28 33	3 53 51	2 48 20	11 28 A
2247	11 juin 0 30 23	2 20 13 16	0 0 34	2 7 52	13 17 A
2255	8 juin 16 53 56	2 18 4 1	17 8 30	3 36 2	6 23 B
2360	12 déc. 13 59 9	8 20 56 9	13 38 52	2 42 47	11 49 B
2368	10 déc. 2 10 2	8 18 27 48	2 47 26	2 29 22	12 37 A
2490	12 juin 3 58 35	2 22 31 58	3 23 19	1 2 14	15 14 A *
2498	9 juin 20 21 2	2 20 22 37	20 30 19	3 46 24	4 29 B
2603	15 déc. 12 54 16	8 22 55 36	12 35 15	2 56 47	10 50 B
2611	13 déc. 1 11 12	8 20 27 38	1 49 51	2 15 20	13 20 A
2733	15 juin 7 23 56	2 24 50 30	6 43 13	. . . . .	17 9 B *
2741	12 juin 23 43 59	2 22 40 58	23 47 59	3 53 23	2 35 B
2846	16 déc. 11 53 15	8 24 55 22	11 35 55	3 7 24	9 55 B
2854	14 déc. 0 13 29	8 22 27 45	0 53 41	1 54 10	14 12 A
2984	14 juin 3 2 22	2 24 59 1	3 1 13	3 56 9	0 45 B

2043. Nous avons dit que Képler avoit annoncé pour 1631 un passage de Vénus, qu'on ne vit point; qu'il y en eut un en 1639, que Képler n'avoit point prédit (2003): Gassendi qui avoit observé le passage de Mercure (2006) desiroit beaucoup de voir celui de Vénus; il raconte fort au long ses tentatives à ce sujet (*Mercurius in Sole visus, et Venus invisa*); l'entrée de Vénus étoit annoncée pour le 6 décembre 1631, vers le coucher du Soleil. Gassendi auroit voulu examiner le Soleil, et se préparer deux jours d'avance à cette belle observation; mais le 4 et le 5 on n'eut que de la pluie avec un vent impétueux: le 6 Gassendi vit plusieurs fois le Soleil, et le soir jusqu'à trois heures passées, sans que Vénus y parût; le 7 et le 8 au matin, Vénus n'y étoit point; et Gassendi resta dans le doute, si ce passage étoit arrivé tout entier pendant la nuit du 6 au 7 (comme cela paroît certain aujourd'hui), ou si la latitude s'étant trouvée trop grande, le passage avoit manqué totalement.

2044. Le passage de Vénus qu'il y eut en 1639, fut le premier qu'on observa; mais ce fut par un hasard heureux. Horoccius s'étoit occupé à calculer des éphémérides sur les tables de Lansberge, beaucoup moins parfaites que les tables rudolphines: ces tables de Lansberge étoient en erreur de 16′ pour la latitude de Vénus, et les tables rudolphines de 8′ seulement; mais l'erreur de Lansberge faisoit remonter Vénus sur le Soleil, de sorte que le passage devoit être visible, tandis que l'erreur des tables de Képler la faisoit passer au-dessous; c'est ainsi que de mauvaises tables occasionnerent une bonne observation. Sur la foi de ces tables, que Lansberge avoit célébrées avec une assurance capable d'en imposer, Horoccius se prépara à observer ce passage, et le 4 décembre il vit en effet pendant environ une demi-heure Vénus sur le Soleil; il avoit averti *Crabtrée* son ami, qui étoit à quelques lieues d'Hoole, et qui l'observa également. J'en ai donné le résultat parmi les observations de Vénus, d'après M. deLambre, qui a tenu compte même de l'aberration. Suivant Cassini, la conjonction arriva le 4 décembre 1639 à $6^h\ 20'$ du soir, t. v. à $8^s\ 12^\circ\ 31'\ 44''$ de longitude, et $9'\ 8''$ de latitude géocentrique (*Elém. d'astr. pag.* 559).

2045. Dans le temps qu'on observa le passage de Vénus en 1639, on ne connoissoit pas encore toute l'utilité qu'on retireroit un jour de ces sortes de phénomenes: ce fut Halley qui en 1677 apperçut que la durée d'un passage de Mercure ou de Vénus sur le Soleil, pouvoit servir à trouver sa parallaxe; il essaya même de la trouver par le moyen du passage de Mercure; mais ce n'étoit qu'un essai. En 1691 il donna dans les Transactions philosophiques un mémoire

exprès sur les passages de Vénus, où il parla de 17 passages (2039), c'est-à-dire, de ceux qui avoient dû avoir lieu depuis 918, ou qu'on pouvoit espérer jusqu'à l'an 2117 (*Philos. Trans.* 1691). Il annonça pour lors que si l'intervalle de temps entre les deux contacts intérieurs des bords de Vénus et du Soleil pouvoit se déterminer, à une seconde près, en deux pays situés d'une maniere convenable, on en concluroit la parallaxe du Soleil et sa distance, à $\frac{1}{500}$ près. Il développa ensuite cette derniere conséquence en 1716 dans un autre mémoire (*Philos. Trans. n°.* 348, *Abrégé, tom. IV, pag.* 213). Il assigna les lieux de la Terre où il croyoit qu'on devoit se transporter pour faire en 1761 cette importante observation avec tout l'avantage convenable; mais il se trompa considérablement dans cette partie de son mémoire, comme je l'ai expliqué ailleurs (*Hist. de l'acad.* 1757.)

Méthodes pour calculer les circonstances d'un passage sur le Soleil.

2046. Les circonstances d'un passage de Vénus ou de Mercure sont le temps de la conjonction, le milieu du passage, l'entrée et la sortie; la latitude au temps de la conjonction, et la plus courte distance des centres de Vénus et du Soleil. Les méthodes qu'on emploie pour ces calculs sont les mêmes pour Vénus et pour Mercure; ainsi l'on devra entendre de Mercure tout ce que je dirai de Vénus dans les articles suivans.

On commence par calculer ces passages tels qu'ils paroîtroient s'ils étoient vus du centre de la Terre; on cherche ensuite l'effet des parallaxes en différens pays. Il y a deux méthodes pour calculer un passage vu du centre de la Terre; l'une par les longitudes et latitudes héliocentriques, l'autre par les longitudes et latitudes géocentriques : la premiere est la plus simple, comme de l'Isle l'a remarqué, et je m'en servirai dans l'exemple suivant.

2047. Lorsqu'on connoît par le moyen des périodes indiquées ci-dessus (2021, 2032), le jour où il peut y avoir un passage de Vénus sur le Soleil, il s'agit de trouver l'heure de la conjonction : on calcule pour ce jour-là, et pour la veille, la longitude du Soleil et la longitude héliocentrique de Vénus réduite à l'écliptique, pour avoir le vrai mouvement diurne de Vénus vu du Soleil; on calcule aussi le mouvement diurne du Soleil.

Ainsi le 5 juin 1761 à midi vrai, la longitude de la Terre opposée à celle du Soleil étoit de $8^s\ 14^\circ\ 53'\ 34''$, et celle de Vénus $8^s\ 14^\circ\ 24'\ 47''$, du moins par les tables dont je me servois alors; le 6 juin la lon-

gitude de la Terre 8ˢ 15° 50′ 56″, et celle de Vénus 8ˢ 15° 59′ 55″. Ainsi le mouvement du Soleil ou de la Terre étoit de 57′ 22″ par jour, et celui de Vénus de 1° 35′ 8″; la différence 37′ 46″ est ce que j'appelle mouvement diurne de Vénus par rapport à la Terre, vu du Soleil sur l'écliptique. La longitude de Vénus pour le 5 à midi étant différente de celle de la Terre, de 28′ 47″, on fera cette proportion : Le mouvement relatif 37′ 46″ est à 24ʰ, comme 28′ 47″ distance le 5 juin à midi depuis le lieu de Vénus jusqu'au lieu de la Terre, ou distance de Vénus à sa conjonction avec la Terre, sont à 18ʰ 17′ ½, temps de la conjonction suivant les tables. Je l'ai trouvée, par observation, à 17ʰ 50′, c'est-à-dire, le 6 à 5ʰ 50′ du matin; ainsi l'erreur des tables étoit de près de demi-heure; quoique j'eusse choisi les élémens dont on pouvoit espérer le plus d'exactitude (*Mém. acad.* 1761): mais il ne faut pas s'en étonner, car une erreur de 50″ dans la longitude de Vénus suffit pour changer d'une demi-heure le temps de la conjonction, à cause de la lenteur de son mouvement relatif. L'heure de la conjonction vue du Soleil, ou de la conjonction vue de la Terre, est exactement la même; puisque la conjonction a lieu quand Vénus est sur le cercle de latitude, dont le plan passe par les centres du Soleil et de la Terre; ainsi nous n'avons aucun autre calcul à faire pour trouver la conjonction.

2048. Ayant trouvé l'heure de la conjonction, l'on calcule par les tables la latitude héliocentrique de Vénus, le rayon vecteur ou la distance au Soleil, aussi bien que la distance de la Terre au Soleil. Cette latitude vue du Soleil étoit, suivant les mêmes tables, de 3′ 54″ australe; le mouvement horaire en latitude vu du Soleil 14″ 08, la distance de Vénus au Soleil 72643, celle de la Terre au Soleil 101546, et par conséquent celle de Vénus à la Terre 28903. On cherchera aussi le demi-diametre du Soleil, qui, dans cet exemple, est de 15′ 46″ ½, mais que je réduirai dans la suite à 15′ 43″7 (2158).

Soit S le centre du Soleil (FIG. 126), dont le demi-diametre est SA, T le centre de la Terre, TV la distance de Vénus à la Terre; si l'on conçoit un cône ATB, dont le sommet soit au centre de la Terre T, et dont le Soleil soit la base, l'angle ATB de ce cône sera la valeur du diametre du Soleil vu de la Terre (1383). Ce cône étant coupé dans la région de Vénus par un plan perpendiculaire à son axe, la section est un cercle dont le diametre est CD; lorsque Vénus traverse le cône ATB, elle passe dans ce plan de section, ou dans le cercle dont le diametre est CD, et elle y est nécessairement pendant toute la durée du passage. En effet, quand Vénus entre en C dans le

cône

cône ATB, elle paroît, vue de la Terre T, être sur le bord A du Soleil; quand elle quitte ce cône en D, elle paroît sur l'autre bord B du disque solaire, et c'est la fin du passage : ainsi nous allons chercher, par le moyen des longitudes vues du Soleil (2047), à quelle heure Vénus entrera dans la section du cône en G.

2049. Il faut savoir pour cela quelle est la grandeur apparente vue du Soleil de la section CD, que Vénus doit traverser pendant la durée du passage, ou de l'angle CSV. On considere les triangles rectilignes rectangles SCV, TCV, qui ont un côté commun CV; si l'on prend CV pour rayon, on aura SV pour tangente de l'angle SCV, ou cotangente de CSV; on aura de même TV pour cotangente de l'angle CTV, qui est égal au demi-diametre du Soleil; on pourra donc faire cette proportion, TV : SV :: cotang. CTV : cot. CSV; ou, parceque les tangentes sont en raison inverse des cotangentes, SV : TV :: tang. CTV : tang. CSV : mais de si petits angles sont entre eux comme leurs tangentes, il n'y auroit pas une seconde d'erreur à craindre, même pour des arcs d'un degré; ainsi l'on dira : *la distance de Vénus au Soleil est à la distance de Vénus à la Terre, comme le demi-diametre du Soleil est au demi-diametre de la section vue du Soleil.* On aura donc pour 1761 cette proportion, 7264 : 2890 :: 15′ 46″ ½ : 6′ 16″ 59; en sorte que le demi-diametre de la section que Vénus traversoit, étoit de 6′ 16″ 59 vu du Soleil.

2050. Soit un cercle AES (FIG. 125), dont le demi-diametre CO vu du Soleil soit de cette quantité; la circonférence AES représentera celle de la section que Vénus doit traverser; CN étant supposée une portion de l'écliptique, on tirera sur CN une perpendiculaire CV, égale à 3′ 54″, latitude héliocentrique de Vénus (2048) pour le moment de la conjonction; le point V sera celui où Vénus devra se trouver au moment de la conjonction, et c'est par le point V qu'il faudra tirer une ligne EVS, pour représenter l'orbite relative de Vénus, après que nous aurons déterminé l'inclinaison de cette orbite vue du Soleil.

2051. Les mouvemens en longitude vont du même sens; ainsi l'on prendra la différence des mouvemens diurnes de la Terre et de Vénus, qui est 37′ 46″; et le mouvement diurne de Vénus en latitude, qui est de 5′ 38″; le Soleil n'en a aucun; l'on dira donc, 37′ 46″ : 5′ 38″ :: R : tang. 8° 29′; c'est l'inclinaison de l'orbite relative de Vénus (1745, 2060). On tirera donc une ligne SVE, qui fasse avec le cercle de latitude CV un angle de 81° 31′; c'est le complément de l'inclinaison 8° 29′; et comme la latitude de Vénus CV va en croissant, on fera l'angle aigu CVN du côté de l'entrée E de

Vénus, ou du côté de l'occident. La sortie est du côté de l'orient, parceque toutes les planetes, vues du Soleil, paroissent aller à l'orient; c'est-à-dire, selon l'ordre des signes. Quoiqu'il n'y ait véritablement ni orient ni occident quand on se suppose dans le Soleil, on est convenu de dire, comme sur la Terre, qu'une planete va d'occident vers l'orient, quand elle va suivant l'ordre des signes, le Belier, le Taureau, etc. en augmentant de longitude.

2052. On abaissera sur l'orbite ES une perpendiculaire CM; le point M sera le milieu du passage, et CM sera la plus courte distance du centre de Vénus à celui de la Terre, vue du centre du Soleil; c'est sa distance à la ligne des centres, ou à l'axe du cône dont nous avons parlé (2048). Pour trouver la quantité MV, on fera attention que l'angle MCV est égal à l'inclinaison 8° 29'; on fera donc cette proportion, R : CV, ou 3' 54" : : sin. 8° 29' : MV, qui se trouvera 34"5.

2053. Le mouvement diurne de Vénus sur son orbite relative se trouvera en disant (1745), le cosinus de l'inclinaison est au rayon, comme la différence des mouvemens diurnes 37' 46" est au mouvement sur l'orbite relative 38' 11", dont la vingt-quatrieme partie est le mouvement horaire vu du Soleil 1' 35" à-peu-près; nous le trouverons 1' 35"504 par une méthode plus exacte (2060).

Au moyen de ce mouvement horaire, il est aisé de trouver le milieu du passage et le temps que Vénus emploie à aller de V en M; on dira pour cet effet, 1' 35"504 : 3600" : : 34"5 : 21' 41", différence entre la conjonction et le milieu du passage. Si l'on suppose l'heure de la conjonction 5h 50' (2047), on aura pour le milieu du passage 5h 28' 19".

Le triangle CVM, qui a servi à trouver MV (2052), servira aussi à trouver CM, en disant, R : CV : : cos. VCM : CM, 231"4: ainsi la plus courte distance CM vue du Soleil est de 3' 51"4. Pour trouver cette distance vue de la Terre, on dira (2049), la distance de Vénus à la Terre est à celle de Vénus au Soleil, comme 3' 51"4 sont à 9' 41"7; c'est la plus courte distance CM vue de la Terre.

2054. Si l'orbite de Vénus traversoit le centre C de la section, l'arc ME de l'orbite seroit égal à CD, c'est-à-dire, au rayon même de la section, 6' 16"6; mais à cause de la latitude CV, Vénus traverse une corde ES plus petite que le diametre. Pour connoître la longueur ME, qui est égale à SM, on résoudra le triangle CME, dans lequel on a CE=6' 16"59 et CM 3' 51"4 : l'on trouvera EM de 4' 57", 08. Le temps que Vénus emploiera à parcourir EM, sera la demi-durée du passage: ainsi on la trouvera par cette proportion; le

mouvement horaire relatif 1′ 35″ 504 est à une heure ou 3600″, comme 4′ 57″08 sont à 3h 6′ 38″. C'est le temps que Vénus emploie à aller de E en M, et c'est la demi-durée du passage, vue du Soleil, et en même temps la demi-durée vue de la Terre (2048).

Cette demi-durée étant ôtée de 5h 28′ 19″, milieu du passage (2053), donne 2h 21′ 41″, pour le moment de l'entrée du centre de Vénus en E; et cette même demi-durée, étant ajoutée au milieu, donnera 8h 34′ 57″ pour la sortie en S, vue du centre de la Terre; c'est-à-dire, abstraction faite des parallaxes (2062).

2055. Telle est la méthode la plus simple de trouver le commencement et la fin du passage de Vénus par rapport au centre de la Terre; on n'y emploie autre chose que les longitudes de Vénus vues du Soleil, qui sont beaucoup plus aisées à calculer que les longitudes géocentriques (1142). On pourroit faire la même chose en y employant les longitudes géocentriques, et le mouvement de Vénus vu de la Terre (2061); il suffiroit de prendre pour rayon du cercle AES le demi-diametre du Soleil 15′ 46″5 : on trouveroit CM=9′ 42″ 626, et la demi-durée 3h 6′ 38″ comme ci-dessus, mais avec un mouvement rétrograde.

2056. Lorsqu'on applique cette méthode à un passage de Mercure, le changement de sa distance au Soleil est assez sensible dans l'espace de quelques heures, pour qu'on ne doive pas supposer égaux les rayons du disque ou de la section ASE au commencement et à la fin du passage. De l'Isle, en calculant le passage de Mercure pour le 7 novembre 1756 (*Mém. acad.* 1758), trouvoit le rayon CE pour l'entrée 34′ 24″43, et le rayon CS pour la sortie 34′ 30″25, c'est-à-dire, plus grand de 5″82; parceque dans l'espace de 5h 25′ que dura ce passage, Mercure s'étoit rapproché de son périhélie, et par conséquent du Soleil; ce qui lui faisoit parcourir une section plus voisine de la base du cône, c'est-à-dire plus étendue: mais cette inégalité peut se négliger dans les passages de Vénus.

2057. L'inégalité du mouvement de Mercure doit aussi entrer dans le calcul, si l'on veut être assuré du résultat à quelques secondes près. Dans le passage de 1756, le mouvement héliocentrique de Mercure sur son orbite relative, dans la premiere demi-durée du passage, étoit de 34′ 21″18; et dans la seconde demi-durée, il étoit de 34′ 26″07, c'est-à-dire plus grand, en temps égal, de 4″89. La moitié de cette inégalité produit 11″ ½ de temps, dont le vrai milieu du passage en temps est différent du milieu de la ligne comprise entre l'entrée et la sortie, en E et en S, en sorte que la seconde demi-

durée, à compter du point M, étoit plus courte de 23″ que la premiere demi-durée EM (*Mém.* 1758, *pag.* 153).

2058. J'avois donné, dans les mémoires de 1762, une méthode pour trouver avec la précision d'un centieme de seconde, les mouvemens horaires de Mercure et de Vénus, et par conséquent leur inégalité; on a vu (1252) une méthode encore plus simple pour avoir le mouvement horaire héliocentrique sur l'orbite, qui est $\frac{b\vartheta z}{rr}$. Supposons que ce mouvement soit AS sur l'orbite AE (FIG. 27), et BD sur l'écliptique; le mouvement AS, multiplié par le sinus de l'angle A, donne la valeur de CS; or cos. AB : 1 :: cos. E : sin. A (3885) : donc CS $= \frac{\text{AS cos. inclin.}}{\text{cos. lat.}}$, et BD, mouvement réduit à l'écliptique, sera $\frac{b\vartheta z \text{ cos. inclin.}}{rr \text{ cos.}^2 \text{ latit.}}$ (3875).

2059. Pour avoir le mouvement horaire en latitude, c'est-à-dire AC, on considérera que ϑ sin. AB $=$ AC cos. AB (3446), ou AC $= \frac{\vartheta \text{ sin. AB}}{\text{cos. AB}}$; mais sin. AB $=$ sin. E sin. AE : donc ϑ sin. AB $=$ AS cos. AE sin. E, ou AC $= \frac{\text{AS cos. AE sin. E}}{\text{cos. AB}}$; et parceque sin. E $= \frac{\text{sin. AB}}{\text{sin. AE}}$, on aura AC $=$ AS tan. AB cot. AE. Ainsi le mouvement en latitude est égal au mouvement en longitude, multiplié par la tangente de la latitude, et par la cotangente de la distance au nœud, mesurée sur l'orbite de la planete.

2060. Comme dans les passages sur le Soleil la latitude est fort petite, le mouvement horaire vrai sur l'orbite, multiplié par le cosinus de l'inclinaison, donnera sans erreur sensible le mouvement sur l'écliptique; et multiplié par le sinus de l'inclinaison, et le cosinus de la distance au nœud, il donnera le mouvement horaire en latitude vu du Soleil. On prendra la différence entre le mouvement sur l'écliptique et celui de la Terre, et l'on trouvera le mouvement relatif en longitude (2051); l'on en conclura les mouvemens relatifs de Vénus ou de Mercure par rapport au Soleil, vus de la Terre, par le rapport inverse des distances de la planete à la Terre et au Soleil.

2061. Pour le passage de Vénus sur le Soleil en 1761, le mouvement horaire relatif étoit 1′ 35″504 vu du Soleil, et le mouvement vu de la Terre 3′ 57″40 sur l'écliptique, 4′ 0″03 sur l'orbite, 35″39 en latitude; l'inclinaison relative 8° 28′ 47″. Pour 1769 le mouvement relatif vu de la Terre, étoit de 3′ 57″49 sur l'écliptique, 4′ 0″ 11 sur l'orbite relative, et 35″42 en latitude; l'inclinaison 8° 28′ 59″.

De même pour Mercure dans son passage sur le Soleil, le 6 mai 1753, à 10h 20′ du matin; le mouvement héliocentrique vrai de Mercure seul étoit de 7′ 17″56 sur l'orbite, 7′ 14″31 sur l'écliptique, 53″24 en latitude, les mouvemens géocentriques relativement au Soleil 3′ 59″83, 3′ 55″87 et 43″40; l'inclinaison relative 10° 25′ 28″ vue du Soleil ou de la Terre.

Dans son passage du 5 novembre 1789 à 2h 24′, temps vrai, le mouvement héliocentrique de Mercure sur son orbite sera de, 15′6″6; son mouvement géocentrique relatif 5′ 49″7 sur l'écliptique, 5′53″4 sur l'orbite relative, et 61″5 en latitude décroissante; l'inclinaison de l'orbite relative sera 8° 22′ 52″. J'ai pris le temps qui tient le milieu entre la conjonction et le commencement du passage, et je n'ai pas mis les centiemes; car d'une heure à l'autre le mouvement héliocentrique varie de 4 centiemes de seconde.

Méthode pour calculer l'effet de la parallaxe dans les passages de Vénus et de Mercure.

2062. Lorsqu'on veut simplement prédire un passage sur le Soleil, il suffit de calculer l'effet des parallaxes en différens lieux de la Terre par les méthodes graphiques dont je donnerai bientôt l'explication (2077); mais lorsqu'un passage de Vénus a été observé en différens pays de la Terre, comme ceux de 1761 et de 1769, et qu'on veut en conclure la parallaxe du Soleil, on ne sauroit mettre trop d'exactitude et trop de scrupule dans le calcul pour réduire chaque observation au centre de la Terre, et pour trouver le rapport qu'il y a entre les effets de la parallaxe dans ces différens lieux d'observations : c'est ce que nous allons exécuter par la méthode la plus rigoureuse et la plus plus exacte, en ne négligeant pas même les centiemes de seconde dans la parallaxe; car cette précision est nécessaire, si l'on veut avoir pour les temps cherchés la précision d'une seconde.

Je prendrai pour exemple les observations qui furent faites à Paris le 3 juin 1769, à Cajanebourg et à Saint-Joseph en Californie, et je vais expliquer la maniere de trouver l'effet de la parallaxe au moment du contact observé (a); je rapporterai d'abord les élémens du calcul, et j'expliquerai les regles générales de ma méthode. La parallaxe moyenne du Soleil étant supposée de 8″5, celle du 3 juin 1769 étoit de 8″373, celle de Vénus 29″425, et la différence des pa-

(a) On peut voir aussi le *Traité analytique* de M. du Séjour, tome I, pag. 189, 483.

rallaxes 21″052. Je suppose le demi-diametre du Soleil de 15′ 43″ 71; il est plus petit que dans mes tables, mais il est tel que les passages de Vénus me l'ont donné (2158). Le demi-diametre de Vénus est de 28″, 60, la somme est 16′ 12″, 31, la différence 15′ 15″, 11. A 10^h 14′ 10″, temps vrai au méridien de Paris, qui est à-peu-près le temps de la conjonction, le lieu du Soleil étoit à 2^s 13° 27′ 20″,7, et il augmentoit en six heures de 14′ 21″.

La déclinaison du Soleil étoit de 22° 26′ 27″, et augmentoit de 1′ 45″. L'ascension droite du Soleil étoit de 72° 3′ 21″,7, et augmentoit de 15′ 24″, 7; l'équation du temps 2′ 15″0 décroissant de 2″4 en six heures; tout cela est tiré des tables du Soleil de la Caille. J'ai aussi trouvé l'angle de position pour le centre de Vénus à 7^h 30′ de 7° 1′ 45″, et à 13^h 30′ de 7° 5′ 39″. Par ces données, on peut calculer chaque élément pour le moment de chaque observation réduite au méridien de Paris.

2063. La circonférence du Soleil est représentée par le cercle SOL (FIG. 134); C est le centre du Soleil, V le vrai lieu de Vénus au moment qu'elle paroît en D, et qu'elle touche le bord du Soleil en B; VM l'orbite vraie de Vénus par rapport au Soleil; ZVDA le vertical passant par le vrai lieu de Vénus; EC une ligne parallele à ZA, passant par le centre C du Soleil. Cette ligne n'est pas exactement le vertical du Soleil, puisqu'elle est parallele au vertical de Vénus, qui n'est pas le même que celui du Soleil. La ligne CM est la plus courte distance des centres, ou la perpendiculaire à l'orbite de Vénus; PSFC une portion du cercle de déclinaison qui passe par le centre du Soleil, ou plus exactement une ligne parallele à l'arc du cercle de déclinaison, qui passeroit par le vrai lieu V de Vénus.

Au moment où se fait le contact intérieur des bords de Vénus et du Soleil en B, le centre de Vénus, qui est réellement en V hors du Soleil, paroît au point D dans le vertical ZVDA; on connoît donc la distance apparente des centres, CD=15′ 15″, 11, et il faut connoître la véritable distance CV qui a lieu au même instant, vue du centre de la Terre, et qui nous apprendra quel a été l'effet de la parallaxe sur le contact observé.

Le cas représenté dans la figure 134 est celui où l'entrée de Vénus se faisoit le soir dans un pays septentrional; mais j'aurai soin de développer les autres cas, dans lesquels il faudroit des figures particulieres pour en guider les calculs.

2064. Je suppose que, par des premiers calculs, on connoisse à-peu-près le milieu du passage en M, qui arriva en 1769 vers 10^h 36′ 40″ au méridien de Paris, et la perpendiculaire CM de 10′

8″ : on réduit au méridien de Paris le temps de l'observation que l'on calcule, afin d'avoir l'intervalle de temps qui s'est écoulé depuis le passage de Vénus en V jusqu'à son arrivée en M ; on en conclut l'arc VM à raison de 4′ 0″ 115 par heure : on dit alors, CM : MV :: 1 : tang. MCV, et cos. MCV : CM :: 1 : CV, c'est la distance vraie de Vénus au centre du Soleil pour le moment de l'observation ; mais cette distance n'est trouvée par-là qu'à-peu-près, et seulement pour parvenir à connoître l'angle CVD.

L'angle MCF, formé par la perpendiculaire CM, et par le cercle de déclinaison qui passe par Vénus, est la somme de l'inclinaison relative 8° 28′ 59″, et de l'angle de position.

Cette somme, qui donne l'angle MCF, se retranche de l'angle MCV quand il est question de l'entrée de Vénus : on les ajoute pour la sortie. Ce seroit le contraire pour le passage de 1761, où Vénus s'éloignoit du Soleil par son mouvement en déclinaison, parcequ'elle étoit au midi du Soleil, et qu'elle alloit vers le midi. Cette regle est générale pour les pays septentrionaux ou méridionaux, pour le matin ou pour le soir, et elle donne l'angle VCF.

2065. Quand on a par cette opération l'angle VCF, on multiplie la distance vraie CV par le cosinus de cet angle, et l'on a la différence de déclinaison CF entre Vénus et le Soleil, qu'on ajoute à la déclinaison du Soleil pour avoir celle de Vénus, parceque Vénus étoit, en 1769, au nord du Soleil; elle étoit à 7h 30′ de 22° 38′ 50″, et à 13h 30′ de 22° 34′ 7″. Quelques secondes ne sont ici d'aucune importance; car 10″ ne font pas ordinairement un millieme de seconde sur la parallaxe de hauteur.

On multiplie aussi CV par le sinus de l'angle VCF, pour avoir VF; on le divise par le cosinus de la déclinaison de Vénus (3879), et l'on a la vraie différence d'ascension droite entre Vénus et le Soleil, mesurée sur l'équateur, qu'on ôte de l'angle horaire du Soleil, ou de sa distance au méridien exprimée en degrés, si la sortie arrive le matin, ou l'entrée le soir, et qu'on ajoute dans les autres cas. Cette différence étoit pour $7^h\frac{1}{2}$ de 10′ 4″, et à $13^h\frac{1}{2}$ de 15′ 5″, le changement en six heures étant de 25′ 9″. On a par cette opération l'angle horaire de Vénus, ou sa distance au méridien.

Par le moyen de la déclinaison de Vénus et de son angle horaire, on calcule la hauteur vraie de Vénus (1036), en corrigeant la hauteur du pole par l'angle de la verticale (1694); on cherche aussi l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison, ou l'angle ECF (1038). La parallaxe horiz. du Soleil étant supposée de $8''\frac{1}{2}$, celle de Vénus, à proportion de sa distance, étoit $29''\frac{1}{2}$; cette parallaxe,

multipliée par le cosinus de la hauteur vraie, donne la parallaxe de hauteur, qu'il faut ôter de la hauteur vraie pour avoir la hauteur apparente de Vénus.

2066. La différence des parallaxes de Vénus et du Soleil étoit 21″ 052; cette différence, multipliée par le cosinus de la hauteur apparente de Vénus, donne la différence des parallaxes de hauteur, ou la petite ligne VD. Cette opération est aussi rigoureuse que si l'on calculoit séparément la parallaxe du Soleil en hauteur, et celle de Vénus; pour en prendre la différence, puisque l'une et l'autre dépendent de la hauteur apparente du point D du disque solaire où paroît le centre de Vénus, et dont la parallaxe en hauteur devroit être ôtée de celle de Vénus.

L'angle ECF et l'angle ECV, employés ci-dessus, s'ajoutent pour les pays septentrionaux, si c'est l'entrée qui arrive le matin, ou la sortie le soir : dans les deux autres cas on prend leur différence, et l'on a l'angle ECV, ou son égal CVD. Dans les pays méridionaux, comme l'isle de Taïti, c'est le contraire. Dans le passage de 1761, c'étoit aussi le contraire, parceque Vénus étoit au midi du Soleil.

2067. Pour 1769, où Vénus étoit au nord du Soleil, on juge que l'entrée et la sortie de Vénus se sont faites au-dessus du centre, lorsque l'angle ECV étoit aigu pour les pays septentrionaux, ou obtus pour les pays méridionaux. C'est le contraire pour le passage de 1761.

Lorsque Vénus est au-dessous du diametre horizontal du Soleil, la parallaxe fait paroître l'entrée plus tard, et la sortie plutôt qu'on ne la verroit du centre de la Terre (2073); mais la sortie à la baie d'Hudson et la sortie en Californie sont les seules, en 1769, où j'aie trouvé l'angle ECV obtus, et où la sortie ait paru plutôt, en vertu de la parallaxe.

2068. Dans le triangle CVD, on connoît CD égal à la somme des demi-diametres, VD égal à la différence des parallaxes avec l'angle compris CVD; on fera cette proportion, CD : sin. CVD :: VD : sin. DCV. On cherche ce petit angle avec la précision des dixiemes de seconde, ou même des centiemes; on l'ajoute à l'angle CVD, et l'on a l'angle CDA.

Si, par l'addition de ces deux angles, qui tous deux sont nécessairement moindres que 90°, on trouvoit une somme plus grande que 90°, on en prendroit le supplément; ce seroit seulement une preuve que le point V et le point D seroient, l'un au-dessus du diametre horizontal, et l'autre au-dessous. Connoissant ainsi l'angle CDV,

CDV, l'on dit enfin, sin. CVD : CD :: sin. CDV : CV; c'est la distance vraie qui répond à l'observation ; elle doit être calculée avec la précision des milliemes de seconde; car une seule seconde sur la valeur de CV produit 19″8 sur le temps ; en sorte qu'un centieme de seconde feroit deux dixiemes de seconde sur le temps.

2069. Connoissant CM et CV, l'on trouve MV (1761). On la convertit en temps, c'est la demi-durée déduite de l'observation ; ainsi l'on a la distance vraie au milieu du passage pour le lieu et le moment de l'observation.

La distance au milieu du passage, qui a lieu quand le vrai contact des bords arrive pour le centre de la Terre, se trouve par une opération semblable avec CM et CX, qui est égale à CD, c'est-à-dire, la différence des demi-diametres; car le vrai contact de Vénus, vu du centre de la Terre, a lieu quand elle arrive au point X de son orbite. Cette distance MX en temps est de $2^h\ 50'\ 54''$ pour 1769, parceque CM étoit de 10′ 8″; et en diminuant CM d'une seconde, on augmente le temps de 7″1. Le temps par VX, ou la différence entre le temps par MV et le temps par MX, ou entre la distance au milieu du passage pour le lieu de l'observation et cette distance pour le centre de la Terre, est l'effet de la parallaxe pour le lieu de l'observation.

Si l'on trouve le temps par MX, vu du centre de la Terre, plus grand que le temps par MV, vu de la surface ; c'est une preuve qu'il faut ajouter à la sortie observée, ou ôter de l'entrée, pour avoir le même contact réduit au centre de la Terre.

Cette méthode est la plus naturelle; elle est aussi indépendante de tous les autres élémens que la nature de la chose peut le comporter ; elle est susceptible de toute la précision que nos tables de logarithmes comportent, et elle ne laisse dans le calcul, ni dans le procédé, aucune incertitude ni aucune obscurité.

2070. L'erreur qu'on peut commettre sur les valeurs de CM et de CD, influe très peu sur celle de VX : mais j'ai refait mes calculs avec les valeurs de CM et de CD, que la comparaison de toutes les observations les plus décisives m'avoit données. Si la parallaxe, que j'ai supposée de 8″ 5, augmente ou diminue, la valeur de XV ou l'effet de la parallaxe en temps augmente dans le même rapport ; ainsi l'on peut se contenter d'un seul calcul, et en conclure l'effet de la parallaxe dans toute autre hypothese par une simple proportion.

2071. Parmi les cinq observations importantes de 1769, il y en a une qui exige une opération de plus ; c'est celle de Cajanebourg, où M. Planman n'observa que le contact extérieur de la sortie.

Ainsi les deux contacts étant réduits au centre de la Terre, et l'intervalle de temps converti en degrés, on a le grand côté GX d'un triangle GCX, dont un côté CX est de 915″ 11, et l'autre côté CG de 972″ 31; on trouvera les segmens formés par la perpendiculaire CM; on convertira chaque segment en temps : l'un sera la demi-durée intérieure, dont on verra le calcul (2148); l'autre la demi-durée extérieure, c'est-à-dire, l'intervalle entre le milieu du passage et le contact extérieur : cet intervalle est de 3ʰ 9′ 36″, par un milieu entre toutes les observations, et il n'y a pas plus d'une seconde d'incertitude dans le calcul.

2072. Je me contenterai de rapporter ici la table des calculs pour Cajanebourg et Saint-Joseph en Californie; j'en ai calculé de pareilles pour tous les lieux où la durée du passage a été observée; mais celle-ci suffira pour servir d'exemple. J'y ai négligé l'aplatissement de la Terre, dont l'effet est insensible pour le Soleil et pour Vénus. On verra la maniere d'en conclure la parallaxe du Soleil (2148).

Élémens du calcul.	*Cajanebourg*, Lat. 64° 13′ 30″.		*Saint-Joseph*, Lat. 23° 3′ 36″.	
Temps vrai des observations,	9ʰ 20′ 45″, 5	15ʰ 32′ 27″	0ʰ 17′ 26″, 9	5ʰ 54′ 50″, 3
Différence des méridiens par rapport à Paris, ...	1 41 21	1 41 21	7 28 2	7 28 2
Temps réduit à Paris, . .	7 39 24	13 51 6	7 45 29	13 22 52
Distance au milieu du passage,	2 57 15	3 14 26	2 51 11	2 46 12
Angle MCV, ...	49° 24 1	51° 59 47	48° 24 38	47° 34 8
Inclinaison de l'orbite sur l'équateur ou MCF, . . .	15 30 56	15 34 50	15 30 50	15 34 35
Angle VCF, ...	33 53 7	67 34 37	32 53 48	63 8 43
Distance vraie CV à-peu-près,	15 35	16 28	15 16	15 1
Différence de déclinaison CF,	12 56	6 17	12 49	6 47
Déclinaison du Soleil, . .	22 25 47	22 27 33	22 25 48	22 27 27
Déclinaison de Vénus, . .	22 38 43	22 33 50	22 38 37	22 34 14
Différence d'ascension droite,	9 23, 5	16 38	8 59	14 31
Angle horaire du Soleil, . .	140 11 22, 5	126 52 15	4 21 44	88 42 35
Angle horaire de Vénus, . .	140 2 0	126 36 37	4 12 45	88 57 6
Hauteur vraie de Vénus, .	2 14 36	6 5 15	86 8 14	9 32 55
Hauteur apparente de Vénus,	2 14 7	6 4 46	86 8 12	9 32 26
Différence des parallaxes DV,	21″ 036	20″ 934	1″418	20″761
Angle du vertical et du cercle de déclinaison, ...	16 14 0	20 33 0	83 4 46	68 53 8.
Angle ECV ou CVD, . .	17 39 7	47 1 37	50° 10 58	132 1 51
Distance apparente CD, .	15′ 15″ 11	16′ 12″ 31	15 15, 11	15 15, 11
Angle VCD, ...	23 57 8	54 7, 8	4 5, 5	57 56, 0
Angle CDA, ...	18° 3′ 4″, 8	47 55 44, 8	50 15 3, 5	47 0 13, 0
Distance vraie de Vénus au Soleil CV, ...	15 35, 13	16 26, 45	15′ 16″, 01	15′ 1″, 08
Distance correspondante de Vénus au point M, . .	2ʰ 57 32, 3	3ʰ 14 6, 5	2ʰ 51 12, 5	2ʰ 46 10, 9
Distance sans parallaxe, . .	2 50 54, 0	3 9 36, 0	2 50 54, 0	2 50 54, 0
Effet de la parallaxe moyenne, 8″, 6 en temps, . .	+ 6 38, 3	− 4 30, 5	+ 18, 1	+ 4 43, 2
Observations réduites au centre de la Terre, . . .	9 27 23, 8	15 27 56, 5	0 17 45, 0	5 59 33, 4

2073. La sortie apparente de Vénus arrive plutôt que la vraie, quand elle se fait au-dessous du diametre horizontal (*Mém.* 1756, *pag.* 263. *Journal des savans*, *mars* 1760, *février* 1762); c'est là l'unique regle, et la figure 134 suffit pour en faire juger. Si la sortie vraie se faisoit au-dessus du diametre horizontal et l'apparente au-dessous, il faudroit dire que la sortie apparente est avancée toutes les fois qu'elle se fait plus au-dessous du diametre horizontal, que la sortie vraie au-dessus. Par la même raison, l'entrée apparente est retardée toutes les fois qu'elle se fait au-dessous et plus loin du diametre horizontal que l'entrée véritable. Si la parallaxe de hauteur étoit une corde partagée également par le diametre horizontal du Soleil, l'entrée seroit la même qu'au centre de la Terre.

Ainsi, dans l'observation de la sortie faite à Naples en 1761, il n'y avoit, pour ainsi dire, aucun effet de parallaxe, parceque celle de la hauteur y étoit partagée presque également par le diametre horizontal, suivant une table que M. Trébuchet[a] mit à la fin d'un mémoire, imprimé dans les mercures de mai et juin 1764.

2074. C'est par la méthode que je viens d'expliquer, que j'ai calculé, pour 1761 et 1769, l'effet des parallaxes pour tous les pays où les passages avoient été observés, afin de les comparer avec ce qui avoit été observé, et reconnoître par-là si la parallaxe du Soleil que j'avois supposée dans mes calculs, étoit la véritable; j'en donnerai les résultats ci-après (2148) : je passe à la maniere de calculer la parallaxe pour les autres momens du passage, comme pour les distances de Vénus au bord du Soleil, qu'on a mesurées en observant le passage (2132); mais ces calculs n'exigent pas la même précision.

2075. Je suppose que le 6 juin 1761, à $7^h\ 18'\ 55''$ du matin, on ait observé une distance DC, et qu'on veuille en conclure la distance vraie CV, on abaissera sur le rayon CD, prolongé s'il le faut, une perpendiculaire VB, et l'on aura CB = CV, du moins sensiblement, et BD sera l'effet de la parallaxe sur cette distance observée. Je suppose que le milieu soit arrivé à $5^h\ 30'\ 10''$ (2152), on aura la distance du milieu du passage $1^h\ 48'\ 45''$, et par conséquent la portion MV de l'orbite $7'\ 15''$, CM est de $9'\ 30''$: ainsi l'on trouvera l'angle MCV de $37°\ 21'$. L'inclinaison MCF étant $8°\ 29'$, et l'angle parallactique ECF de $39°\ 23'$, on aura l'angle ECM = $30°\ 54'$, et l'angle ECV = $68°\ 15'$ = CVD : c'est l'angle de la vraie dis-

(a) Claude-Etienne Trébuchet étoit un très bon astronome ; il étoit né à Auxerre le 27 juillet 1722 ; il y est mort le 24 novembre 1784 ; c'est lui qui le premier remarqua l'erreur de Halley pour le passage de 1761.

tance CV avec le vertical ZV. Comme cette opération n'a pas besoin d'une aussi grande précision que les précédentes, je suppose, vu la petitesse de l'angle VCD et du triangle BDV, que l'angle BDV ou CDA est égal à l'angle CVD ou ECV; et dans le triangle BDV, connoissant la parallaxe de hauteur VD, qui étoit de 21″ pour l'heure de l'observation, je la multiplie par le cosinus de l'angle BDV, et je trouve BD=8″; c'est l'alongement que la différence des parallaxes produisoit dans la distance observée à l'heure donnée: je dis l'alongement, quoique la figure 134 semble indiquer le contraire; mais dans l'observation que je viens de calculer, Vénus étoit au-dessous du centre du Soleil.

2076. On peut trouver cet effet de la parallaxe d'une maniere bien plus commode, par une opération graphique très facile, et cela jusqu'à la précision des dixiemes de seconde. Le travail est si long par les autres méthodes, que la plupart des astronomes ont négligé de calculer leurs observations, d'en faire usage, et d'en tirer des résultats, parcequ'ils n'avoient pas le moyen que je vais expliquer, d'exécuter fort vîte, et avec une exactitude suffisante, la partie la plus difficile de ce travail.

2077. Il faut appliquer ici ce qui a été dit sur les projections dans les éclipses de Soleil (1782, 1822 et suiv.). On imaginera du centre du Soleil un cône de rayons qui environnent la Terre, en sorte que le cercle de la Terre, que nous avons appellé cercle d'illumination (1816), en soit la base, et que l'angle au centre du Soleil soit de 17″ 2, puisque du Soleil on verroit le diametre de la Terre sous un angle de 17″ 2, qui est le double de la parallaxe du Soleil (1725). Ce cône de rayons, coupé dans l'orbite de Vénus, y forme un petit cercle qui est la projection de la Terre dans la région de Vénus; son demi-diametre, vu de la Terre, paroît sous un angle égal à la différence des parallaxes de Vénus et du Soleil (1783), qui est d'environ 21″ dans son passage sur le Soleil, en supposant la parallaxe du Soleil de 8″ $\frac{1}{2}$.

2078. Soit le disque du Soleil GEKSV (FIG. 131), tel qu'il étoit vu de la Terre dans le passage de Vénus en 1761; EMRS l'orbite relative de Vénus sur le Soleil; LCK le cercle de déclinaison, ou méridien universel, passant par le centre du Soleil; LQN le cercle qui représente la projection de la Terre dans l'orbite de Vénus, et dont le rayon CL ou CN, vu de la Terre, paroît de 21″. Sur ce cercle de projection l'on tracera l'ellipse de projection PQ, qui représente le parallele diurne de Paris, ou du lieu pour lequel on veut faire le calcul des parallaxes (1826). Par exemple, je suppose qu'à

une heure quelconque, Vénus étant au point R de son orbite EMRS, on veuille savoir l'effet de la parallaxe ; on considérera premièrement que CP exprime la parallaxe de hauteur (1821). Ayant ensuite tiré la ligne PR, on verra que si CR est la vraie distance de Vénus au centre du Soleil, vue du centre de la Terre, la ligne PR est leur distance apparente pour Paris, parceque P est le lieu où Paris voit le centre du Soleil, au lieu de le voir en C, et le lieu où le centre du Soleil voit Paris ; c'est le point où la projection est coupée par le rayon visuel mené de Paris au centre du Soleil. Ainsi du point R, comme centre, on décrira un petit arc CH, pour avoir RH égal à RC, et la ligne PH sera la différence entre la distance apparente PR et la distance vraie CR ; elle sera donc la parallaxe de distance.

Au lieu du petit arc CH, décrit du centre R, on peut prendre, sans erreur sensible, une ligne droite perpendiculaire à CR ; car CH étant extrêmement petite en comparaison de la longueur de CR, sa courbure est insensible : on peut tirer une perpendiculaire CH sans avoir besoin du point R, qui devient inutile dès-lors qu'on ne prend plus CH pour un arc décrit du centre R ; on peut donc se passer totalement de l'orbite EMS et du grand cercle GEKS, qui exigeroit une figure excessivement grande. Il suffira de tirer dans le petit cercle de projection, par le point *s* qui est sur le rayon CS, une ligne *ms* parallele à l'orbite MS, et de la diviser en heures et minutes, comme si c'étoit l'orbite même ; au point *r*, qui répond à l'heure et à la minute pour laquelle on calcule, on tirera la ligne *Cr*, et sur cette ligne une perpendiculaire CH ; la parallele PH sera la parallaxe de distance. Ainsi rien n'empêche de tracer en grand ce petit cercle de projection, et de lui donner huit à neuf pouces de rayon; alors on y pourra mesurer avec la regle et le compas, d'une maniere fort exacte, toutes les parallaxes.

2079. Supposons donc que le cercle LBN (Fig. 132), qui est plus grand et plus sensible, représente également le petit cercle de projection, *m* RS étant l'orbite de Vénus ; on voit que si R est le lieu de Vénus sur son orbite, CH perpendiculaire à CR, et PH parallele à CR, cette ligne PH sera la parallaxe de distance.

Pour éviter de faire usage de l'orbite qui passe à une certaine distance de l'ellipse EQV, et du centre C de la projection qui est variable pour différens pays (1853), je tire par le centre D de l'ellipse une ligne DM qui soit parallele à l'orbite *m* RS, et MG qui lui soit perpendiculaire ; ayant supposé que DM représente la plus courte distance des centres, qui étoit de 9′ 30″, je prends sur MG le mouvement horaire, ou 4′ par heure, pour diviser cette ligne en temps,

ainsi que l'orbite de Vénus ; je tire par le centre de l'ellipse une ligne DG au point où se trouve Vénus à un instant donné ; cette ligne est nécessairement parallele à la ligne CH trouvée par l'opération précédente : ainsi je me sers de la ligne DG pour tirer CH, et pour avoir PH qui est la parallaxe de distance, en supposant que P marque la situation de Paris sur l'ellipse QPV, au moment pour lequel on calcule.

2080. On peut trouver de même la parallaxe en ascension droite et en déclinaison, et cela est extrêmement commode pour ceux qui, en observant le passage de Vénus, emploient une machine parallactique ou un micrometre ordinaire (2136). Je suppose que BCA soit une portion du parallele à l'équateur, et que, du point P où Paris est situé à l'heure donnée sur son parallele diurne, on abaisse une perpendiculaire PK, on aura CK pour la parallaxe d'ascension droite mesurée sur un grand cercle, et PK pour la parallaxe de déclinaison, parceque c'est le point P, au lieu du point C, qui est le centre apparent du Soleil vu de Paris.

2081. Jusqu'ici j'ai supposé que c'étoit pour Paris que l'on vouloit calculer les parallaxes ; il faut étendre maintenant cette méthode à tout autre pays, puisque les passages de Vénus arrivés en 1761 et 1769 ont été observés dans un grand nombre de pays différens.

L'ellipse qui représente le parallele de Paris ayant été tracée pour 22° 42′, déclinaison du Soleil le jour du passage de 1761, elle a la même figure ou la même proportion dans ses axes pour tous les pays ; mais le rayon de projection, et la distance CD du centre de l'ellipse au centre de projection, doivent être différens (1850). On a vu ci-devant (1852) une table où est la distance du centre de la projection à celui de l'ellipse, et le rayon avec lequel on doit décrire le cercle de la projection : en voici une plus détaillée pour les passages de Vénus.

2082. L'ellipse de la figure 127 a été décrite assez en grand pour qu'on puisse y faire toutes les opérations précédentes dans les passages de Vénus ; mais l'échelle qui est à côté (FIG. 128), suppose la différence des parallaxes de 25″8 au lieu de 21″3, que l'on avoit en 1769, parceque la figure avoit été gravée avant les passages observés, dans un temps où l'on faisoit la parallaxe du Soleil un peu trop grande ; cependant l'explication sera la même ; et chacun ayant choisi dans la figure le rayon de projection dont il aura besoin, pourra le diviser en 21″3, qui est la différence des parallaxes, en supposant celle du Soleil de 8″6.

Table de la distance qu'il y a entre le centre de la projection et le centre de l'ellipse, décrite pour 22° 42′ de déclinaison, avec le rayon de la projection, pour différentes latitudes.

Deg. de latit.	Distance des centres.	Rayon de projection.	Deg. de latit.	Distance des centres.	Rayon de projection.	Deg. de latit.	Distance des centres.	Rayon de projection.
0	0	1000	24	411	1095	48	1025	1494
2	32	1001	26	450	1112	50	1099	1556
4	65	1002	28	491	1132	52	1181	1624
6	97	1006	30	533	1155	54	1270	1701
8	130	1010	32	577	1179	56	1368	1788
10	163	1015	34	622	1206	58	1476	1887
12	196	1022	36	670	1236	60	1598	2000
14	230	1031	38	721	1269	62	1735	2130
16	265	1040	40	774	1305	64	1892	2281
18	300	1051	42	831	1346	66	2072	2459
20	336	1064	44	891	1390	68	2283	2669
22	373	1079	46	755	1449	70	2535	2924
24	411	1095	48	1025	1494	72	2839	3236

Explication d'une figure par laquelle on trouve, sans calcul, tous les effets de la parallaxe sur les passages de Vénus.

2083. Les différentes sortes d'observations que l'on a faites dans les passages de Vénus sur le Soleil, en 1761 et en 1769, sont toutes affectées des parallaxes en différentes manieres : le calcul de ces parallaxes est d'une extrême longueur par les méthodes ordinaires; mais il devient de la plus grande facilité par l'opération graphique dont nous allons donner l'explication d'après les principes précédens.

Je décris une ellipse RVGP (FIG. 127), dont le grand axe est au petit, comme le sinus total est au sinus de la déclinaison du Soleil, qui est de 22° 42′, ou à-peu-près, dans les passages de Vénus sur le Soleil qui arrivent au mois de juin ; on a divisé cette ellipse en temps, de deux en deux minutes, pour avoir à chaque instant la situation de Paris sur son ellipse de projection.

Si P est le lieu de Paris sur son parallele le 6 juin à 8h 15′ du matin, et C le centre de la projection pour Paris, la ligne PC, tirée au centre de la projection, représentera la parallaxe de hauteur (1821); si l'on porte la longueur de cette ligne PC sur l'échelle de 49° de la-

titude, près de laquelle est marqué Paris (FIG. 128), l'on verra qu'elle est de 19″6. Ainsi la parallaxe de hauteur de Vénus au Soleil à 8h 15′ du matin, étoit de 19″6 à Paris, en supposant 25″ 8 pour la différence des parallaxes, comme dans l'échelle de la figure 128 (a).

2084. Pour trouver la parallaxe d'ascension droite, on abaissera une perpendiculaire PZ (FIG. 127) du point P où est situé Paris, sur le parallele à l'équateur, mené par le point C, qui est le centre de la projection pour Paris; la ligne CZ, comprise depuis le centre jusqu'à cette perpendiculaire, étant portée sur l'échelle (FIG. 128), doit se trouver de 14″. C'est la parallaxe d'ascension droite, mesurée sur un arc de grand cercle passant par le Soleil (2080), telle par conséquent qu'il faut l'avoir pour réduire les observations faites au micrometre (2136), dans lesquelles on n'a besoin que de trouver la différence d'ascension droite dans la région du Soleil; elle seroit plus grande d'un treizieme, si on la divisoit par le cosinus de la déclinaison (3877) pour la réduire à l'équateur.

La parallaxe de déclinaison n'est autre chose que la perpendiculaire elle-même tirée du point P sur le parallele à l'équateur (2080); dans cet exemple elle doit être de 14″½. C'est la quantité qu'il faut ôter de la différence apparente de déclinaison entre Vénus et le Soleil, observée à Paris le 6 juin 1761, à 8h 15′ du matin, déja corrigée par la différence des réfractions (2247 et suiv.), pour avoir cette vraie différence de déclinaison.

2085. On trouvera de la même maniere la parallaxe de longitude et de latitude, au moyen de la ligne AC marquée parallele à l'écliptique sur la figure 127; elle fait, avec la parallele à l'orbite de Vénus, un angle égal à l'inclinaison relative, qui étoit, en 1761, de 8° 29′. Sur ce diametre, qui représente une portion de l'écliptique, on abaissera du point P une perpendiculaire PB, qu'on trouvera dans l'exemple proposé de 16″; ce sera la parallaxe de latitude. La distance entre cette perpendiculaire et le centre C de la projection, mesurée le long de l'écliptique, sera la parallaxe de longitude; elle se trouve de 12″½.

2086. La parallaxe de distance est une des plus nécessaires, puisque les meilleures observations que l'on ait faites dans les passages de Vénus, sont celles où l'on a employé des héliometres, pour observer la distance de Vénus au bord du Soleil (2132), et que ces observations seroient difficiles à réduire sans le secours de l'opération

(a) Les quantités prises sur les échelles de la figure 128 doivent être diminuées d'un sixieme.

graphique.

graphique. Pour trouver la parallaxe de distance, on est obligé d'avoir égard à la situation de Vénus; on tirera par le centre de l'ellipse une ligne EM parallele à l'orbite, et une autre ligne MN perpendiculaire à l'orbite; ayant pris EM pour représenter la plus courte distance des centres 9′ 30″, on prendra sur MN la valeur de 4′ par heure, pour diviser cette orbite MN, et marquant au point M le temps calculé à-peu-près, ou observé, du milieu du passage (c'étoit $5^h 30'$ en 1761), on divisera MN en heures et minutes (2079); le point N, par exemple, répondra à 8^h 15′, qui étoit le temps de la sortie en 1761, $2^h 45'$ après le milieu du passage; alors on tirera une ligne occulte EN, et par le centre C de la projection, une ligne CH parallele à EN: la perpendiculaire PH abaissée du point P sur cette ligne, sera la parallaxe de distance; si dans l'exemple précédent on porte PH sur l'échelle qui convient à la latitude de Paris, on la trouvera d'environ $3''\frac{1}{2}$ pour $8^h\frac{1}{4}$ du matin. Cette parallaxe de distance doit se retrancher de la distance apparente de Vénus au centre du Soleil, parceque le point H est au midi du point P, aussi bien que Vénus; si le point H n'étoit pas entre le point P et la parallele à l'orbite de Vénus, tirée par le centre C de la projection, il faudroit ajouter la parallaxe à la distance apparente.

La ligne MN doit être tirée plus loin du centre E de l'ellipse, si l'on emploie cette figure pour le passage de 1769, parceque la moindre distance des centres étoit de 10′ 10″ (2156): on pourra prendre EO au lieu de EM, et par ce moyen l'on conservera les divisions de la ligne NM pour l'entrée, et on les portera au-dessous de la ligne EO pour la sortie de Vénus; le point O répondra à 10^h 36′ du soir, milieu du passage à Paris.

2087. Je suppose qu'à 7^h 20′ du soir, temps où Vénus commençoit à paroître sur le Soleil à Paris en 1769, l'on veuille avoir la parallaxe de distance, on tirera une ligne du centre E au point D qui répond au-dessus du point O, à 3^h 16′ de distance au milieu du passage; du centre C de la projection on tirera une perpendiculaire sur cette ligne DE prolongée à gauche ou au-dessous du point E, cette perpendiculaire va se diriger vers le lieu de Vénus sur son orbite pour 7^h 20′; alors du point R, qui est à 7^h 20′ du soir ou à la gauche de l'ellipse, l'on tirera une perpendiculaire RV sur cette derniere ligne, ou, ce qui revient au même, une parallele à ED; le point V où elle rencontrera CV, marquera l'endroit qui paroît aussi éloigné de Vénus que le point R où Paris est projeté, et la distance CV du centre C au point V sera la parallaxe de distance. On peut aussi tirer par le centre C une parallele à DE, et la perpendiculaire abaissée

du point R où est Paris sur cette parallele à ED, sera la parallaxe de distance; cette parallaxe étant portée sur les divisions du rayon de projection pour Paris, l'on y verra qu'elle contient 26″, c'est-à-dire, qu'elle est à très-peu-près égale à la parallaxe horizontale de la figure.

2088. Le commencement de la sortie à Pétersbourg est arrivé à 3h 27′ 25″ du matin, et 2h 59′ après le milieu du passage. Pour trouver la parallaxe de distance à ce moment-là, je tire du centre E de l'ellipse une ligne au point Q, qui répond à 2h 59′ au-dessous du point O; par le point K marqué 60°, qui est le centre de la projection pour Pétersbourg, je tire une parallele KT à cette ligne EQ; du point G, où est Pétersbourg sur son parallele à 3h 27′ du matin, j'abaisse sur KT une perpendiculaire GT, c'est la parallaxe de distance, qui, portée sur l'échelle de 60°, se trouve de 19″.

2089. Dans l'exemple (2086), le point H, où aboutit la perpendiculaire PH, est au midi du point P pour la sortie en 1761, et Vénus étoit aussi au midi; c'est une preuve que la distance apparente de Vénus, ou la distance au point P, étoit la plus grande, et que la sortie étoit accélérée par l'effet de la parallaxe de distance PH. Dans le dernier exemple pour la sortie en 1769, le point T et la ligne KT sont au-dessous ou au midi du lieu G pour la sortie, tandis que Vénus étoit au nord; ainsi la distance de Vénus au point G, ou la distance apparente, étoit plus petite, et la sortie étoit retardée : cela revient au même que la regle dont j'ai déja parlé (2073).

Au lieu du grand nombre d'échelles qui sont dans la figure 128, on pourroit se contenter d'une seule, ou même des divisions du demi-grand axe de l'ellipse, en faisant seulement cette proportion : la sécante de la latitude pour un rayon 1000 est à la différence des parallaxes horizontales, comme le nombre de milliemes, trouvées sur les divisions du demi-grand axe de l'ellipse, est à leur valeur en secondes. Ainsi, dans le dernier exemple, la sécante de 59° 56′ étant 1996, et ayant trouvé 144 sur l'axe de l'ellipse, je dis 1996 : 26 :: 1440 : 19″, c'est la parallaxe de sortie à Pétersbourg. Un compas de proportion suffiroit pour ces regles de trois.

2090. Le centre C de la projection pour Paris (FIG. 127) est marqué par les trois lignes qui y passent; mais il doit changer, si l'on calcule des observations faites sous d'autres latitudes (2081) : on voit sur la ligne ECK les points qui répondent à différentes latitudes, c'est-à-dire, les centres de la projection qu'il faut substituer au point C, et par lesquels on doit tirer les paralleles à l'écliptique et à l'équateur, c'est-à-dire, toutes les lignes qui donnent les pa-

rallaxes. Les degrés marqués au-dessus du centre E de l'ellipse sont pour les pays situés au midi de l'équateur à des latitudes australes, et quoiqu'ils ne soient marqués que jusqu'à 30°, il est aisé d'étendre les divisions en transportant vers le haut, sur un papier qu'on y ajoutera, les divisions qui sont au-dessous du centre de l'ellipse.

2091. Le racornissement du papier est un obstacle à l'exactitude des figures imprimées; Hévélius s'en plaignoit à l'occasion de ses phases de la Lune (Selenogr. pag. 214): le papier que l'on mouille pour l'impression se dilate et s'étend; il se comprime plus ou moins, suivant sa qualité et son épaisseur; il se retire ensuite inégalement lorsqu'on le fait sécher, et la proportion n'est plus la même entre sa longueur et sa largeur: Hévélius en avertissoit le lecteur, pour qu'on ne l'accusât pas d'avoir mal dessiné la situation des taches de la Lune, et d'avoir fait ovales des figures qui devoient être circulaires.

Dans une des épreuves de la grande ellipse (FIG. 127), j'ai observé que les extrémités du grand axe de l'ellipse étoient plus près du centre de l'ellipse sur le papier que sur le cuivre, de 1 ligne $\frac{3}{4}$ d'un côté, et de 2 lignes $\frac{1}{4}$ de l'autre; les sommets du petit axe étoient rapprochés du centre, l'un de $\frac{1}{3}$, l'autre de $\frac{1}{3}$ de ligne; le centre de la projection pour Paris étoit rapproché d'une ligne, du centre de l'ellipse; ainsi le papier s'étoit rétréci dans toutes ses parties, mais beaucoup plus dans sa longueur, qui est la direction de l'enverjure de la forme, parcequ'il a beaucoup moins de densité dans le sens des fils de l'enverjure, que dans le sens des pontuseaux, où les fils étant serrés l'un contre l'autre, ont donné à la pâte plus de fermeté et de consistance (Voyez l'*art de faire le papier*, que j'ai donné en 1760): on pourroit croire que le rouleau de la presse contribue à l'extension du papier (a); mais l'expérience fait voir que les estampes ne laissent pas de se rétrécir, même dans le sens où la presse auroit dû les étendre (4085).

2092. Pour y remédier dans les cartes géographiques, Guillaume de l'Isle avoit eu l'attention d'altérer sur ses cuivres les dimensions des cartes, et de changer ses cercles en ovales, de la quantité dont le papier avoit coutume de se rétrécir en longueur plus qu'en largeur. Son frere Jos. Nic. de l'Isle, en faisant graver la figure que l'on voit ici, a pris une autre précaution, pour mettre chacun à

(a) Si les papetiers faisoient des formes d'une seule planche de cuivre, ou en forme de treillis, comme pour le papier vélin, et qu'on imprimât les cartes avec une presse comme celle de M. Pierres, où l'on n'appuie qu'une seule fois, au lieu du rouleau des imprimeurs en taille-douce, on éviteroit peut-être cette inégalité; on pourroit aussi imprimer cette figure sur du papier bien séché.

portée de remédier à l'irrégularité de la figure imprimée : on voit tout autour de la planche XV un rectangle AABB, dont la longueur AA ou BB a été faite exactement de 23 pouces sur le cuivre, et la hauteur AB de 17 pouces. Il arrivera communément par le tirage que la longueur se réduira à 22 pouces 8 lignes, et la hauteur à 16 pouces 10 lignes; mais comme l'on humecte nécessairement la figure en la collant sur un carton, il sera aisé de l'étendre de maniere qu'elle remplisse exactement un rectangle fait sur le carton, dont un côté soit à l'autre comme 17 est à 23 : on la laissera sécher dans cet état, et elle conservera ses dimensions proportionelles, parceque le carton s'opposera suffisamment à la contraction du papier.

De l'entrée et de la sortie de Vénus pour tous les pays de la Terre.

2093. C'EST une partie essentielle du calcul des passages de Vénus sur le Soleil, que de déterminer à la fois pour tous les pays de la Terre, et cela par une méthode facile, l'effet de la parallaxe qui fait paroître l'entrée ou la sortie plutôt ou plus tard. De l'Isle fut le premier qui eut l'idée de marquer sur une seule mappemonde, au moyen d'un certain nombre de cercles, la quantité dont l'entrée et la sortie arrivent dans les différens pays plutôt ou plus tard que pour le centre de la Terre. Il l'exécuta d'abord pour le passage de Mercure, en 1753, ensuite pour celui de Vénus, en 1761 ; et j'ai publié une semblable carte pour le passage de 1769 (a), dont il y a un petit extrait dans la figure 133.

2094. En expliquant cette mappemonde, je pris pour exemple le passage de Vénus qui étoit annoncé pour 1769, dont j'avois fait le calcul et construit la figure par une méthode particuliere. J'en donnai l'explication et les calculs à l'académie, lorsqu'on y étoit occupé à traiter du passage de 1761 et de celui de 1769, en discutant les avantages qu'il pourroit y avoir dans l'un et dans l'autre (Voyez l'*hist. de l'acad.* 1757, *pag.* 100, *mém. pag.* 232); je conserverai ici le même exemple, mais j'y ajouterai les résultats de l'observation.

2095. Je calculai d'abord les circonstances de ce passage, et je trouvai le temps de la conjonction vraie en C (FIG. 129), le 3 juin 1769, à $10^h\ 10'$ du soir, sa longitude étant de $8^s\ 13^\circ\ 27'\ 10''$, la lati-

(a) Elle se trouve gravée en grand, avec tous les détails et les distinctions de couleurs, à Paris, chez *Latré*.

tude géocentrique 10′ 13″4 boréale (a), l'entrée du premier bord de Vénus en E à 7h 21′, et la sortie du second bord de Vénus en S à 13h 44′, la perpendiculaire TM = 10′ 7″; la différence des parallaxes horizontales 22″ 6, en supposant celle du Soleil de 9″; le mouvement horaire 4′ 0″11 (2061); l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique étoit de 8° 28′ 59″, et son inclinaison sur l'équateur, ou l'angle OTM, de 15° 32′.

La projection TA de la Terre étant vue sous un angle de 22″6, la distance TA est de 22″6, tandis que TS est de 15′ 47″; c'est la valeur que je supposois au demi-diametre apparent du Soleil : ainsi le lieu de la Terre, dont la projection se trouve en A, et qui rapporte le centre du Soleil au point A (1784), verra Vénus éloignée du centre du Soleil de 15′ 24″4 seulement, ou de la quantité SA, lorsque le centre de Vénus, étant en S, quittera véritablement le Soleil pour un observateur qui répondroit au centre T; il faudra donc que Vénus en avançant dans son orbite soit arrivée en V, pour que la distance VB du centre du Soleil qui paroît en B (pour le lieu de la Terre dont la projection est au point B), et du centre de Vénus qui est en V, soit de 15′ 47″, c'est-à-dire, que VD soit de 22″6, aussi bien que TB; alors le lieu projeté en B verra le centre de Vénus sortir de dessus le Soleil, puisque sa distance apparente au centre du Soleil sera égale au demi-diametre du Soleil (1787), et le point B sera le dernier de tous les points de la Terre d'où l'on verra la sortie: ce point B differe si peu de A, que je néglige ici la différence.

2096. Par la même raison, si l'on prend une ligne TN qui soit plus petite de 22″6 que TS, en sorte que la ligne entiere NTI soit égale au demi-diametre du Soleil, le point I sera le premier de tous les points de la Terre qui verra le centre de Vénus sortir du Soleil, parcequ'il verra Vénus éloignée du Soleil de la quantité IN, égale au demi-diametre du Soleil, dans le temps qu'elle sera encore en N. Le point I n'est pas diamétralement opposé au point B; mais la différence est assez légere pour pouvoir se négliger dans une opération purement graphique; d'ailleurs, il n'en résulteroit pas 5″ d'erreur sur les temps que l'on cherche, et il s'en faut beaucoup que nous soyons assurés d'une si grande exactitude dans ces sortes de prédictions.

2097. Ce que nous avons dit des points B et I pour la sortie de Vénus, doit s'entendre aussi des points H et K pour l'entrée de Vénus sur le Soleil : le point H est le premier, entre tous les pays

(a) Par les observations, j'ai trouvé la conjonction à 10h 13′ 40″, et la latitude 10′ 16″ (2156).

de la Terre, qui verra Vénus entrer sur le Soleil ; le point K sera le dernier.

2098. La différence entre le temps où le point H verra l'entrée de Vénus, et le temps où elle arrivera pour le point K, dépend de la distance HK, qui est de 45″2. Pour trouver cet intervalle de temps, il faut résoudre séparément les deux triangles TMN, TMV ; on connoît la perpendiculaire TM avec les hypoténuses ; on cherchera les autres côtés. Pour faire ce calcul, je supposerai que le point N et le point V soient ceux du dernier contact extérieur de Vénus en 1769, le demi-diametre de Vénus étant supposé de 29″ (2157), l'on aura 16′ 16″ pour la somme des demi-diametres du Soleil et de Vénus ; mais puisqu'il s'agit du contact extérieur des deux bords, l'hypoténuse TN est plus petite de 22″6, et TV plus grande de la même quantité ; c'est-à-dire que TN est de 15′ 53″4, et TV de 16′ 38″6 ; en conséquence NV est 57″74, ou 14′ 27″ de temps. Je supposai cette quantité de 15′, en nombres ronds, pour la facilité des opérations suivantes, c'est-à-dire que je supposai 15′ de temps entre la sortie de Vénus pour le point I de la Terre, et sa sortie pour le point P, comme on les auroit réellement, si la parallaxe du Soleil étoit de 9″⅓. En ôtant 7′½ de l'entrée pour le centre de la Terre, et de plus la valeur du demi-diametre de Vénus, on trouvera que le point H avoit le premier contact à 7^h 14′ du soir.

2099. Considérons maintenant des points de la Terre Z, F et Y, qui sont éloignés du point E d'une quantité EF, plus grande que EH d'un tiers du diametre HK de la projection ; tous ces pays devoient voir l'entrée de Vénus 5′ plus tard que les pays situés en H ; car, puisque du point H au point K il y a 15′ de différence, il doit y en avoir cinq du point H au point F, et tous les points qui sont sur le petit arc ZFY étant sensiblement à même distance du point E, voyoient la même distance apparente des centres de Vénus et du Soleil, et Vénus entroit au même instant sur le Soleil pour tous les pays projetés sur l'arc ZFY ; je prendrai l'arc ZFY pour une ligne droite, à cause de son extrême petitesse, en comparaison de EF.

2100. Si l'on partage le diametre HK en 15 parties égales (comme nous l'avons fait séparément dans la figure 130, pour éviter la confusion), et que le point H ait vu l'entrée lorsqu'il étoit 7^h 14′ à Paris, le pays de la Terre qui répond au premier point de division verra l'entrée une minute plus tard, ou à 7^h 15′ ; le second point la verra à 7^h 16′, etc. J'ai marqué à la droite du diametre HK les minutes de l'entrée, et à gauche celles de la sortie, pour les différens

points de la Terre qui répondent aux 15 portions du diametre de la projection.

2101. Si donc on prend un globe terrestre d'un diametre égal à HK, qu'on prenne l'ouverture ou la distance GH, et qu'on décrive un cercle en prenant pour centre ou pour pole le point du globe que représentoit le point H de la projection, on tracera aisément sur ce globe un petit cercle, dont la circonférence marquera tous les pays de la Terre où l'entrée doit commencer à $7^h 19'$. Tous ces pays de la Terre étoient marqués sur la projection (FIG. 129) par le cercle ZFY; ils étoient par conséquent à une distance du bord de Vénus, égale à $16' 16''$, somme des demi-diametres de Vénus et du Soleil; ainsi ils devoient tous observer au même instant le premier contact des deux bords : j'appellerai *cercles d'entrée* ces petits cercles décrits sur le globe, et qui passent sur tous les points où l'entrée paroît au même instant.

2102. Ainsi la premiere opération préliminaire consiste à trouver sur le globe terrestre le point H (FIG. 129), qui doit servir de pole à tous ces cercles d'entrée que nous avons à décrire, et qui seront à-peu-près paralleles entre eux ; on peut trouver ce point avec le globe même, et l'on peut aussi y employer le calcul : on cherchera d'abord l'angle ETM qui est de $50° 48'$. Si l'on en ôte l'angle OTM de $15° 32'$ (2095), on aura l'angle OTE, ou l'arc HX de la Terre, qui en est la mesure, égal à $35° 16'$; et si on les ajoute ensemble, on aura l'arc XA de $66° 20'$.

2103. On prendra un globe terrestre monté sur son horizon ; on élevera le pole de $22° 42'$, qui est la déclinaison du Soleil, et dans cet état l'horizon du globe représentera le cercle d'illumination (1816), ou un plan de la Terre parallele au plan de projection.

2104. Le globe étant ainsi élevé, suivant la déclinaison du Soleil, il faut le tourner suivant l'heure qu'il est. Par exemple, à $7^h 20'$ temps vrai à Paris, le Soleil est éloigné de 110° du méridien ; il faut donc faire tourner le globe d'occident en orient, comme tourne la Terre, jusqu'à ce qu'il y ait 110° de l'équateur entre Paris et le méridien.

2105. Les pays de la Terre qui sont à 110° du méridien de Paris vers l'occident ont 270° de longitude ; il n'y a donc qu'à tourner le globe, en sorte que le point marqué à 270° de l'équateur se trouve sous le méridien. Dans cet état, le globe sera dans la position où le verroit un observateur placé dans le Soleil, quand il est à Paris $7^h 20'$.

2106. Tous les pays situés alors dans l'horizon de notre globe du

situés sur l'arc AD, en avançant vers l'orient ou vers la droite ils cessoient de se trouver sur le cercle d'illumination AD, et perdoient le Soleil de vue : ainsi l'entrée de Vénus arrivoit pour eux au coucher du Soleil. Au contraire les pays situés sur GB et sur BA, en avançant vers l'orient, montoient sur le cercle d'illumination, et voyoient l'entrée au lever du Soleil, comme nous l'avons marqué sur les arcs GB et BA.

2109. On trouvera par une opération semblable le cercle d'illumination pour le moment de la sortie du bord de Vénus vu du centre de la Terre, ou pour $13^h\ 44'$ au méridien de Paris. L'angle horaire étant de 206°, les pays situés à 174° de longitude étoient alors dans le méridien; car $360 - 206 + 20 = 174$; on disposera donc le globe, élevé de 22°, en sorte que le 174° degré de longitude soit sous le méridien ; alors on verra du côté de l'orient, dans l'horizon, tous les pays où la sortie doit paroître au coucher du Soleil, et à l'occident tous ceux où la sortie doit arriver au Soleil levant; ces lignes sont marquées EGH et CAI sur la mappemonde. Les pays situés sur CI, en avançant vers l'orient, quittoient alors le cercle d'illumination, et perdoient de vue le Soleil; ainsi la sortie de Vénus arriva pour eux au coucher du Soleil. Au contraire les lieux situés sur la ligne EGH, et qui, par le mouvement diurne, avançoient vers l'orient, s'élevoient au-dessus du cercle d'illumination EGH, pour voir la sortie au lever du Soleil.

Le point G où se coupent les lignes FGB, EGH, voyoit l'entrée au coucher du Soleil, et la sortie le lendemain matin au lever du Soleil; mais la durée de ce passage y étoit invisible; c'est ce qui arrivoit vers Marienbourg, en Livonie. Le point A où se coupent les deux lignes CAI et BAD voyoit l'entrée au Soleil levant, et la sortie au coucher du Soleil, on y voyoit par conséquent toute la durée du passage.

Dans tout l'espace FGBEF, on a vu l'entrée de Vénus aussi bien que dans tout l'espace BCDAB. Dans l'espace HBEGH et CBIAC, on a vu la sortie; ainsi les espaces communs à tous les deux, savoir, CBAC et BGEB ont vu l'un et l'autre, c'est-à-dire, l'entrée et la sortie. Dans les espaces ADCA et FGEF on ne voyoit que l'entrée. Dans les espaces BGHB et BAI on ne voyoit que la sortie. Dans les parties FGHF, IADI, l'on ne voyoit ni l'un ni l'autre. Dans les mappemondes que M. de l'Isle a publiées pour les passages de Mercure et de Vénus, en 1753 et 1761, de même que dans la mienne pour 1769, ces différens espaces sont désignés par des couleurs différentes.

2110. Il s'agit maintenant de tracer sur la carte les cercles d'entrée

pour 7^h $17'$, $20'$, $23'$, $26'$, etc., afin de connoître tous les pays où l'effet de la parallaxe est le plus considérable, et de pouvoir choisir en conséquence la position la plus favorable pour l'observer.

Supposons que le cercle HGK (FIG. 130) soit exactement de la même grandeur que le globe dont on veut se servir*, par exemple, de six pouces; que le point H représente le premier de tous les pays de la Terre où se voit l'entrée, c'est-à-dire, où elle s'apperçoit dès 7^h $14'$, tandis qu'au point opposé K elle se voit seulement à 7^h $29'$; dans les points comme G, on la voit à des temps intermédiaires entre 7^h $14'$ et 7^h $29'$. On divisera HK en 15 parties égales, puisque nous supposons $15'$ de temps pour la différence entiere des deux points H et K (2098); par chacun de ces points de division, on tirera des perpendiculaires au diametre HK; elles intercepteront des arcs HG, qui seront les largeurs des cercles d'entrée et de sortie pour les différens temps marqués sur le diametre HK; ainsi, prenant avec un compas la distance du pole H au point G, marqué par la ligne de la cinquieme division, on prendra cette même distance, qui est d'environ 70° 32' sur le globe, puisque son sinus verse est un tiers du diametre; avec cette ouverture, partant du pole que nous avons déterminé près de Munich (2106), et faisant tourner circulairement une pointe du compas, on formera un cercle qui coupe l'équateur à 330° de longitude, le premier méridien à 17° de latitude australe, etc. Il suffit d'avoir trois points sur un hémisphere; on les marquera sur la mappemonde par leurs longitudes et leurs latitudes; on fera passer un cercle par ces trois points, et ce même cercle passera nécessairement sur tous les autres points qui appartiennent au même cercle, et où l'entrée de Vénus devoit arriver à 7^h $19'$ comptées sur le méridien de Paris.

*2111. Nous parlons de ces cercles décrits sur la mappemonde, comme des cercles décrits sur le globe, parcequ'on verra que dans la projection des mappemondes tous les cercles du globe deviennent des cercles plus ou moins grands, suivant leur situation. (4063).

2112. La mappemonde représente le globe coupé en deux parties, ce qui nous a obligés de couper aussi en deux portions la plupart des cercles d'entrée. Par exemple, on voit sur l'hémisphere du nouveau monde (FIG. 133) une portion LM du cercle d'entrée de 7^h $17'$, et l'on voit encore à gauche dans l'autre hémisphere une portion NO du même cercle, marquée de même 7^h $17'$. Chacune de ces deux portions a exigé trois points pour la déterminer; mais on voit que le point N et le point L ne sont qu'un même point, l'un et l'autre étant sur le premier méridien vers 71° de latitude.

2113. Les cercles de sortie se décriront de la même maniere lorsqu'on aura les poles de sortie (2107). Le pole B (FIG. 129) se trouve vers Mascate en Arabie; le point ou pole opposé I se trouve dans la mer du Sud ; celui-ci voit la sortie à 13h 36′, tandis que le point B la voit à 13h 51′, comme je l'ai marqué dans la fig. 130 : la différence est encore de 15′; ainsi l'on peut prendre le cercle HGK pour représenter les différens arcs dont on aura besoin pour la sortie ; le point H étant marqué 13h 51′, les points de division qui ont servi à marquer d'un côté 7h 17′, 20′, 23′ et 26′, serviront à marquer de l'autre 13h 48′, 45′, 42′, 39′, et les mêmes ouvertures de compas qui ont servi pour tracer les cercles d'entrée (2110), serviront à décrire les cercles de sortie.

2114. Ayant tracé de même tous les cercles d'entrée et de sortie dans le passage de 1769, j'ai vu que l'entrée à *Mexico*, dans la nouvelle Espagne, devoit être à 7h 21′ 10″, la sortie à 13h 37′ 40″ ; ainsi la durée totale du passage y étoit de 6h 16′ 30″, tandis qu'au nord de Pétersbourg la durée y devoit être plus grande de 18′ ¼.

2115. En conséquence j'annonçai que deux observations completes de ce passage, en 1769, dont l'une seroit faite au Mexique, et l'autre au nord de Pétersbourg, nous donneroient la parallaxe avec une précision deux fois aussi grande que celle qu'on auroit pu avoir dans le passage observé en 1761, en supposant même toutes ces observations d'accord. (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 244). J'indiquai ainsi des positions qui furent adoptées par toutes les académies, et qui déterminerent les voyages dont nous parlerons en faisant l'histoire de ces observations (2145). Celles de la mer du Sud étoient encore plus importantes, puisque la durée totale du passage pouvoit s'y trouver de 25′ plus courte qu'en Lapponie ; j'en avertis dans le mémoire que je publiai en 1764 sur ce passage; aussi il y eut un vaisseau anglois avec lequel on alla faire cette observation dans la mer du Sud, et elle fut faite complètement à l'isle de Taïti, par MM. Banks, Solander et Gréen ; le premier contact intérieur arriva à 9h 44′ 4″ du matin, et le second à 3h 14′ 8″ du soir; le lieu de l'observation est par 17° 28′ 55″ de latitude sud. Voyez mon *mémoire* sur le passage de Vénus, publié en 1772.

Méthodes pour observer les passages sur le Soleil, et pour tirer des observations les conséquences qui en résultent.

2116. Il y a trois sortes d'observations différentes que l'on peut faire dans un passage de Vénus et de Mercure sur le Soleil; chacune

exige une méthode pour calculer ces observations, et en tirer les résultats convenables. Je ne parle que de trois especes d'observations, parcequ'on ne peut guere employer pour un passage de Vénus que trois sortes d'instrumens; 1°. le-quart-de cercle (2311), pour avoir les différences de hauteur et d'azimut; 2°. le micrometre (2360), ou l'héliometre (2439), pour avoir les distances au bord le plus proche; 3°. le micrometre dans la lunette parallatique (2400), pour avoir les différences d'ascension droite et de déclinaison.

2117. Le quart-de-cercle est de tous les instrumens d'astronomie le plus familier aux astronomes, celui dont les observations sont les plus simples, la manipulation la plus aisée; c'est en général celui que l'on doit préférer à tous, lorsqu'il est possible de l'employer: D. Cassini s'en étoit servi en 1690; M. de l'Isle en fit sentir toute l'utilité pour Mercure (*Mém. acad.* 1723), et il est communément préférable à la lunette parallatique, pour les raisons suivantes.

2118. Dans un quart-de-cercle les fils conservent toujours leur position exacte, l'un est toujours vertical, et l'autre toujours horizontal, au lieu que dans la machine parallatique il est difficile que le mouvement soit aussi régulier, et la position aussi exacte que celle que détermine un fil à plomb. Dans ces observations du quart-de-cercle la réfraction ne change point les quantités, ou les différences de hauteurs observées, au lieu qu'elle affecte et complique beaucoup les différences d'ascension droite et de déclinaison. Enfin, les réductions et le calcul qu'exigent les parallaxes et les réfractions, rendent le calcul plus long dans les observations faites à la lunette parallatique, que dans celles qu'on fait au quart-de-cercle.

2119. Soit AB (FIG. 135) le fil vertical, et ED le fil horizontal, placés au foyer de la lunette d'un quart-de-cercle, en sorte que AEBD représente le champ de la lunette, S le disque du Soleil sur lequel on apperçoit Vénus en V, dont on veut déterminer la position. On disposera la lunette de maniere que le Soleil ne touche point les fils; mais que, par le mouvement diurne, il soit obligé de venir les rencontrer; si c'est le matin, comme les lunettes astronomiques renversent les objets, il faut faire paroître le Soleil au haut de la lunette et sur la droite, comme on le voit dans la figure en R; alors le mouvement diurne étant dirigé de R en H, le Soleil traversera le fil vertical et l'horizontal aussi bien que Vénus.

2120. On observera donc attentivement avec une horloge à secondes les six instans suivans, dans l'ordre où ils arriveront; car il pourra se faire que les passages au fil horizontal précedent les passages au fil vertical, et que l'ordre suivant soit changé; cela dépendra

de l'endroit où l'on aura placé le Soleil, et de la direction de son mouvement par rapport à l'horizon.

1. Passage du bord inférieur du Soleil au fil horizontal.
2. Passage du bord précédent de Vénus au fil horizontal.
3. Passage du bord précédent du Soleil au fil vertical.
4. Passage du bord précédent de Vénus au fil vertical.
5. Passage du bord suivant du Soleil au fil vertical.
6. Passage du bord supérieur du Soleil au fil horizontal.

J'appelle bord inférieur du Soleil celui qui paroît tel dans la lunette (quoiqu'il soit réellement supérieur), afin de ne pas compliquer l'attention de l'observateur par des considérations incidentes.

2121. Je n'observe que le passage d'un des bords de Vénus, parceque le diametre de cette planete étant assez connu (2157), il est inutile de se charger d'une double observation qui peut nuire à l'exactitude des autres, et de tourner l'attention de l'observateur; si cependant on a avec soi une personne pour compter les secondes, et une autre pour les écrire, on fera bien d'observer les deux bords de Vénus au fil vertical AB et au fil horizontal ED; le milieu donnera directement le passage du centre de Vénus.

2122. Quoique j'aie indiqué le passage de chaque bord du Soleil au fil vertical et au fil horizontal, on peut se contenter d'observer un seul bord, en choisissant celui dont Vénus est le plus près; car le diametre du Soleil étant très bien connu, on trouvera fort exactement par le calcul (2124) combien son diametre a dû employer de temps à traverser le fil vertical et le fil horizontal du quart-de-cercle; mais si l'on a la facilité d'observer chaque bord, on aura une confirmation de l'un par l'autre, et un double terme de comparaison pour la situation de Vénus.

2123. Lorsqu'on a, par observation, le temps qui s'est écoulé entre les passages du bord du Soleil et du bord de Vénus à un même fil, on en conclut leur différence de hauteur, si c'est le fil horizontal, et leur différence d'azimut, si c'est le fil vertical; j'appellerai ici différence d'azimut, comme dans le calcul des éclipses (1888), un arc de grand cercle perpendiculaire au vertical.

2124. Si l'on n'a pas observé le temps que le diametre du Soleil emploie à traverser les fils, on peut le calculer par la méthode suivante.

Soit ZEBC (FIG. 28) un fil vertical fixe que le Soleil traverse en allant de S en D; le premier bord du Soleil touche d'abord le fil vertical en A, et le second bord du Soleil touche ensuite le même

vertical en B; il s'agit de savoir le temps qui s'écoulera entre ces deux contacts, car ce sera le temps que le diametre du Soleil emploiera à traverser le vertical ZEC : l'arc SD étant supposé assez petit pour être parcouru d'un mouvement uniforme, il sera coupé en deux parties égales en E par le vertical; alors dans le triangle rectiligne SEA, rectangle en A, on a ES : SA :: 1 : sin.E, donc SA=ES sin. E, ou $ES=\frac{SA}{\sin. E}$, donc aussi le temps qui répond à ES, ou le temps nécessaire pour que le centre du Soleil arrive en EA, est égal au temps qui répondroit à une quantité égale à SA, divisée par le sinus de l'angle E, ou par le cosinus de l'angle PEZ. Ainsi, quand on connoîtra l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison, il suffira de diviser le temps que le demi-diametre du Soleil emploie à traverser le méridien (1008) par le cosinus de cet angle, pour avoir le temps qu'il emploie à traverser le vertical; en en prenant le double, on a le temps que le Soleil entier met à passer le vertical.

2125. Pour trouver aussi le temps que le Soleil entier emploie à traverser un plan parallele à l'horizon, ou à s'abaisser de tout son diametre, je suppose que CS (FIG. 29) soit la direction du mouvement diurne, HOR un plan horizontal ou un cercle parallele à l'horizon, qu'on appelle *Almicantarat* (185), que le bord du Soleil touche en O, lorsque le Soleil est au-dessus, et que le bord supérieur du Soleil touche en R lorsque le Soleil est parvenu au-dessous du même cercle : si l'arc CS ne surpasse pas un degré et demi, et que le Soleil n'emploie pas plus de six minutes ou environ, à aller de C en S, le triangle COF sera sensiblement rectilingle; et comme il est rectangle en O, on aura CO = CF sin. CFO, donc $CF=\frac{CO}{\sin. CFO}$; ainsi le temps qui est mesuré par CF, ou le temps qu'il faut au Soleil pour s'abaisser de la quantité de son demi-diametre CO, est égal au temps qui répondroit à une quantité égale à CO, divisée par le sinus de l'angle CFO, qui est égal à l'angle PFZ : en prenant le double de CO, l'on aura le temps que le Soleil entier emploie à traverser une ligne horizontale; il ne faut que diviser le temps qu'il emploie à traverser le méridien par le sinus de l'angle parallatique.

Je suppose qu'on ait calculé pour la latitude du lieu où l'on est, une table des angles parallatiques formés par le vertical et le méridien, telle qu'on la trouve pour Paris dans mon *exposition du calcul astronomique*, et dans *la connoissance des temps de* 1763 *et* 1779, sinon l'on pourra le calculer pour le temps de l'observation (1038).

2126. EXEMPLE. Le 6 juin 1761, le diametre du Soleil étoit de 31′ 34″, et sa déclinaison 22° 42′, divisant le diametre par le cosinus de la déclinaison et par 15, pour le convertir en temps, on a 136″ $\frac{9}{10}$, ou 2′ 16″9; c'est le temps que le Soleil emploie à traverser le méridien, que l'on pourroit prendre dans la table de l'article 1010. Le même jour, à 6 heures ½ du matin, l'angle ZEP étoit de 44° 39′; si l'on divise 136″9 par le sinus de 44° 39′, on a 3′ 14″; si on le divise par le cosinus de 44° 39′, on trouve 3′ 12″0 : ce sont les temps que le Soleil employoit alors à traverser le fil horizontal et le fil vertical. Nous avons déja parlé de l'usage de cette regle pour l'équation des hauteurs (934). Si le Soleil étoit trop près du méridien, cette regle cesseroit d'être exacte, parceque le changement de hauteur ne seroit plus uniforme, ni le triangle COF sensiblement rectiligne.

2127. Ainsi l'on connoît, ou par observation, ou par le calcul, le temps que le demi-diametre du Soleil emploie à traverser le fil horizontal; on fera donc cette proportion : le temps que le demi-diametre entier met à traverser le fil, est à la valeur du demi-diametre du Soleil (1388), comme le temps écoulé entre les passages du bord de Vénus et du bord du Soleil au fil horizontal est à un quatrieme terme, qui sera la différence de hauteur entre les bords observés de Vénus et du Soleil. Je suppose que le demi-diametre du Soleil étant de 15′ 46″, emploie 2′ de temps à traverser le fil horizontal dans le temps de l'observation, et qu'entre les bords inférieurs de Vénus et du Soleil au fil horizontal il se soit écoulé une minute de temps, il est évident qu'il y aura la moitié de 15′ 46″, ou 7′ 53″, pour la différence de hauteur entre les deux bords de Vénus et du Soleil.

On connoît de même le temps que le demi-diametre du Soleil met à passer le fil vertical; on a par observation le temps écoulé entre les passages du bord de Vénus et de celui du Soleil au même fil; on fera donc aussi cette proportion : le temps employé par le demi-diametre du Soleil à traverser le fil vertical, est à la valeur du demi-diametre du Soleil en minutes et en secondes, comme le temps écoulé dans l'observation entre le bord précédent du Soleil et celui de Vénus au même fil vertical, est au nombre de minutes et de secondes qui forme la différence d'azimut entre ces deux bords observés.

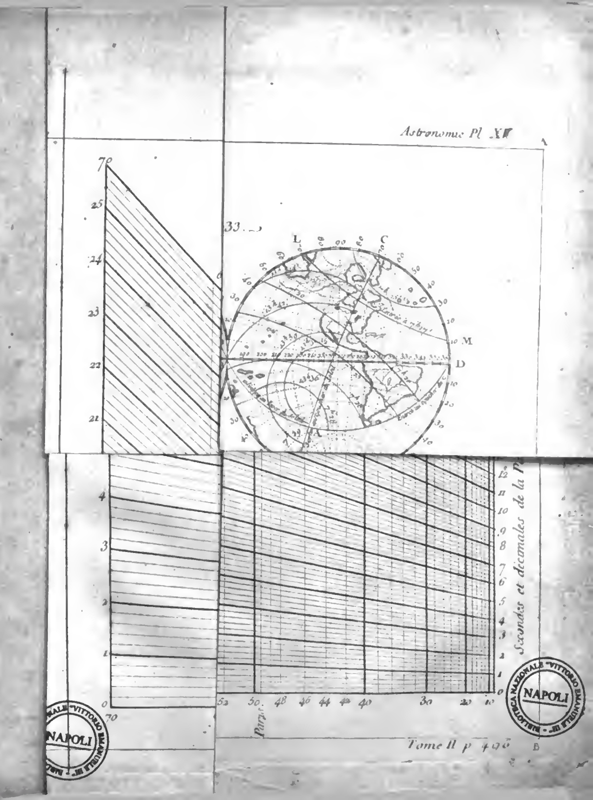
2128. EXEMPLE. Le 6 juin 1761, à 6h 31′ 46″ du matin, je trouvai que le bord précédent ou le bord occidental A de Vénus (FIG. 136), suivoit le bord précédent P du Soleil NPM de 43″ au fil vertical, et que le bord boréal F de Vénus précédoit de 59″ ½ le bord austral M

ou le dernier bord du Soleil; il s'agit d'en conclure la différence de hauteur et la différence d'azimut entre les centres de Vénus et du Soleil. Ces deux passages de Vénus au vertical et à l'horizontal n'étoient pas éloignés l'un de l'autre d'une minute de temps, sans quoi il faudroit les réduire à un même instant, au moyen du changement qu'on auroit remarqué entre ces observations et les suivantes. Le temps que le demi-diametre employoit à traverser le fil horizontal, étoit 1′ 37″0 (2126), et le temps qu'il employoit à traverser le vertical 1′ 36″0; on fera donc ces proportions : 1′ 36″ : 15′ 46″ :: 43″ : 7′ 4″; d'où il suit que le bord occidental A de Vénus (FIG. 136) étoit éloigné horizontalement du bord occidental P du Soleil de la quantité AB, égale à 7′ 4″, et y ajoutant le demi-diametre de Vénus AD (2157), on aura la quantité BD = 7′ 33″; on retranchera BD de BE, qui est égale au demi-diametre du Soleil 15′ 46″, et l'on aura ED = 8′ 13″; c'est la différence d'azimut dans la région du Soleil entre le centre du Soleil et le centre de Vénus, au moment où Vénus a passé au fil vertical.

2129. On fera ensuite cette seconde proportion, 1′ 37″ : 15′ 46″ :: 59″½ : 9′ 40″; c'est la différence FG de hauteur apparente entre le bord précédent F de Vénus, qui paroissoit inférieur dans la lunette, et le bord suivant M du Soleil; on en ôtera le demi-diametre FD de Vénus 29″, et l'on aura DG = 9′ 11″; on retranchera DG de GH égale au demi-diametre du Soleil 15′ 46″, et l'on aura DH ou CE différence de hauteur apparente entre les centres de Vénus et du Soleil, 6′ 35″.

Cette différence de hauteur apparente n'a pas besoin d'être corrigée par la réfraction, comme si on l'avoit mesurée au micrometre; d'ailleurs, le Soleil étoit assez haut et les deux points assez voisins l'un de l'autre pour que cette quantité fût insensible; mais cette différence doit être corrigée par le moyen de la parallaxe. Pour cet effet, ayant calculé la hauteur du Soleil (1036), on la trouve de 21° 59′; le cosinus de cette hauteur multiplié par la différence des parallaxes horizontales 22″, donne la différence des parallaxes de hauteur 19″. Il faut donc ôter 19″ de la différence en hauteur 6′ 35″ pour avoir la vraie différence 6′ 16″, et la véritable valeur de HD ou CE. On a vu ci-devant une méthode beaucoup plus simple pour trouver la parallaxe (2083). Dans le triangle CED, qui est sensiblement rectiligne et rectangle, on connoît CE = 6′ 16″ et ED = 8′ 13″, on trouvera l'angle DCE = 52° 40′, et l'hypoténuse CD = 10′ 21″; c'est la vraie distance du centre de Vénus au centre du Soleil.

2130. Pour en conclure la différence de longitude et de latitude, on


Astronomie Pl. XII
Secondes et decimales de la P
Paris
Tome II p. 496

on cherchera la position du cercle de latitude sur la figure, pour avoir l'angle de conjonction. L'angle de position pour l'heure donnée est 6° 23′, qu'il faut soustraire (1878) de l'angle 44° 39′ que fait le vertical avec le cercle de déclinaison; il reste 38° 16′ pour l'angle parallactique ECI; on le retranchera de l'angle ECD = 52° 40′; il restera 14° 24′ pour l'angle de conjonction DCI (1884).

2131. On abaissera du centre D de Vénus une perpendiculaire DK sur le cercle de latitude; ce sera la différence de longitude entre les centres de Vénus et du Soleil, et CK sera la latitude de Vénus. Dans le triangle DCK l'on connoît l'hypoténuse CD = 10′ 21″ et l'angle DCK 14° 24′; on trouvera la latitude CK = 10′ 1″, et la différence de longitude DK = 2′ 34″4; c'est le résultat immédiat de l'observation (2128); mais on doit en conclure aussi la conjonction et la latitude en conjonction, comme nous le dirons ci-après (2152). La méthode que nous venons d'expliquer est aussi celle dont on se sert pour observer les taches du Soleil et de la Lune (3244).

2132. On peut calculer de semblables observations sans supposer que l'un des fils soit horizontal et l'autre vertical; il suffit qu'ils soient perpendiculaires l'un à l'autre: soit RH (FIG. 135) la route du centre du Soleil, MLKY celle du centre de Vénus; si l'on a observé le bord du Soleil en T et en I, le milieu entre ces deux instans d'observation donne l'heure où le centre a passé en N; de même le milieu entre les passages des deux bords au fil AB donne le moment du passage du centre du Soleil au point Q; on a donc la valeur de NO. Dans le triangle RNT, on connoît RN et RT; on trouve l'angle N, ce qui fait connoître le côté NC du triangle NOC. Dans le triangle CYL, on connoît YL par le temps du passage de Vénus en L et en Y, et l'angle L égal à l'angle N; on cherche CL, on en ôte NC, et l'on a NL. Dans le triangle NLK l'on a NL avec l'angle L; on trouve NK différence de déclinaison entre Vénus et le Soleil, et KL qui donne le temps du passage de Vénus en K; et comme on a le passage du Soleil en N, on a par conséquent la différence entre l'ascension droite du Soleil pour le moment où il a passé en N, et celle de Vénus lorsqu'elle étoit en K (*M. de Fouchy, Mém. acad.* 1737). On verra une autre méthode (2509).

2133. Lorsqu'on peut observer pendant plusieurs heures un passage de Vénus ou de Mercure sur le Soleil, et qu'on a un bon héliomètre (2439), la méthode la plus exacte de toutes pour observer la position de la planete sur le disque du Soleil, est de mesurer sa distance au bord le plus proche du Soleil, sur-tout quand la hauteur est assez grande pour qu'on n'ait pas à craindre une grande

inégalité de réfractions; j'ai employé cette méthode avec succès dans le passage de 1761, quoique je n'eusse pas un long espace de temps pour mesurer des distances fort différentes entre elles. Par la distance du bord de Vénus au bord le plus proche du Soleil, on trouve aisément la vraie distance des centres; par exemple, CA (FIG. 137); si l'on a une autre distance, telle que CD, avec l'intervalle de temps compris entre ces deux observations, on calcule le mouvement AD de Vénus sur son orbite dans cet espace de temps; alors dans le triangle CAD, dont on connoît les trois côtés, on cherche un angle A et la perpendiculaire CB, qui est la plus courte distance des centres; d'où il est aisé de conclure le milieu du passage, le temps de la conjonction, et la latitude pour ce temps-là. C'est à-peu-près de même que nous avons cherché le temps de la conjonction vraie par le moyen d'une éclipse de Soleil (1973). Si l'on a observé la plus courte distance CB, on la compare avec une des distances comme CD, la plus éloignée du milieu du passage, et l'on en conclut BD que l'on réduit en temps, pour avoir le temps du milieu du passage en B.

2134. Enfin, si l'on n'a observé que deux distances telles que CD et CV du même côté de la perpendiculaire, comme cela m'est arrivé en 1761, on peut également s'en servir pour trouver le temps de la conjonction et la latitude pour cet instant; il étoit sur-tout avantageux de prendre pour une des deux distances celle de la sortie que nous avons bien observée.

2135. C'est ainsi que j'ai calculé toutes mes observations des distances de Vénus au bord du Soleil, en les comparant toutes à celle que donne le contact en V, qui est nécessairement l'observation la plus exacte de toutes, (2140) et j'ai trouvé, par un milieu général, la plus courte distance de 9′ 30″, et le milieu du passage de 3^h 30′ 10″; d'où il suit que le temps de la conjonction étoit à 5^h 51′ du matin, avec une latitude pour ce temps-là de 9′ 36″3. On verra ci-après la diminution qu'il faut y faire, à cause de l'irradiation du Soleil. On doit tirer des conclusions semblables de chaque observation prise séparément (2152).

2136. LE MICROMETRE, appliqué à une lunette parallatique (2400), ou même à une lunette ordinaire (2360), est de tous les instrumens le plus simple, le plus usité, le plus facile à se procurer; ainsi nous devons expliquer ici la méthode d'y observer les différences d'ascension droite et de déclinaison. Domin. Cassini proposa cette méthode en 1698, et Maraldi en a donné le détail (*Mém. de l'acad.* 1736). On dispose la lunette en inclinant les fils de maniere que le

bord du Soleil décrive par son mouvement diurne parallele à l'équateur, un des fils tel que AB (FIG. 138); l'on compte à l'horloge la minute et la seconde à laquelle le premier bord du Soleil D touche le fil horaire CDE, et ensuite le moment où le bord V de Vénus y arrive à son tour; la différence des temps convertie en degrés, et multipliée par le cosinus de la déclinaison (3879), donne la différence d'ascension droite entre le bord du Soleil et celui de Vénus, mesurée dans la région même du Soleil. On peut aussi employer le temps que le demi-diametre du Soleil emploie à passer le méridien (1010), en faisant cette regle de trois; le temps du demi-diametre du Soleil est à sa valeur en secondes de degré, comme le temps entre les bords du Soleil et de Vénus est à leur différence d'ascension droite en secondes de degré.

2137. La différence de déclinaison se mesure ou par le moyen d'un micrometre, dont le curseur VR soit placé sur Vénus : on peut la trouver aussi par le temps que la planete emploie à aller de F en G, c'est-à-dire, d'un des fils obliques à l'autre (2351); on conclura aisément de ces deux observations la différence d'ascension droite et de déclinaison entre les centres de Vénus et du Soleil (2505); on la corrigera par la parallaxe (2084), et par la réfraction, si le Soleil a été assez bas, et la différence des hauteurs assez sensible pour qu'on en ait besoin; l'on aura la vraie différence d'ascension droite et de déclinaison entre le centre de Vénus et celui du Soleil.

2138. Je suppose que CE et DE (FIG. 136) soient les différences de déclinaison et d'ascension droite, la ligne CE étant le cercle de déclinaison, et DE un arc de grand cercle parallele à l'équateur. Dans le triangle CED, où l'on connoît les deux côtés, on cherchera l'angle ECD et l'hypoténuse CD; on tirera ensuite le cercle de latitude CKI, faisant, avec le cercle de déclinaison CE, un angle ECI, qui est l'angle de position; il étoit de 6° 7′ lors du passage de Vénus en 1761; on prendra la somme ou la différence de ces angles ECD et ECK, suivant la situation du cercle de latitude (1878), et l'on aura l'angle KCD. Dans le triangle KCD l'on connoît l'hypoténuse CD et l'angle KCD; l'on trouvera la latitude CK et la différence de longitude DK. Le 6 juin 1761, à 8h 13′ 3″, le bord précédent de Vénus suivoit de 32″ de temps au fil horaire le bord du Soleil, et il y avoit 3′ 43″4 de différence de déclinaison entre le centre de Vénus et le bord boréal du Soleil. En suivant les regles précédentes, on trouvera la latitude de Vénus 11′ 0″, et la différence de longitude 9′ 20″. On verra ci-après (2152) la maniere dont on en déduit le temps de la conjonction, et la latitude pour ce même instant.

2139. Cette maniere de calculer les observations faites avec le micrometre, est celle que je donnai dans les *Mém. de l'acad.* pour 1754; les astronomes calculoient l'ascension droite du Soleil et sa déclinaison, ensuite celle de Vénus, et enfin sa longitude et sa latitude (*Mém. de l'acad.* 1723), ce circuit rendoit le calcul d'une longueur inutile.

Observations de l'entrée et de la sortie de Vénus, en 1761 *et* 1769, *avec les résultats qu'on en déduit.*

2140. La plus importante de toutes les observations que l'on fait dans un passage de Vénus ou de Mercure sur le Soleil, est celle de l'entrée ou de la sortie, principalement du contact intérieur des deux bords de Vénus et du Soleil; ce n'est qu'une distance de Vénus au bord du Soleil que l'on observe; mais elle se mesure avec plus de précision qu'aucune des distances que pourroient donner les instrumens d'astronomie : car l'on peut se tromper d'une ou deux secondes de degré avec les meilleurs instrumens, et l'on ne doit pas craindre ici une erreur de plus d'un cinquieme de seconde, ou moins encore, si l'on opere avec les précautions convenables.

D'ailleurs c'est une distance qui est exactement et rigoureusement la même pour tous ceux qui l'observent, et pour tous les pays de la Terre; car elle est réellement égale au diametre apparent du Soleil, qui est égal pour tous les observateurs du monde, en sorte que la comparaison de toutes ces observations devient très facile, et en même temps très exacte.

2141. Au moment où le bord de Vénus touche celui du Soleil pour sortir, le filet de lumiere qui restoit au bord du Soleil se trouve tranché subitement; on distingue ce filet de lumiere lors même qu'il n'a qu'un dixieme de seconde, et l'on voit un point noir se détacher de Vénus et s'élancer vers le Soleil (2159); voilà pourquoi l'on ne peut se tromper, selon moi, que d'une seconde de temps ou de 2″ tout au plus sur cette observation. C'étoit l'avis de Halley; c'est celui de M. Pingré (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 480); et Short m'assura, en 1763 à Londres, qu'il avoit vu le contact de Vénus de la même maniere que moi, et qu'il étoit sûr de son observation.

2142. J'ai raconté dans l'histoire de l'académie pour 1757, quels étoient les préparatifs des savans, pour observer avec fruit le passage de Vénus en 1761. Il fut observé dans une multitude de lieux; les observations sont dans le mémoire que j'ai donné avec la figure du passage de 1769 (chez Lattré), et dans celui de M. du Séjour,

mém. de l'acad. 1781. Je parlerai ci après des élémens que j'en ai déduits; mais les observations les plus remarquables sont celles qui furent faites au Cap de Bonne-Espérance, à Tobolsk, et en Suede, et dont il est nécessaire de parler, afin d'expliquer les conséquences importantes qu'on en a déduites.

2143. Les déterminations de la parallaxe les plus sûres sont celles qui sont indépendantes de la différence des méridiens ou de la longitude des lieux, élément toujours difficile à bien constater; telles sont celles qui se tirent de la durée totale du passage, observé tout à la fois à Stokolm et à Tobolsk en 1761.

Ces deux observations seroient décisives si la distance des lieux eût été plus grande; mais l'effet de la parallaxe ayant été presque le même sur l'entrée, et seulement de 1′ 43″ plus grand à Tobolsk pour la sortie, 5″ d'erreur sur l'instant de chacune des observations de la sortie, c'est-à-dire, 10″ sur leur différence, changeroient la parallaxe d'une seconde : en effet ces observations donnoient 10″4 pour la parallaxe du Soleil.

Les durées observées à Upsal, par M. Bergman, à Cajanebourg, par M. Planman, ne donnent que 9″ pour la parallaxe, quand on les compare avec la durée observée à Tobolsk (*Mém. acad.* 1761); mais comme les différences entre les durées observées n'alloient pas à 2′ de temps, il restoit à cet égard le même degré d'incertitude.

2144. M. Mason au Cap de Bonne-Espérance vit le contact intérieur à 9h 39′ 52″; la différence des méridiens entre Paris et le Cap est de 1h 4′ 17″; on trouve 8″6 pour la parallaxe (Philos. Trans. 1762), l'observation de 1769 a donné le même résultat.

2145. Au milieu de ces incertitudes, nous attendîmes le passage du 3 juin 1769; il étoit encore plus important que celui de 1761, parceque l'effet de la parallaxe y devoit être plus sensible, en supposant que l'observation fût faite dans les points les plus favorables, tels que la mer du Sud, la Californie, et les parties les plus septentrionales de l'Europe. Aussi tous les princes qui aiment et qui favorisent les sciences, firent pour cette observation des dépenses et des préparatifs considérables.

L'académie et le duc de Choiseul, alors ministre, demanderent à la Cour d'Espagne des facilités pour un voyage dans le milieu de la mer du Sud; mais on ne put l'obtenir : l'abbé Chappe fut obligé de se contenter d'aller en Californie; il partit avec deux officiers espagnols, le 29 décembre 1768 (a); j'étois destiné pour l'isle de

(a) Il mourut à S.-Joseph, près le Cap S.-Lucas, le 1 août 1769; M. Cassini a publié ses observations.

Saint-Domingue, où il s'agissoit aussi d'aller vérifier les horloges marines de M. Berthoud, commission dans laquelle M. Pingré voulut bien me remplacer, mes occupations ne m'ayant pas permis de la remplir. Véron fut chargé d'aller faire le tour du monde sur le vaisseau commandé par M. de Bougainville, pour revenir aux Indes, où Véron espéroit aussi faire l'observation du passage de Vénus; il ne put y parvenir, et il mourut au mois de mai 1770.

2146. La société royale de Londres, sous la protection du roi d'Angleterre, envoya M. Dymond et M. Wales dans l'Amérique septentrionale, M. Green dans la mer du Sud, sur un vaisseau commandé par le fameux capitaine Cook, et M. Call à Madras, aux Indes.

L'académie de Pétersbourg demanda des astronomes de Geneve et d'Allemagne, et fit faire à Londres et à Paris un grand nombre d'instrumens; elle envoya des observateurs dans trois endroits de la Lapponie Russienne; savoir, M. Rumowski, à Kola, lat. 69°, long. 50° $\frac{1}{2}$; M. Pictet, de Geneve, à Oumba, lat. 67°, long. 52°; M. Mallet, de Geneve, à Ponoi, lat. 67°, long. 59°: on envoya le capitaine Islenief dans la Russie asiatique, à Yakoutsk, sur la Lena, lat. 62°, long. 147° $\frac{1}{2}$ environ; d'autres astronomes allerent du côté de la mer caspienne, dans le gouvernement d'Astracan; M. Lowitz, à Guriéf, lat. 47°, long. 70°; M. Kraft, à Orenbourg, lat. 52°, long. 73°, et M. Christ. Euler, à Orsk, lat. 51°, long. 76°. Chacun de ces observateurs étoit bien accompagné, et muni de toutes les choses nécessaires pour le succès de sa mission. J'étois sur le point d'aller à Pétersbourg, lorsqu'ayant appris que l'électeur Palatin vouloit bien contribuer à ces observations, en laissant voyager le P. Mayer, son astronome; je me reposai sur lui de cette commission. Il alla à Pétersbourg, où il fit l'observation, avec M. Albert Euler, M. Lexell, M. Stahl et M. Kotelnikow, qui y étoient déja : toutes ces observations ont été imprimées successivement en Russie, et elles ont été encore insérées dans le XIVe volume des mémoires de l'académie de Pétersbourg.

Le roi de Danemarck demanda le P. Hell, astronome de Vienne, pour faire l'observation à l'isle *Wardhus*, ou Wardoë, extrémité septentrionale de notre continent. Ces observations furent imprimées à Copenhague; mais nous ne les reçûmes qu'au commencement de mars 1770.

M. Planman observa à Cajanebourg, dans la Finlande, province de Suede, et son observation nous fut envoyée sans délai, en sorte qu'elle a toute l'authenticité possible, et j'en ferai usage ci-après.

J'ai rassemblé toutes ces observations dans un mémoire particulier, imprimé en 1772, à Paris, chez Lattré.

Le mauvais temps nous a privés des observations que devoient faire M. le Gentil à Pondichery, M. Call à Madras, M. Pictet à Oumba, en Lapponie, M. Helland à Torneo, et M. Mallet, Suédois, à Pello.

2147. L'empressement que j'avois de savoir le résultat de tant de préparatifs, fut secondé par M. Maskelyne, astronome royal d'Angleterre, et par tous les autres astronomes, de maniere que, dès la fin de l'année 1769, je fus en état de comparer des observations assez éloignées, pour pouvoir en conclure, avec une précision suffisante, la parallaxe du Soleil; ce résultat fut publié dans la gazette de France du 10 janvier 1770. Les observations de Californie ne nous parvinrent que le 7 décembre, et celles de la mer du Sud au mois de septembre 1771.

MM. Dymond et Wales ayant été envoyés dans le nord de l'Amérique septentrionale, avoient choisi leur station au fort du prince de Galles, sur la côte occidentale de la baie d'Hudson, près de la riviere Churchil, à 58° 47′ 30″ de latitude septentrionale, 6ʰ 26′ 23″ à l'occident de Paris; ils observerent le contact intérieur de l'entrée à 1ʰ 15′ 23″; et le contact intérieur de la sortie à 7ʰ 0′ 47″ ½; j'ai pris un milieu entre deux résultats qui ne différoient que de 3″.

Le calcul de cette observation est donc indépendant de la longitude du lieu, avantage considérable, à cause de l'incertitude qu'il est si difficile de lever dans les observations de longitude : il en est de même de celles de Californie, de la mer du Sud et de *Wardhus*; celle de Californie fut faite à Saint-Joseph, sous une latitude de 23° 3′ 36″, le contact intérieur de l'entrée fut à 0ʰ 17′ 27″, et celui de la sortie à 5ʰ 54′ 50″. L'observation de la mer du Sud a été rapportée ci-devant (2115).

2148. Pour profiter de tout l'avantage de ces observations éloignées, il faut les comparer à une autre qui soit également complete dans notre continent; je choisis celle de M. Planman, faite à Cajanebourg (2072). Si la parallaxe du Soleil est bien connue, et si elle est de 8″ ½, comme je le supposois alors, il faut qu'en employant cette parallaxe pour réduire les quatre observations au centre de la Terre, la durée du passage soit parfaitement la même en Californie et à Cajanebourg; si cette durée est plus grande par le calcul de l'observation faite à Cajanebourg (où l'effet de la parallaxe augmentoit la durée), et qu'elle surpasse la durée déduite de l'observation de Californie, c'est une preuve que la parallaxe de 8″ ½ em-

ployée dans le calcul est trop forte ; mais en faisant diverses suppositions, on parvient aisément à trouver la parallaxe qui satisfait aux quatre instans d'observations, en donnant deux durées parfaitement égales.

J'ai rapporté ci-devant un exemple détaillé de ces calculs (2072); on y voit les deux observations de Saint-Joseph réduites au centre de la Terre, dont la différence est 5h 41′ 48″4 : c'est la durée du passage entre deux contacts intérieurs. Pour avoir cette durée par les deux observations de Cajanebourg, dont une est le contact extérieur, je prends leur différence 6h 0′ 32″7, que je réduits en temps de l'orbite, et j'ai 1442″ 871 ; c'est le grand côté AF (FIG. 137) d'un triangle, dont les deux autres côtés AC, CF, sont la différence et la somme des demi-diametres du Soleil et de Vénus ; les deux segmens se trouvent de 684″ 024, et 758″ 846; le plus petit segment, converti en temps, donne 2h 50′ 55″44, et par conséquent la durée entiere 5h 41′ 50″9, plus grande de 2″4 que celle de Saint-Joseph. Pour les trouver égales ainsi qu'elles le sont essentiellement, je considere que la durée augmentée à Cajanebourg de 11′ 8″8, est diminuée à Saint-Joseph de 4′ 25″0 par l'effet de la parallaxe, et qu'il faut rendre les corrections plus petites pour trouver une durée égale dans les deux stations : or, 15′ 34″ : 8″5 : : 2″4 : 0″02, qu'il faut ôter de 8″5 ; ainsi la parallaxe moyenne qui résulte de ces deux observations, est de 8″48 seulement.

2149. C'est ainsi que j'ai comparé deux à deux les cinq durées qui ont été observées en 1769, deux en Europe, et trois dans l'hémisphere occidental de la Terre.

L'observation de Californie, comparée avec celle de la baie d'Hudson, donne la parallaxe moyenne 8″56. Celle de la baie d'Hudson, comparée avec celle de Taïti, donne 8″55. Celle de Californie avec celle de Taïti 8″53; le milieu est 8″ 55.

En prenant le milieu entre les observations de Cajanebourg et de Wardhus, comparées avec celles de Taïti, je trouve 8″62, à-peu-près comme par l'observation qui fut faite au cap de Bonne-Espérance en 1761 (2144).

L'observation de Cajanebourg et celle de Wardhus étant les seules qu'on ait de la durée entiere dans le nord, et n'étant pas d'accord, la difficulté consiste en deux ou trois dixiemes de seconde, dont l'observation de Cajanebourg donne moins que celle de Wardhus, quand on les compare avec l'observation de Taïti, ou avec celle de Californie. L'observation de Wardhus paroît être plus complete; elle est annoncée avec plus d'assurance ; mais elle n'a été publiée qu'au

qu'au mois de mars 1770, et l'on croyoit alors que la parallaxe devoit être de 9″ (*Gazette de France du 12 janvier 1770*). L'observation de Cajanebourg est annoncée comme exacte, quoique moins complette, parcequ'elle ne renferme point le second contact intérieur : elle est très authentique, ayant été envoyée aux astronomes dès le mois de juillet 1769 ; elle est d'un observateur très exercé, et elle s'accorde avec le résultat qu'on tire des observations d'Amérique comparées entre elles, qui est de 8″55 : enfin elle donne presque la même chose, à quelle observation qu'on la compare.

2150. Pour juger du degré de confiance que méritent ces deux observations, j'ai comparé ensemble les trois résultats que chacune donne, quand elle est comparée avec les trois observations éloignées. En voici une table.

	Cajanebourg.	*Wardhus.*
Avec le Fort,	8″, 49	9″, 08
Avec Saint-Joseph,	8 , 48	8 , 81
Avec Taïti,	8 , 52	8 , 72

On voit que la plus grande différence des trois résultats avec Cajanebourg est de 0″, 04, et avec Wardhus 0″, 36; ensorte qu'il y a neuf fois plus de probabilité pour l'observation de Cajanebourg, que pour celle de Wardhus. Si donc on vouloit prendre le milieu entre les deux colonnes précédentes, en se tenant plus près de l'observation de Cajanebourg que de celle de Wardhus dans le rapport de 1 à 9, et qu'on prît ensuite le milieu entre les trois derniers résultats, on auroit 8″, 53, à-peu-près, comme par les observations d'Amérique comparées entre elles. Mais comme la différence totale n'étoit pas d'un dixieme de seconde, j'avois pris comme un nombre rond 8 secondes et demie, pour la parallaxe moyenne du Soleil.

Euler, dans les mémoires de Pétersbourg (*Tom. XIV pour* 1769, *Part. II*, *pag.* 518), s'arrêtoit à 8″, 8, après une multitude de calculs faits sur un nombre considérable d'observations ; mais lorsqu'il se fixoit à ce résultat, il n'avoit pas reçu les observations de Taïti, qui donnent moins que les deux observations d'Amérique dont Euler s'est servi ; il n'avoit pas même celles de la Californie, qui lui ont donné 8″, 57 (*Ibid. pag.* 536). Euler ayant reçu ensuite l'observation de l'isle de Taïti, a de nouveau calculé, ou fait calculer sous ses yeux par Lexell, les principales observations, et s'est déterminé à faire la parallaxe de 8″ $\frac{2}{3}$, ou 8″, 68 (*Gazette de Deux-*

Ponts, 1771, n° 101). Mais il me paroît que l'opération de Cajanebourg n'entre pas dans son résultat, puisque c'est à-peu-près celui que l'observation de Wardhus me donne, n'ayant point égard à celle de Cajanebourg, et que les trois observations éloignées donnent la même chose que celle de Cajanebourg, comparée avec toutes les trois.

2151. M. Pingré ayant calculé les observations de Californie et de la mer du Sud, en a conclu la parallaxe du Soleil dans les moyennes distances, 8″, 88 : il trouve que l'observation de Wardhus est assez bien confirmée par les autres observations du Nord, pour qu'on ne doive pas la rejeter. Enfin il s'en tient à 8″8 (*Mém.* 1772, *p.* 419).

Lexell ayant fait et refait un nombre immense de calculs sur toutes les observations dont je viens de parler, a trouvé 8″63 (*Mém. de Pétersb.* 1772); M. du Séjour 8″84 (*Mém.* 1781, *pag.* 330, *Traité analytique*, *pag.* 486); mais il y a fait entrer beaucoup d'observations qui ne me paroissent pas aussi concluantes que celles dont je viens de faire usage, et qui m'ont déterminé à supposer cette parallaxe moyenne de 8″6 (*Mém.* 1771, *pag.* 789—798).

2152. Après cette observation des contacts intérieurs, les résultats les plus importans des passages de Vénus sont la conjonction et la latitude : on a vu ci-dessus la maniere de trouver par chaque observation faite au quart-de-cercle ou au micrometre, la différence de longitude et de latitude entre Vénus et le Soleil (2130, 2138). La différence de longitude au moment de l'observation (2131) étoit 2′ 34″4 ; elle nous fera trouver le moment de la conjonction, en nous servant du mouvement horaire relatif sur l'écliptique vu de la Terre 3′ 57″4 (2061) ; il ne s'agit que de dire 3′ 57″4 : 60′ 0″ : : 2′ 34″4 : 39′ 1″ de temps, qu'il faut ôter de l'heure de l'observation. 18h 31′ 46″ parceque la conjonction étoit passée, et l'on aura 17h 52′ 45″ pour le temps vrai de la conjonction vraie qui résulte de cette observation ; il suffit d'ajouter le logarithme constant 1,180822 au logarithme de la différence de longitude sur l'écliptique, pour avoir celui du temps en secondes. J'ai trouvé ci-dessus 17h 51′ (2135) ; M. du Séjour trouve 17h 51′ 45″ temps vrai, ou 49′ 53″ temps moyen, et 8s 15° 36′ 14″ pour la longitude héliocentrique de Vénus en conjonction (*Mém.* 1781, *pag.* 33).

On cherchera aussi la latitude de Vénus pour ce moment, par le moyen du mouvement horaire en latitude 35″4, en disant : 60′ 0″ : 35″4 : : 39′ 1″ : 23″ ; on ôtera ces 23″ (qui sont le mouvement en latitude) de la différence trouvée pour le moment de l'obs. 10′ 1″ (2131), et l'on aura enfin 9′ 38″ pour la latitude de Vénus au moment de la conjonction, élément que nous avions à chercher ; j'ai

trouvé 9′ 36″3 par beaucoup d'observations (2135, 2155) : si on multiplie cette latitude par le cosinus de l'inclinaison relative, on a la plus courte distance des centres (2053, 2135).

2153. On a ainsi l'avantage de déduire de chaque observation, soit le temps de la conjonction, soit la latitude pour ce temps-là. Les astronomes qui comparoient deux observations entre elles, pour déterminer le temps de la conjonction, le mouvement en longitude et en latitude, et l'inclinaison de l'orbite, ne faisoient pas attention que le mouvement horaire et l'inclinaison sont donnés par les tables, dix fois plus exactement qu'on ne peut les déduire de deux observations de cette espece, et qu'ils perdoient ainsi l'avantage que le grand nombre d'observations doit procurer, celui d'avoir un grand nombre de fois le résultat essentiel pour la théorie de Vénus. En suivant la méthode que je viens d'expliquer, on trouve le temps de la conjonction autant de fois que l'on a d'observations; on est en état de prendre un milieu entre beaucoup de résultats, de distinguer les observations défectueuses, et de les discuter toutes séparément avec très peu de calcul.

2154. L'aberration (2886) influe sensiblement sur la conjonction déterminée par observation ; j'en ai donné les résultats pages 132 et 134, en rapportant les observations : j'ajouterai ici que, pour Vénus, la correction de la latitude géocentrique n'est que de 1″4 dans les conjonctions inférieures près du nœud; elle est insensible dans les autres. Dans les passages sur le Soleil, elle donne 9″ de plus pour le lieu du nœud; je n'en ai pas tenu compte dans les calculs précédens.

2155. Pour trouver le lieu du nœud, il faut réduire la latitude vraie au Soleil, en disant : la distance de la planete au Soleil est à sa distance à la Terre, comme la latitude géocentrique est à la latitude héliocentrique. Ainsi la latitude de Vénus en 1761 ayant été trouvée de 9′ 36″3 au moment de la conjonction (2135), et le rapport des distances étant celui de 28903 à 72643 (2048), on trouve 3′ 49″3 pour la latitude héliocentrique CV (FIG. 125).

Pour en conclure la distance de Vénus à son nœud, il suffit de résoudre le triangle CVN rectangle en C, et qui est sensiblement rectiligne, en disant : la tangente de l'inclinaison vraie, 3° 23′ 35″, est au rayon, comme le côté CV de 3′ 49″3 est au côté CN, qui se trouvera de 1° 4′ 27″; c'est l'arc de l'écliptique vu du Soleil, et compris entre le nœud N de Vénus et le point C de la conjonction. Cet arc retranché du lieu du Soleil au moment de la conjonction 2ˢ 15° 36′ 10″, donnera le lieu du nœud de Vénus 2ˢ 14° 31′ 43″; on

trouve 2^s 14° 32′ 6″ en diminuant de 6″ le diametre du Soleil (2158), et 9″ de plus en employant l'aberration (2154) : par mes tables c'est 2^s 14° 32′ 12″.

On trouveroit le même résultat avec la latitude géocentrique observée 9′ 36″3, et l'inclinaison relative vue de la Terre 8° 28′ 47″; mais de l'une ou de l'autre maniere, l'opération précédente se réduit sommairement à ajouter le logarithme constant 0,82731 avec celui de la latitude géocentrique, et l'on a le logarithme de la distance au nœud, qu'on ajoute avec la longitude de Vénus au temps de la conjonction, qui est l'opposite de celle du Soleil, ou qu'on en retranche, suivant que la conjonction est arrivée avant ou après le passage au nœud; en 1761 elle étoit soustractive; en 1769 additive.

2156. En 1769 le contact intérieur fut observé à Paris à 7^h 38′ 45″; l'effet de la parallaxe étoit de 7′ 30″; ainsi le contact intérieur vu du centre de la Terre, arriva à 7^h 46′ 15″; la demi-durée du passage intérieur étoit de 2^h 50′ 8″; ainsi le milieu du passage est 10^h 36′ 23″, et ôtant 22′ 43″, on a la conjonction 10^h 13′ 40″ temps vrai, ou 10^h 11′ 26″½ temps moyen. M. du Séjour trouve 10^h 14′ 10″ temps vrai, et la longitude héliocentrique vraie 8^s 13° 27′ 28″ (*Mém.* 1781, *pag.* 332). La durée vue du centre de la Terre nous donne l'arc parcouru sur le Soleil, d'où l'on tire la plus courte distance 10′ 9″7, la latitude 10′ 16″, et la distance de Vénus au nœud 1° 9′ 0″, qui, ajoutée au lieu du Soleil 2^s 13° 27′ 19″ au moment de la conjonction, donne le lieu du nœud ascendant de Vénus 2^s 14° 36′ 20″ pour le 3 juin 1769, en négligeant l'aberration (2154). Cette méthode si naturelle et si simple, de trouver le nœud de Vénus ou de Mercure par observation, n'avoit point été employée par les astronomes qui ont calculé ces passages; la plupart se sont servis d'opérations compliquées, qui quelquefois les ont jetés dans l'erreur.

2157. LE DIAMETRE de Vénus sur le Soleil ne peut être déterminé plus exactement que par le temps qu'il a mis à quitter le Soleil; car chaque seconde du diametre de Vénus employoit 19″ de temps à sortir du Soleil; et comme on ne se trompe pas de 5″ sur la durée de la sortie, cette durée doit faire trouver, à un quart de seconde près, le vrai diametre de cette planete.

Lorsque le dernier bord de Vénus touche le bord extérieur du Soleil en E (FIG. 137), Vénus est au point F de son orbite, et la distance CF des centres de Vénus et du Soleil est égale à la somme des demi-diametres de Vénus et du Soleil; au contraire, dans le contact intérieur, Vénus est en D, et la distance des centres est égale à la différence des demi-diametres; on connoît la plus courte distance

CB (2152); ainsi en résolvant séparément les deux triangles CBD, CBF, on trouve les portions BD et BF de l'orbite de Vénus, dont la différence DF donne le temps que le diametre de Vénus devoit employer à sortir, vu du centre de la Terre; mais la durée de la sortie n'est point la même vue de la surface de la Terre.

Il faut donc connoître aussi la quantité dont la parallaxe fait varier cette durée de la sortie pour le lieu de l'observation; quand on se tromperoit de quelque chose sur la parallaxe, l'erreur seroit insensible dans l'espace de 18' de temps; ainsi l'on peut calculer l'effet de la parallaxe (2062) sur le temps de chacun des deux contacts: je trouve, en supposant les deux diametres, 31' 26", et 58" que l'intervalle MV (FIG. 134) étoit en 1761 à Paris de 3h 16' 5"5; celui qui répond à MX pour le centre de la Terre, de 3h 16' 48"5. Pour les contacts intérieurs de Paris et du centre de la Terre, on a 2h 57' 39"0, et 2h 58' 36"0; ainsi la durée de la sortie du diametre de Vénus auroit été de 18' 26"5 pour Paris, et 18' 12"5 pour le centre. Par mon observation cette durée s'est trouvée de 18' 25"; on fera donc cette proportion: 18' 26"5 : 58" :: 18' 25" : 57"9; c'est le diametre de Vénus conclu de la durée de sa sortie, en 1761. En faisant un semblable calcul par les observations de 1769, j'ai trouvé 57"2.

Au moyen des distances données ci-dessus entre Vénus, la Terre et le Soleil (2048), on trouve que si Vénus eût été à la même distance que le Soleil, son diametre eût paru de 16"½, le jour du passage de 1761; or, si la parallaxe du Soleil est de 8"6, le diametre de la Terre, vu à la même distance, est de 17"2; donc le diametre de Vénus est à celui de la Terre comme 16½ est à 17"2; d'où il suit que le volume de Vénus est à celui de la Terre comme 89 est à 100: ce seroit aussi le rapport de leurs masses, de leurs poids ou de leurs quantités de matiere, si la densité de Vénus étoit égale à celle de la Terre; mais on verra qu'elle est probablement un peu plus petite (3565), ce qui me fait regarder la masse de Vénus comme étant moindre d'un vingtieme que celle de la Terre.

C'est par la même méthode que je déterminai en 1753 le diametre de Mercure, tel que je l'ai inséré dans la table des diametres (1398). *Mémoires de 1756.*

2158. On a vu que le diametre du Soleil doit paroître amplifié par le débordement de la lumiere qui l'environne (1388, 1395), et que les meilleures lunettes ne dégagent pas tout-à-fait les bords du Soleil de cette aberration: les passages de Mercure et de Vénus en donnent un indice très fort. De l'Isle ayant examiné le passage de

Mercure, arrivé en 1756, dans lequel l'orbite de Mercure passoit presque au centre du Soleil, trouva que la durée du passage supposoit le diametre du Soleil d'environ 32′ 4″, tandis que, suivant moi, il auroit été de 32′ 21″ (*Mém. acad.* 1758). M. du Séjour a trouvé que pour concilier les observations de l'éclipse annulaire de 1764, il falloit diminuer de six secondes le diametre du Soleil (1395). Nous n'avons pas de passage de Vénus par le centre du Soleil; mais puisque en 1761 Vénus a passé au midi du centre, et en 1769 au nord, nous pouvons, en comparant ces deux passages, en tirer une induction sur le diametre du Soleil. J'ai trouvé que le lieu du nœud conclu de ces deux passages, par le moyen du diametre du Soleil que j'avois observé (1388), étoit différent de 1′ 18″, en tenant compte du mouvement de ce nœud en huit ans : pour avoir le même lieu du nœud par les deux observations, il falloit que les distances au nœud fussent de 1° 4′ 20″ et 1° 8′ 43″, et que les plus courtes distances (2135, 2156) fussent 9′ 28″3 et 10′ 7″. Pour trouver cette distance de 10′ 7″, par le moyen de la durée du passage, il faut supposer que le diametre du Soleil soit plus petit d'environ 6″, ou de 15′ 43″7 dans le passage de 1769. *Mém. de l'acad.*, 1770, *p.* 403.

2159. Le contact de Vénus avec le bord du Soleil est accompagné d'un phénomene qui paroît confirmer cette diminution; on voit un point noir ou une espece de ligament noir allongé, qui unit les deux bords de Vénus et du Soleil, lors même que leurs circonférences paroissent séparées (2141); il me semble que cela vient de l'irradiation qui environne le bord du Soleil, et qui disparoît nécessairement dans un point, aussitôt que les bords réels se touchent; en effet, l'expansion de lumiere ne sauroit avoir lieu quand la cause primitive de cette lumiere, c'est-à-dire, le bord effectif du Soleil, ne nous envoie plus de rayons; il doit donc y avoir dans cette partie du bord apparent du Soleil une cessation et une interruption subite de la lumiere exorbitante; et comme cette interruption n'a pas lieu dans les parties voisines du point de contact, il paroît dans ce point-là une gibbosité ou un ligament noir, que grand nombre d'observateurs ont remarqué (*Mémoires de* 1769). En conséquence de cette explication, j'ai diminué le diametre du Soleil dans les calculs les plus importans de ce XIe livre, et dans la table des dimensions des planetes, pag. 120.

Il paroît que le diametre de Vénus, déduit de la durée de la sortie, n'est pas affecté par l'irradiation du Soleil, puisqu'on apperçoit le trait noir aussitôt que le véritable bord de Vénus touche le véritable bord du Soleil.

LIVRE DOUZIEME.

DES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.

2160. L'ATMOSPHERE (a), c'est-à-dire la masse d'air qui environne la Terre, affoiblit la lumiere, la disperse, la décompose et change sa direction. Il est prouvé par des expériences, qu'on trouve dans tous les livres d'optique que les rayons de lumiere qui entrent obliquement d'un milieu moins dense dans un milieu plus compact, changent de direction, et se rapprochent de la direction perpendiculaire, comme s'ils étoient plus fortement attirés par la matiere la plus dense; c'est ce qui se passe dans l'air: ce changement d'un rayon de lumiere est différent suivant l'obliquité du rayon; les tables qui contiennent ce changement, s'appellent *Tables de réfractions* (b).

2161. Soit ABD la surface de la Terre (FIG. 139), EKG la surface extérieure de l'atmosphere qui environne la Terre, et dont la densité est sensible jusqu'à quelques lieues de hauteur, A le lieu de l'observateur, et MK un rayon de lumiere qui entre obliquement dans l'atmosphere en K; ce rayon attiré, plié et courbé par l'atmosphere, parvient au point A, comme s'il étoit venu par la ligne droite NKA; l'œil reçoit l'impression de la lumiere suivant la direction NKA du rayon qui arrive à l'œil en A; l'observateur rapporte sur le rayon AKN l'astre qui est véritablement en M, en sorte que la réfraction fait paroître l'astre plus élevé de la quantité de l'angle NKM, qui est la réfraction astronomique.

La ligne CKR, qui part du centre de la Terre, étant perpendiculaire à la surface réfringente en K, on appelle angle d'incidence l'angle MKR, que forme le rayon incident avec cette perpendiculaire, avant la réfraction, et l'on appelle angle de réfraction, ou angle rompu, l'angle NKR, ou son égal AKC, que forme ce rayon avec la même perpendiculaire après la réfraction; les sinus de ces deux angles ont entre eux un rapport constant, qu'on appelle le rapport de réfraction, et qui, pour notre atmosphere, est celui de

(a) Ἀτμὸς, souffle, vapeur, σφαῖρα, globe, c'est la sphere des vents.

(b) Quelquefois tables anaclastiques. Ce mot vient de κλάω, *frango*, et de ἀνὰ, qui répond à *re*.

3201 à 3200. Aussi n'y a-t-il point de réfraction quand le rayon est perpendiculaire à la surface réfringente, car un des angles étant nul, l'autre s'évanouit nécessairement ; d'ailleurs le rayon perpendiculaire a une surface plus dense, peut changer de vitesse ; mais il ne change pas de direction, quoiqu'il soit plus attiré. De là il suit que la réfraction se fait toujours dans un plan vertical; car le rayon rompu n'ayant de tendance que pour se rapprocher de nous et du centre de la Terre, c'est-à-dire d'une ligne qui est toujours verticale, ne se détournera ni à droite ni à gauche, le rayon rompu sera dans le même plan que le rayon direct et la ligne du zénith, c'est-à-dire dans le vertical qui passe par la ligne ZC, et par le point K de l'atmosphere ; ainsi le lieu vrai et le lieu apparent seront dans le même vertical.

2162. On trouvera les loix, les propriétés et les effets de la réfraction, et ceux de la lumiere, dans plusieurs livres d'optique, sur-tout dans celui qui a pour titre : *A compleat System of Optiks by* Robert Smith [a], Cambridge, 1738, 2 vol. *in*-4° ; il y en a deux éditions françoises, d'Avignon et de Brest, données par le P. Pézenas et par M. Duval le Roy. On peut consulter aussi l'Optique de Harris en anglois, 1775, *in*-4° ; l'optique de Newton, Paris, 1787 ; celle de Bouguer, Paris, 1760 ; la Dioptrique oculaire du P. d'Orléans, *in-fol.* 16[illegible], Kirker, *Ars magna lucis et umbrae;* la Dioptrique d'Huygens, les Leçons d'optique de la Caille, etc.

2163. Les anciens connurent très bien le phénomene des réfractions en général. Aristote, dans un de ses problêmes, parle de la courbure apparente d'une rame dans l'eau, et Archimede passe pour avoir écrit un traité sur la figure d'un cercle vu sous l'eau. On croyoit alors que les angles de réfraction étoient proportionels aux angles d'incidence ; Snellius, vers 1620, fit voir que la proportion avoit lieu entre les sinus de ces angles; et Clairaut a prouvé que c'étoit une suite de l'attraction (*Mém. acad.* 1739).

La réfraction astronomique n'étoit pas inconnue à Ptolemée, quoiqu'il n'en fît pas usage dans ses calculs (*Riccioli II*, 642) ; Ptolemée dit, sur la fin du VIII[e] livre de l'Almageste, qu'il y a des différences dans le lever et le coucher des astres qui dépendent des changemens de l'atmosphere : il en faisoit mention d'une maniere plus détaillée dans son Optique, ouvrage qui ne nous est pas parvenu (Montucla, *Histoire des mathématiques*, *I*. 308. Roger Bacon, *Specula math.*, *pag.* 37).

(a) Il étoit professeur à Cambridge; il est mort, vers 1770, à 79 ans ; il avoit été éditeur des ouvrages de Cotes, et nous a donné le plus grand ouvrage d'optique que nous ayons.

2164.

2164. Alhazen, opticien arabe du dixieme siecle (363), qu'on soupçonne généralement d'avoir pris dans Ptolemée presque toute son optique, parle assez au long de cette réfraction, (*lib. VII, cap.* 4, *n°.* 15, *pag.* 251*, *édit.* 1574) : il donne la maniere de s'en assurer.

Prenez, dit-il, un instrument composé avec des armilles qui tournent autour des poles (2277), mesurez la distance d'une étoile au pole du monde, lorsqu'elle passe près du zénit dans le méridien, et lorsqu'elle se leve près de l'horizon, vous trouverez la distance au pole plus petite dans ce dernier cas; Alhazen démontre ensuite que cela doit arriver par l'effet de la réfraction; il ne dit point, à la vérité, quelle est la quantité qui en résulte sur les observations; mais ce passage fait voir de quelle maniere on reconnut l'effet de la réfraction. De même quand les anciens observoient l'équinoxe avec ces armilles, ils pouvoient l'appercevoir deux fois en un même jour, par l'effet des réfractions. (Flamsteed, *Prolegom.*, *pag.* 21). Cet effet pouvoit aussi se reconnoître facilement par les étoiles circompolaires; car si l'on observe deux étoiles, comme γ d'Andromede et l'étoile polaire, éloignées l'une de l'autre de 47°, on trouvera leur distance plus grande d'un demi-degré, quand la premiere passera par le méridien, près du zénit, que quand elle passera sous le pole, près de l'horizon, et toutes les distances des étoiles entre elles changeront ainsi plus ou moins.

2165. Snellius, en publiant les observations de Waltherus, remarqua (*pag.* 51) que ces observations étoient si exactes, qu'elles avoient appris à Waltherus l'augmentation de hauteur que cause la réfraction; mais Tycho-Brahé fut le premier qui la détermina d'une maniere à en dresser des tables : voici comme il raconte lui-même ces recherches astronomiques (*Progymn.*, *pag.* 15).

2166. Tycho avoit déterminé avec deux instrumens assez bien faits la hauteur du pole par les hauteurs supérieures et inférieures de l'étoile polaire (33); il la détermina aussi par les hauteurs du Soleil dans les deux solstices (71), et il trouva la seconde hauteur du pole plus petite de 4 minutes; il eut d'abord quelque soupçon sur la bonté de ses instrumens; il continua d'en faire construire jusqu'à dix de différentes grandeurs et de différentes formes, travaillés avec le plus grand soin, et il trouva toujours le même résultat; il ne pouvoit plus alors attribuer cette différence entre les deux déterminations de la hauteur du pole au défaut des observations; il cherchoit une cause de ce phénomene; il imagina enfin qu'il provenoit d'une réfraction considérable que le Soleil devoit éprouver au sol-

stice d'hiver, n'étant élevé que de 10° 37′ à Uranibourg, dont la latitude est de 55° 54′, ce qui donne 4′ 56″ de réfraction. Cette explication étoit d'accord avec les démonstrations de l'optique; cependant Tycho avoit peine à se persuader que cette réfraction fût assez forte pour produire une si grande erreur; il concluoit de ses observations qu'il devoit y avoir au moins 9′ de réfraction [a] à la hauteur de 11°; c'est pourquoi Tycho fit faire encore des armilles de dix pieds de diametre, dont l'axe répondoit exactement au pole du monde, et avec lesquelles il mesuroit la déclinaison des astres hors du méridien; il reconnut alors que, même en été, la réfraction, quoique insensible à la hauteur méridienne du Soleil, devenoit sensible près de l'horizon, et que l'effet alloit à un demi-degré.

2167. Tycho crut que la réfraction du Soleil devenoit nulle à 45° de hauteur, et celle des étoiles à 20°, quoiqu'à cette hauteur elle soit de 2′½; cette erreur subsista long-temps; Riccioli, même en 1665, supposoit encore que les réfractions n'avoient plus lieu au-delà de 26° de hauteur, ou environ; qu'il n'y avoit que 29′ de réfraction horizontale pour la Lune en été, 30 pour le Soleil, et 30′ 27″ pour les étoiles. *Astr. ref. tabul. pag.* 47.

2168. Ce fut Cassini qui, vers l'an 1655, entreprit de former une nouvelle table de réfractions, en même temps que les nouvelles tables du Soleil, et qui parvint à représenter les observations avec une précision beaucoup plus grande qu'on ne l'avoit fait avant lui (509, 1716). Mais pour éprouver la justesse de sa nouvelle table de réfractions, Cassini souhaita d'avoir des observations du Soleil faites au zénit, où tout le monde convenoit qu'il n'y avoit point de réfraction; il pensa que si ces observations étoient beaucoup mieux représentées par ses nouvelles tables du Soleil que par celles de Tycho, il n'y auroit plus de doute que ses tables du Soleil et celles des réfractions ne fussent préférables, représentant mieux les observations faites, et dans les cas où il y a réfraction, et dans ceux où il n'y en a point.

Louis XIV et Colbert, dont le zele pour les sciences étoit déja connu, laissoient à l'académie le choix des entreprises: elle jugea qu'il n'y avoit point de lieu plus commode pour de pareilles observations que l'isle de Cayene, qui est à 5° de l'équateur, et où la France envoyoit des vaisseaux plusieurs fois l'année. Les hauteurs méridiennes du Soleil devoient être, en tout temps, exemptes de réfraction, si elle étoit nulle au-dessus de 45°; car la plus petite

(a) Il n'y a réellement que 4′ 56″; mais Tycho en augmentoit l'effet par la parallaxe du Soleil, qu'il supposoit de 2′ 50″ à cette hauteur (1712).

hauteur du Soleil y est de 61°. On y devoit donc trouver l'obliquité de l'écliptique, sans aucune diminution de réfraction ; mais au contraire, augmentée par l'effet de la parallaxe du Soleil dans les deux solstices ; ainsi dans les hypotheses tychoniciennes, la distance des deux tropiques devoit se trouver à Cayene de plus de 47° 3′, et selon Cassini, qui diminuoit la parallaxe et supposoit de la réfraction, même dans les grandes hauteurs, cette distance ne devoit paroître à Cayene que de 46° 58′ ; il y avoit donc entre ces hypotheses une différence de 5′ qui pouvoit s'observer exactement, et décider à la fois ces trois objets, la réfraction, la parallaxe et l'obliquité de l'écliptique. Ces seuls motifs étoient plus que suffisans pour faire entreprendre le voyage de Cayene ; et cependant il y avoit encore d'autres objets intéressans à constater, tels que la longueur du pendule, la parallaxe de la Lune et du Soleil, la théorie de Mercure, les longitudes géographiques, la position des étoiles australes, les marées, les variations du barometre ; tels furent les motifs importans du voyage qu'entreprit Richer (502, 2669). Il partit de Paris au mois d'octobre 1671, et il séjourna à Cayene depuis le 22 avril 1672 jusqu'à la fin de mai 1773, accompagné de Meurisse, qu'on lui avoit donné pour l'aider dans ses observations ; elles furent publiées en 1679, et sont aussi rapportées dans le recueil d'observations que l'académie donna en 1693.

2169. Les choses arriverent à Cayene à-peu-près comme Cassini l'avoit prévu ; l'obliquité apparente de l'écliptique y parut de 23° 28′ 32″, c'est-à-dire, beaucoup plus petite qu'elle ne dévoit être suivant Tycho ; elle ne différa que de 5″ de celle qu'il devoit y avoir, en adoptant pour les réfractions, et pour la parallaxe du Soleil, les tables de Cassini ; ainsi les élémens par lesquels il avoit représenté les observations faites en Europe, représentoient avec la même justesse les observations faites en Amérique, ce que ne faisoient point les élémens de Tycho à l'égard de l'obliquité de l'écliptique, de la parallaxe du Soleil et des réfractions.

Méthodes pour observer la quantité des réfractions astronomiques.

2170. Après avoir tracé l'histoire de la réfraction, je passe aux méthodes qui ont été employées successivement pour l'observer. On a déja vu celle des déclinaisons (2164) : voici celle des hauteurs. La réfraction étant la différence entre la hauteur apparente et la hauteur vraie d'un astre, il s'agit de pouvoir calculer celle-ci pour

le moment où l'on a observé la hauteur apparente ; la différence entre le calcul et l'observation donne la réfraction.

Lorsqu'on n'avoit pas l'usage des horloges, on employoit l'azimut ou l'angle Z (FIG. 35 ou 89), pour résoudre le triangle PZS, formé au pole au zénit et au Soleil, et trouver la véritable hauteur; l'angle Z ne dépend point de la réfraction et n'en est point affecté, puisque le lieu vrai et le lieu apparent sont dans un seul et même vertical ZS (2161), et par conséquent au même degré d'azimut ; ainsi dans le triangle PZS, on connoîtra pour l'instant donné le côté PZ, qui est la distance du pole au zénit, et PS qui est la distance du Soleil au pole, avec l'angle Z opposé à l'un d'eux ; l'on trouvera par la trigonométrie sphérique le troisieme côté ZS, dont le complément est la hauteur vraie, qui, comparée avec la hauteur apparente, observée en même temps que l'azimut, donne la quantité de la réfraction. (Tycho, *Progymn. pag.* 93). Cette méthode des azimuts n'est point usitée actuellement, parceque les azimuts ne sont pas faciles à observer exactement; mais avec les cercles azimutaux de M. Ramsden (2333), on pourra très bien y parvenir.

2171. Les hauteurs correspondantes du Soleil ou d'une étoile sont très propres à faire connoître la quantité de la réfraction, si elles sont prises exactement ; car elles font connoître l'angle horaire P, qui, avec les côtés PZ et PS, donne également ZS (1036). Je suppose, par exemple, que la hauteur du Soleil observée précisément à six heures de temps vrai ou de distance du méridien, le matin et le soir, l'angle horaire P étant de 90°, se soit trouvé de 8° précisément, et que, suivant le calcul de la hauteur vraie, elle ne doive être à ce moment que de 7° 53′ ½; on saura dès lors qu'à la hauteur apparente de 8°, il y a 6′ ½ de réfraction, et que le Soleil paroît trop élevé de 6′ ½.

2172. On suppose, il est vrai, la distance PZ du pole au zénit, et la distance PS du Soleil au pole, connues indépendamment des réfractions ; mais l'erreur qui peut en résulter sur les grandes réfractions est très-petite, et elle sera corrigée par d'autres considérations (2187, 2215). Cette méthode des hauteurs correspondantes fut employée autrefois par Picard, et l'a été récemment par la Caille; c'est par son moyen qu'on a reconnu que la réfraction horizontale, la plus grande de toutes les réfractions, est d'environ 33 minutes dans l'état moyen de l'atmosphere.

2173. La Caille, avant son voyage en Afrique, avoit fait beaucoup d'observations pour déterminer ainsi les réfractions par le moyen des angles horaires et des hauteurs correspondantes du Soleil et des

étoiles. A son retour du Cap, connoissant la réfraction à la hauteur du pole (2188), et les déclinaisons des étoiles observées près du zénit du Cap, indépendamment des réfractions, il avoit les côtés PS et PZ avec exactitude; il calcula ces hauteurs correspondantes; elles étoient d'autant plus exactes qu'il les avoit observées avec l'intention d'en conclure, et la théorie du Soleil, et les ascensions droites des étoiles, dans un temps où il ne pensoit point à aller au Cap, mais où il cherchoit à bien déterminer les positions des étoiles.

La Caille détermina, sur-tout en 1753, la réfraction à 18° de hauteur par la méthode des hauteurs correspondantes, avec un soin particulier et par un grand nombre d'observations; cette réfraction à 18° est une des plus importantes, parceque c'est celle du bord du Soleil à Paris, dans le solstice d'hiver; il employa 9 étoiles, et il trouva 20 résultats, entre 2′ 59″ et 3′ 25″; le milieu donnoit la réfraction moyenne à 18° de hauteur apparente pour Paris, de 3′ 12″6; nous la supposons actuellement de 2′ 54″ seulement.

2174. Pour éviter d'employer la mesure du temps et la valeur de l'angle P dans la recherche des réfractions, on se sert des étoiles circompolaires; on observe une étoile qui passe au méridien, fort près du zénit, et qui passe ensuite au méridien sous le pole. La réfraction étant nulle au zénit, on a la distance de l'étoile au pole, sans autre réfraction que celle qui a lieu à la hauteur du pole, et qui est supposée connue; mais lorsque l'étoile, environ 12h après, passe au méridien sous le pole et fort près de l'horizon, on trouvera sa distance au pole beaucoup moindre, parce qu'elle sera accourcie par la réfraction qui éleve l'étoile.

Exemple. La claire de Persée passoit il y a quelques années à 6′ du zénit de Paris; ainsi l'on étoit sûr que sa distance au pole étoit de 41° 4′; par conséquent elle devoit passer au méridien sous le pole à 41° 4′ du pole, ou à 7° 46′ de hauteur vraie. On l'observoit cependant à 7° 52′ 25″; ainsi l'on étoit assuré que la réfraction élevoit cette étoile de 6′ 25″ à 7° 52′½ de hauteur apparente. (M. le Monnier, *Instit. astr. pag.* 418). Nous rapporterons d'autres exemples de cette méthode (2226).

2175. La seule difficulté consistoit à déterminer parfaitement la réfraction qui a lieu à la hauteur du pole, ou bien celle de 45°, qui n'est que d'environ une minute; mais la méthode des hauteurs (2173) pouvoit laisser quelques secondes d'incertitude; aussi Flamsteed et Halley faisoient cette réfraction de 54″, Cassini de 59″, Picard et la Hire de 71″, Bradley de 57″; M. Maskelyne pense que Bradley n'auroit trouvé que 56″½, s'il avoit employé la parallaxe du

Soleil que nous connoissons aujourd'hui ; la Caille l'a trouvée de 66″½ par la méthode que nous allons expliquer; mais nous la supposons, avec Bradley et M. le Monnier, de 57″.

2176. Le travail de la Caille sur les réfractions fut un des fruits de son voyage au Cap de Bonne-Espérance; il est fondé sur la comparaison répétée des distances de 160 étoiles au zénit de Paris et du Cap, observées dans chacune de ces deux stations au moins six fois chacune, et cela avec des instrumens de six pieds de rayon (*Mém. acad.* 1755).

2177. La premiere partie du mémoire de la Caille consiste à prouver que les réfractions au Cap de Bonne-Espérance sont plus petites d'un quarantieme que celles de Paris (2232). La seconde partie est destinée à prouver, par la somme de 4 réfractions, qu'à la hauteur du pole de Paris, qui est 49°, la réfraction moyenne est de 58″2, et que la vraie différence en latitude de Paris au Cap, est de 82° 46′ 42″ (2187).

Depuis la hauteur de 48° jusqu'au zénit, il calcula toutes les réfractions pour Paris, en les supposant proportionnelles aux tangentes de la distance au zénit (2207). Ces réfractions ainsi connues, servirent à réduire en hauteurs vraies les hauteurs apparentes des étoiles qu'il avoit observées au Cap depuis 48° jusqu'au zénit; il compara ensuite ces hauteurs vraies aux hauteurs apparentes des mêmes étoiles, qui étant observées à Paris, avoient depuis 7° jusqu'à 48 de hauteur, à cause de la grande différence des latitudes. Par ce moyen il eut un grand nombre de distances apparentes des paralleles de Paris et du Cap, affectées seulement des réfractions pour Paris à de petites hauteurs.

2178. Ces distances apparentes des deux paralleles étoient toutes plus petites que 82° 46′ 42″, distance vraie de ces deux observatoires du Cap et du college Mazarin (2187), et la différence donnoit la réfraction pour chaque hauteur observée à Paris. Ayant comparé de même les étoiles observées à de grandes hauteurs à Paris et à de petites hauteurs au Cap, il trouva les réfractions pour le Cap, et elles se sont trouvées plus petites d'un quarantieme que celles de Paris (*Mém.* 1755, *pag.* 563).

2179. Toutes ces réfractions ainsi observées à Paris, à la hauteur de différentes étoiles, étant prises consécutivement de cinq en cinq, et réduites à des degrés justes de hauteur apparente, et à une certaine régularité dans leur progression, au moyen des interpolations, la Caille en forma sa table des réfractions, que j'ai insérée plusieurs fois dans la Connoissance des temps. Ce long travail fut recommencé

plusieurs fois, vérifié par un nombre immense de hauteurs observées dans le même temps à Greenwich par Bradley ; à Gottingen par Mayer ; à Bologne par Zanotti, et par moi à Berlin. J'y étois allé en 1751, pour faire des observations de la Lune (1650) correspondantes à celles de la Caille, et je m'occupai spécialement des hauteurs méridiennes des étoiles qui étoient près du zénit et près de l'horizon, pour en déduire la réfraction au Cap et à Berlin. Les comparaisons des étoiles observées au Cap, fort près du zénit, et en Europe à de petites hauteurs, ont servi à trouver aussi les réfractions pour Paris à ces petites hauteurs, c'est-à-dire, jusqu'à 30°, telles qu'elles sont dans la table de la Caille; les autres ont été conclues par la regle de Bradley (2206).

2180. Une partie de ce beau travail sur les réfractions est fondée sur celle qui a lieu à 45°, que la Caille a trouvée plus grande que la plupart des autres astronomes (2175); on lui en fit l'objection de son vivant; et j'ai vu à Londres, en 1763, une lettre qu'il écrivoit au docteur Bévis, le 21 décembre 1760, dans laquelle il lui disoit qu'il avoit résolu de faire, l'été suivant, une nouvelle vérification de son secteur, en conséquence du soupçon de Bradley. Il avoue que plusieurs observations de Mayer et de Zanotti s'accordoient à indiquer une réfraction plus petite que la sienne; mais il avoit soupçonné que l'arc de 90°, dans ces instrumens, étoit trop petit de quelques secondes; c'est ainsi que celui de Greenwich est trop grand de 15″, et que l'arc de 60° du quart-de-cercle de cinq pieds de M. le Monnier, que j'avois porté à Berlin en 1751, est trop petit de 30″. La vérification que la Caille se proposoit de faire sur son instrument n'a pas été exécutée ; et quoiqu'il soit actuellement entre mes mains, je n'ai pas cru qu'il fût possible de déterminer avec bien de la certitude une si petite différence sur un instrument de six pieds, dont la suspension est une aiguille (2385). Nous parlerons encore d'une autre objection (2242) tirée des expériences sur la densité de l'air.

2181. Malgré le doute de quelques secondes qui nous reste sur les réfractions de la Caille, je vais continuer à expliquer les méthodes ingénieuses dont il se servit, et qu'on pourra employer encore avec succès. La première circonstance remarquable dont il profita, est que la hauteur du tropique du Cancer au Cap, est à-peu-près la même que celle du pole austral. Soit AB (FIG. 96) l'horizon du Cap, Z le zénit, O le pole austral, R le solstice du Capricorne, T le solstice du Cancer, la hauteur AT est à-peu-près égale à OB, ou de 34°; l'on peut en conclure, sans aucun calcul et sans aucune hypo-

these, la réfraction absolue à cette hauteur de 34°. En comparant la hauteur solstitiale du Soleil avec la hauteur apparente du pole, leur distance se trouve diminuée d'un côté et augmentée de l'autre (*Mém. acad.* 1751, *pag.* 411).

2182. La seconde circonstance est que la distance du pole arctique ou boréal du monde, au zénit de Paris 41° 8′½ (au college Mazarin), est presque égale à la moitié de l'arc intercepté entre le Cap et Paris, qui est de 82° 46′ 42″; d'où il suit que si les réfractions sont les mêmes, ou si l'on connoît leur rapport, on peut trouver directement la réfraction qui convient à la hauteur du pole de Paris (2185).

2183. D'après ces considérations, la Caille trouva une maniere adroite de tripler l'effet de la réfraction, à 34° de hauteur pour l'observer directement, et la rendre plus sensible : la distance apparente ZT du Soleil au zénit du Cap, dans le solstice de juin 1752, fut observée de 57° 21′ 55″6, affectée de la réfraction en T seulement, et la distance apparente OZ du pole au zénit, 56° 3′ 10″3, affectée de la réfraction en O ; la premiere réfraction est plus grande de 4″9 que la seconde ; il faut augmenter la distance du Soleil au zénit de cette quantité, pour avoir la distance du zénit au tropique du Cancer 57° 22′ 0″5, affectée de la même réfraction que la distance du zénit au pole.

La distance vraie ZR du tropique du Capricorne au zénit du Cap étant fort petite, on peut supposer d'abord que sa réfraction soit connue, et l'employer de 10″1 ; s'il y a une erreur, elle sera d'autant plus petite, que la quantité elle-même est moindre, et il sera facile d'y revenir ensuite. Cela étant supposé, la Caille trouve la vraie distance RZ du tropique au zénit du Cap de 10° 26′ 53″3 ; il y ajoute la distance OZ du zénit au pole austral affectée de la réfraction 56° 3′ 10″3, de sorte que la distance OR du pole austral au tropique du Capricorne, altérée par la réfraction de la hauteur du pole, est 66° 30′ 3″6 ; c'est le complément de l'obliquité de l'écliptique égal à PT.

2184. On a donc séparément trois quantités affectées chacune de la réfraction qui convient à la hauteur apparente du pole 33° 57′, et qui, sans la réfraction, devroient faire ensemble 180° ; les voici, en commençant par le pole abaissé ou pole boréal P.

1. La distance du pole inférieur ou boréal au trop. du cancer, ou PT.	66° 30′ 3″6
2. La distance du tropique au zénit, ou TZ	57 22 0,5
3. La distance du zénit au pole, ou ZO	56 3 10,3

Somme

Somme PTZO de ces 3 quantités diminuées de 3 réfractions égales.	179	55	14,4
La véritable somme devoit être.	180	0	0
Donc le triple de la réfraction est		4	45,6
Et la réfraction à 34° de hauteur		1	35,2

Cette méthode, en triplant l'effet de la réfraction, rendoit trois fois moindres les petites incertitudes qu'on pouvoit craindre sur le résultat, si les erreurs de l'instrument n'étoient pas toujours dans chacun des élémens qu'on additionne.

2185. La Caille trouva aussi un moyen pour quadrupler la réfraction à la hauteur du pole de Paris. La distance vraie des paralleles de Paris et du Cap est de 82° 46′ environ, dont la moitié est 41° 23′, ainsi une étoile située à 41° 23′ du zénit de chacun, auroit la même hauteur méridienne et la même réfraction; mais chaque distance au zénit étant diminuée par la réfraction de 58″, la somme de ces deux distances, qui est égale à l'angle au centre, ou à la distance des deux stations, doit être diminuée du double, ou de 1′ 56″ par l'effet de la réfraction; ainsi la distance apparente des deux paralleles, conclue de la somme de ces deux distances observées, est trop petite du double de la réfraction, qui a lieu à 41° 23′ du zénit. Il y a beaucoup d'étoiles qui, ayant environ 41° de distance au zénit, pouvoient servir à cette recherche; la Caille en employa 13, et il trouva ainsi, par un grand nombre d'observations, que la distance apparente des paralleles diminuée de deux réfractions à 41° du zénit, étoit 82° 44′ 46″.

La hauteur apparente du pole au Cap, affectée de la réfraction à cette hauteur, fut observée sur un grand nombre d'étoiles de 33° 56′ 49″1, et celle du college Mazarin à Paris, où la Caille avoit fait une multitude d'observations, de 48° 52′ 27″5; la somme de ces deux hauteurs apparentes donne 82° 49′ 16″6 pour la distance des deux paralleles de Paris et du Cap, augmentée par la somme de deux réfractions, qu'il eût fallu en soustraire pour avoir les hauteurs vraies du pole. Cette distance des paralleles, augmentée des deux réfractions à 56 et 41° de distance au zénit, est plus grande de 4′ 30″6, que la distance des paralleles diminuée de deux réfractions à 41°, qui est de 82° 44′ 46″; ainsi l'on a 4′ 30″6 pour la somme des quatre réfractions qu'il s'agit de séparer.

2186. Si ces 4 réfractions étoient égales, il suffiroit de prendre le quart des 4′ 30″6 pour avoir la réfraction cherchée; mais de ces 4 réfractions il y en a deux qui doivent être différentes d'un qua-

rantieme (2232), et qui répondent à 41° 23′ de distance au zénit, l'une pour Paris, l'autre pour le Cap. La 3e est pour 56° 3′, distance du pole au zénit du Cap, et la 4e pour 41° 8′, distance apparente du pole au zénit de Paris; ainsi il faut divisiser 4′ 30″6 en 4 parties, qui aient les conditions requises dans les 4 cas que je viens d'expliquer.

Pour parvenir à ce partage convenable, et pour séparer les 4 réfractions contenues dans la quantité de 4′ 30″, il n'y a qu'à employer la regle démontrée ci-après (2207), que les réfractions sont comme les tangentes des distances au zénit, en faisant d'ailleurs celles du Cap plus petites d'un quarantieme que celles de Paris; l'on trouvera 1′ 36″5 pour la distance au zénit 56° 3′ au Cap, 57″2 pour 41° 22′, 58″2 pour 41° 8′ à Paris, et 58″7 pour 41° 22′ à Paris; ce sont là les quatre réfractions dont la somme est de 4′ 30″6, et qui ont servi pour trouver les réfractions moindres, en suivant les tangentes des distances au zénit (2207). *Mém.* 1755, *pag.* 568.

2187. La réfraction trouvée, par ce moyen, pour 41° de distance au zénit, étant appliquée à chacune des hauteurs égales d'une même étoile observée au Cap et à Paris, a fait connoître que la vraie distance des paralleles est de 82° 46′ 42″, et celle-ci a servi à trouver, par les hauteurs correspondantes ou par les hauteurs méridiennes, toutes les réfractions à de petites hauteurs, du moins au-dessus de 6° où elle est, suivant la Caille, de 8′ 42″; il ne voulut rien statuer sur les hauteurs plus petites (2255).

2188. On peut séparer encore par une autre méthode, sans le secours d'aucune hypothese, les 4 réfractions contenues dans 4″ 30″6 : il faut d'abord en retrancher 1′ 35″2, réfraction trouvée immédiatement par observation pour 33° 57′ de hauteur apparente (2184); le reste 2′ 55″4 sera la somme de trois réfractions presque égales, qui répondent aux distances apparentes de 41° 8′ à Paris, et 41° 22′ au Cap et à Paris; l'on aura donc 58″6 pour 41° 8′ à Paris, 57″ 8 pour 41° 22′ au Cap, et 59″0 pour 41° 22′ à Paris, quantités qui ne different pas sensiblement de ce que nous venons de trouver (2186), et d'où il résulta, suivant la Caille, qu'à 45° la réfraction étoit de 66″ ½.

2189. Jamais table de réfractions, ni aucune table astronomique, n'avoit été vérifiée par tant d'observations, ni avec des précautions aussi grandes que celle dont on vient de voir la construction; il étoit donc bien naturel que la Caille jugeât de l'exactitude des tables qui avoient paru jusqu'alors par leur comparaison avec la sienne. Dans la table de réfraction, dressée par D. Cassini, et qui étoit depuis long-temps celle du livre de la *Connoiss. des temps*, les ré-

fractions sont un peu plus petites; savoir de 4″ à 8°, de 16″ à 20°, de 6″ à 49°, etc. Cette table fut calculée vers 1662, par Dominique Cassini, et imprimée la même année à la fin des éphémérides de *Malvasia*, sous le titre de *Refractio aestiva*. Il y avoit dans le même livre une table qu'il appelloit *Refractio aequinoctialis*, et une autre qui étoit destinée pour l'hiver; la réfraction équinoxiale, qui étoit sa réfraction moyenne, étoit si conforme à celle de la Caille, sur-tout depuis 23° de hauteur, qu'à peine trouve-t-on une seconde de différence, de sorte qu'on peut dire, à la gloire de Cassini, qu'il fut le premier qui détermina les réfractions, et que de ceux qui vinrent après lui, pas un ne réussit aussi bien. Il est vrai que ces réfractions équinoxiales deviennent ensuite un peu trop grandes en approchant de l'horizon; mais il s'en faut beaucoup qu'elles soient en excès autant que les tables de Flamsteed et de Newton sont en défaut; et la Caille pensoit que cette table des réfractions équinoxiales étoit la meilleure de toutes celles qui avoient été calculées depuis 1662. (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 576).

Les réfractions publiées dans les tables de la Hire (*pag.*6), et qui avoient été calculées en tout ou en partie par Picard, s'accordent assez bien avec celles de la Caille, depuis l'horizon jusques vers 35° de hauteur; mais depuis 35° jusqu'au zénit, elles sont toujours trop grandes.

Les réfractions de Flamsteed sont celles qui s'éloignent le plus de celles de la Caille; elles sont plus petites de 1′ 4″ à 10°, de 40″ à 20°, de 31″ à 30°, et de 21″ à 40° de hauteur.

Les réfractions de Newton et de Halley sont aussi plus petites de 45″ à 10° de hauteur, de 29″ à 20°, de 22″ à 30°, et de 15″ à 40°. Enfin celles de Bradley sont plus petites de 14″ à 6°, de 22″ à 10°, de 20″ à 20°, de 11″ à 40°.

2190. Mais de peur qu'on n'objectât que les réfractions pouvoient être moindres en Angleterre qu'à Paris, la Caille rapporta la comparaison de 23 hauteurs méridiennes d'étoiles, observées à Greenwich, à de petites hauteurs, en même temps qu'il les observoit au Cap près du zénit, et les corrigeant par sa table de réfractions, il les trouva d'accord, en supposant pour la latitude de Greenwich 51° 28′ 53″ (a), et pour la distance vraie des paralleles de Greenwich et du Cap, 85° 24′ 5″8; il n'y en a que quatre qui s'écartent de 5 à 6″, et toutes les autres s'accordent, à 2 ou 3″ près, à donner la même distance des paralleles. Il fit de même la comparaison de 35

(a) M. Maskelyne la trouve de 51° 28′ 40″, en employant les réfractions de Bradley.

étoiles observées à Gottingen, 24 à Bologne, et 50 que j'avois observées à Berlin, chacune plusieurs fois avec un mural de cinq pieds de rayon, et il trouva continuellement le même accord. Ainsi, quoique l'on soit persuadé assez généralement que les réfractions de la Caille sont un peu trop fortes, je crois qu'il importe de s'en assurer encore mieux; au reste les déclinaisons des étoiles n'en sont pas moins d'accord avec celles de Bradley, comme l'a déja remarqué M. Maskelyne. *Phil. Trans.* 1787.

Des hypotheses physiques propres à représenter les réfractions.

2191. On ne peut déterminer immédiatement par observation que les réfractions un peu fortes; il est donc important d'en connoître la loi, de maniere à pouvoir remplir par un calcul exact les intervalles que l'observation a laissés, et trouver les petites réfractions que l'observation donneroit mal.

Domin. Cassini, en 1662, voyant que la maniere d'observer les réfractions, employée par Tycho, ne pouvoit les faire connoître à de grandes hauteurs dès qu'elles étoient moindres qu'une minute, songea à y employer le calcul et la théorie; sa méthode fut perfectionnée dans la suite, et on la trouve dans les *Mémoires* de 1714, et dans les *Elémens d'astronomie de Cassini le fils*.

Soit AB la surface de la Terre (FIG. 139), EKG la surface de l'atmosphere ou de la matiere réfractive, supposée homogene, FG le rayon de l'étoile avant son entrée dans l'atmosphere, GA le rayon rompu, qui est perpendiculaire à la ligne verticale CAZ, lorsque l'étoile paroît à l'horizon; l'angle TGF est la réfraction horizontale, qu'on a observée de 33′ 0″. Lorsque l'étoile se sera élevée en M de 10°, son rayon direct sera MK, et le rayon rompu AKN; l'angle MKN est la quantité de la réfraction à cette hauteur; je suppose qu'elle ait été observée de 5′ 15″ à 10° de hauteur apparente. (2171, 2174).

Pour employer une hauteur AE de l'atmosphere, supposée homogene, il faut la prendre telle que les sinus des angles d'incidence PGF, RKM, soient aux sinus des angles rompus PGT, RKN dans un rapport constant, et que les réfractions FGT MKN soient de 33′ 0″ et 5′ 15″, ces deux réfractions étant connues par observation.

2192. Pour trouver cette hauteur AE, l'on emploie la méthode indirecte de fausse position; on la suppose de 2000 toises, le rayon AC de la Terre de 3270000 toises (2701); ainsi la longueur totale

CE ou CG sera de 3272000 toises. Dans le triangle CAG rectangle en A, dont on connoît CA et CG, on trouvera l'angle CGA de 87° 59′ 49″, auquel ou ajoutera la réfraction FGT de 33′ 0″, et l'on aura l'angle FGP de 88° 32′ 49″; c'est l'angle d'incidence pour le rayon FG à son entrée dans l'atmosphere en G. De même dans le triangle CAK, dont on connoît les côtés CA, CK et l'angle CAK de 100° à la hauteur apparente de 10°, l'on trouvera l'angle AKC égal à l'angle RKN de 79° 48′ 12″.

Pour trouver la réfraction en K, l'on dira : le sinus de l'angle rompu CGA, 87° 59′ 49″, est au sinus de l'angle d'incidence FGP, 88° 32′ 49″, comme le sinus de l'angle rompu RKN, 79° 48′ 12″, est au sinus de l'angle d'incidence MKR 79° 53′ 46″; retranchant l'angle RKN que nous avons trouvé, 79° 48′ 12″, il reste l'angle MKN de 5′ 34″; c'est la réfraction à la hauteur apparente de 10°. Si l'on vouloit trouver exactement 5′ 15″, comme dans la table de Bradley, il faudroit supposer 1800 toises seulement pour la hauteur de l'atmosphere uniforme.

2193. Cette hypothese sur la hauteur d'une matiere réfractive équivalente à la hauteur de l'atmosphere, s'est trouvée assez bien d'accord avec les observations faites à différens degrés de hauteurs, en sorte qu'elle peut donner avec très grande facilité, comme on vient de le voir, et avec une précision suffisante, la réfraction qui convient à chaque hauteur au-dessus de 8 ou 9° : il est vrai que, relativement à la table de Bradley (2215), il y a 3′ 32″ de trop à 1° de hauteur, 1′ 4″ à 3°, 8″ à 6°; mais au-dessus de 9°, les différences ne vont pas à 1″.

Cependant il y a une grande différence entre l'hypothese d'une matiere homogene, finissant à 2000 toises d'élévation, et l'état réel de l'atmosphere qui diminue continuellement et par degrés, et qui est encore sensible à 34 mille toises de hauteur par son effet sur les crépuscules (2270); aussi dans l'hypothese de Cassini les réfractions sont comme les sinus des distances au zénit, et dans celles de Bradley comme les tangentes. Mais malgré cette différence entre l'hypothese de 2000 toises et la nature de l'air, il étoit utile pour l'astronomie d'y trouver un équivalent qui donnoit au moins les petites réfractions avec une exactitude suffisante : au reste nous allons passer à une détermination plus rigoureuse de ce problême physico-mathématique.

2194. La découverte du principe général de l'attraction, fit juger à Newton que la réfraction de la lumiere étoit un effet de l'attraction que l'atmosphere exerce sur les corpuscules de lumiere. En

partant de ce principe, on peut déterminer la trajectoire du rayon, et la loi suivant laquelle varie la réfraction depuis le zénit jusqu'à l'horizon. Un rayon de lumiere qui est attiré successivement vers le centre de la Terre par les différentes couches de l'atmosphere, se trouve par là détourné de la ligne droite qu'il suivroit dans le vuide; cette attraction, qui va toujours en augmentant lorsque le rayon s'enfonce dans l'atmosphere, produit une réfraction qui augmente aussi de plus en plus; la somme de toutes ces réfractions, quand le rayon arrive à notre œil, forme la réfraction astronomique.

2195. Plusieurs auteurs ont cherché à déterminer la courbe décrite par ce rayon dans l'atmosphere, et que M. Bouguer appelle la *solaire*, dans sa Dissertation sur la maniere d'observer les hauteurs en mer (prix de 1729); Taylor, (*Method. increm. directa et inversa*); Daniel Bernoulli (*Hydrodyn.* 1738, *pag.* 221); Euler, (*Mém. de Berlin* 1754, *Tom. X*); Simpson, (*Mathématical Dissertations*, 1743); M. du Séjour, (*Traité analyt.*, *pag.* 657). On peut voir encore sur cette matiere un ouvrage qui a pour titre: *Les propriétés remarquables de la route de la lumiere par les airs, et en général par plusieurs milieux réfringens sphériques et concentriques, avec la solution des problêmes qui y ont du rapport, comme sont les réfractions astronomiques et terrestres*, par J. H. Lambert, à la Haye 1759, 116 pages *in*-8°; il y en a une édition de 1773, en allemand, qui a été augmentée. M. de la Grange a donné une formule dans le 3e vol. des nouveaux Mémoires de Berlin, et Mayer, dans ses Tables de la Lune, publiées en 1770; M. de Luc se propose d'en démontrer les fondemens: enfin M. Oriani a donné une méthode des formules et des tables de densité dans les Ephém. de Milan pour 1788.

Pour moi je me contenterai de démontrer ici la loi des réfractions trouvée par Simpson, et celle que Bradley en a déduite (2203), et je me servirai de la méthode de M. Boscovich (*Oper. Tom. II*)[a].

2196. Pour déterminer analytiquement la réfraction, il faut considérer la courbe qu'une particule de lumiere doit décrire lorsqu'elle est sans cesse attirée par des couches concentriques. Soit C le centre de la Terre (FIG. 140), vers lequel est attiré le corpuscule F de lumiere; A le lieu de l'observateur; Z le zénit; FA la courbe que doit décrire le rayon; SF la ligne qu'il suivoit avant d'entrer dans l'atmosphere, et qui est tangente à la courbe en F; BIAG une tan-

(a) On ne peut se dispenser de supposer ici la connoissance du calcul différentiel dont il sera parlé dans le XXIe Livre; ainsi le lecteur qui n'y auroit pas encore pénétré, doit passer les démonstrations suivantes, et se contenter d'en voir les résultats.

gente en A, qui marque la direction du rayon lorsqu'il arrive au point A; l'angle ZAI est la distance apparente au zénit pour un astre S ou F, et si l'on suppose AK parallele à FS, l'angle ZAK sera la distance vraie. La premiere tangente SF étant continuée, rencontre en un point I la derniere tangente AIB, qui marque le lieu apparent de l'astre; la réfraction astronomique est égale à l'angle BIS ou AIE des deux tangentes, et puisqu'on suppose AK parallele à SFIH, la réfraction est encore égale à l'angle BAK.

2197. La premiere chose qu'il est bon de démontrer relativement à la cause physique des réfractions, c'est que leur changement ne dépend que de la constitution de la partie basse de l'atmosphere, et pour cela nous ferons sur le mouvement, en général, quelques remarques nécessaires. Dans toutes les courbes décrites en vertu d'une force de projection uniforme et d'une force centrale quelconques, la force à égales distances du centre étant égale, la vîtesse en différens points de la courbe est en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur les tangentes en ces différens points; car les aires étant toujours égales (1233), et étant le produit de la moitié de l'arc de la courbe par la perpendiculaire abaissée sur cet arc prolongé ou sur la tangente, les petits arcs de la courbe diminueront dans le même rapport que les perpendiculaires augmenteront, et de maniere à former toujours le même produit. Ainsi la vîtesse du corpuscule de lumiere en F est à sa vîtesse en A, comme la perpendiculaire CG, abaissée sur la tangente BAG, est à la perpendiculaire CH, abaissée sur la tangente SFH. Si l'on fait le rayon de la Terre $CA = 1$, $CH = y$, la vîtesse dans un point F de la courbe $= v$, la vîtesse finale en $A = c$, l'angle CAG ou la distance apparente au zénit $= a$, en sorte que $CG = \sin. a$, on aura $v = \frac{c \sin. a}{y}$.

2198. Supposons pour un instant que FA soit un arc infiniment petit, compris entre deux lignes droites finies FC, AC, dont l'angle FCA soit $= dx$; et tirons AL parallele à CF, AQ perpendiculaire à CF, et QO perpendiculaire sur la corde AOF de l'arc AF. Si la réfraction totale est égale à r, l'angle EIA sera $= dr$ pour le cas de la portion infiniment petite $FCA = dx$, puisque l'une est la différentielle de l'angle au centre C, et l'autre l'angle d'une tangente de la courbe avec la tangente qui en est infiniment proche. Si l'on fait encore $CA = z$, $FQ = dz$, la force réfractive en $F = f$, la vîtesse v en F étant $\frac{c \sin. a}{y}$, l'espace FA, qui est comme le produit du temps par la vîtesse, sera $v\,dt$, et l'effet AL de la force accélératrice, ou

l'écart de la tangente (3536), sera proportionel à la force et au carré du temps (3506) ou $f\,dt^2$. La force suivant FQ, ou la force réfractive absolue f, est à cette même force décomposée suivant FA ou FO, comme FQ est à FO, comme FA est à FQ, comme $v\,dt$ est à dz, c'est à-dire, $v\,dt : dz :: f : \frac{f\,dz}{v\,dt}$, expression de la force attractive dans la direction du mouvement FI de la lumiere, qui est la même que la direction FA, puisque l'angle est infiniment petit. Ainsi la différentielle de la vîtesse v, qui est comme la force et le temps conjointement, c'est-à-dire, $d\,v$ sera $\frac{f\,dz\,dt}{v\,dt}$; donc $v\,dv = f\,dz$; ainsi l'augmentation du carré de la vîtesse dans chacun des petits arcs de la courbe, est comme la force absolue, et le changement de la distance au centre.

2199. De là il suit que deux particules de lumiere qui, avant d'entrer dans l'atmosphere, avoient des vîtesses égales à même distance du centre, les auront toujours; car en se rapprochant également du centre, elles éprouveront des forces égales, des accroissemens égaux dans les carrés de vîtesses égales; donc les vîtesses elles-mêmes resteront égales : ainsi, sous quelle direction que les rayons homogenes traversent l'atmosphere, ils auront des vîtesses égales à même distance du centre, la valeur de c ou de la vîtesse finale en A sera constante pour tous les rayons; le rapport de CH à CG, ou de la vîtesse finale à la vîtesse initiale, sera également le même; ce rapport différera peu de l'égalité, puisque la réfraction est toujours fort petite en comparaison de la distance au zénit.

2200. Quelque changement qui arrive dans l'atmosphere, pourvu que son état reste le même en A, la vîtesse finale sera la même; car l'augmentation du carré de la vîtesse sera comme la somme de tous les produits des forces attractives dans chaque couche par leurs épaisseurs relatives, c'est-à-dire, des $f\,dz$.

Que l'on conçoive l'atmosphere divisée en plusieurs couches de même épaisseur; la force en chaque point sera l'excès des actions qu'exercent les couches inférieures sur celles des couches supérieures; le rayon approchant de la Terre, les effets des couches intermédiaires seront successivement détruits, et il ne restera que l'effet produit par l'excès de la derniere force sur la premiere. Ainsi, quoique la lumiere parvienne à l'air qui nous touche par un nombre quelconque de milieux différemment denses, sa vîtesse est la même que si elle y parvenoit immédiatement de l'éther. La vîtesse de la lumiere en A ne dépend donc que de la constitution de l'atmosphere en

en A, c'est-à-dire, de la hauteur du thermometre ou du barometre dans le lieu de l'observation ; mais la situation du point I ou de l'intersection des deux tangentes, peut rendre plus variable la réfraction aux environs de l'horizon.

2201. Pour connoître la loi des réfractions, il faut trouver leur rapport avec la distance au zénit et avec l'angle FCA, formé au centre de la Terre. La hauteur de l'atmosphere ou la longueur de CF étant la même pour tous les rayons de même espece, le rapport du sinus d'incidence CFH au sinus de l'angle rompu CAG, sera le même pour tous ; car ces sinus sont $\frac{CH}{CF}$ et $\frac{CG}{CA}$ (3803) : si le rapport des vîtesses en A et en F, ou de CH à CG, est celui de $1+b$ à 1, et que la hauteur de l'atmosphere MF soit $=e$, ce rapport de $\frac{CH}{CF}$ à $\frac{CG}{CA}$ sera celui de $\frac{1+b}{1+e}$ à 1. Si l'on fait $\frac{1+b}{1+e}=m$; on aura $1 : m :: \sin.$ CAG ou $\sin. a$ (angle rompu) $a : \sin.$ CFH (angle d'incidence), qui sera $= m \sin. a$.

Pour avoir la différence de l'angle A à l'angle F, je les compare avec l'angle E qui est plus grand que tous les deux, plus grand que le premier de la quantité r ou de l'angle I, et plus grand que le second de la quantité x ; il s'ensuit que les angles A et F different l'un de l'autre de $x-r$. D'ailleurs, dans le quadrilatere rectiligne CFIA, les quatre angles internes équivalent nécessairement à quatre angles droits, aussi bien que les angles internes A et I réunis avec leurs externes ; retranchant de part et d'autre les deux internes A et I, l'on aura les deux externes A et I égaux aux deux autres internes C et F, ou CFI + ACF = CAG + GIH ; donc CFI ou CFH = CAG — ACF + GIH, $= a - x + r$ ou $a-(x-r)$; mais $\sin.$ CFH $= m \sin. a$: ainsi l'on aura $m \sin. a = \sin. (a-(x-r))$. Nous en déduirons la regle de Simpson (2210). La somme de deux côtés d'un triangle, ou de deux sinus qui sont comme 1 et m (ce sont ceux de CFH et CAG), est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles a, et $a-(x-r)$, dont ils sont les sinus, est à la tangente de leur demi-diff. $\frac{1}{2}(x-r)$ (art. 3837) ; ainsi $1+m : 1-m :: \text{tang.} (a-\frac{1}{2}(x-r)) : \text{tang.} \frac{1}{2}(x-r)$; et puisque ce rapport est constant, il s'ensuit que la tangente de $\frac{1}{2}(x-r)$, ou le petit angle lui-même $\frac{x-r}{2}$, sera comme la tangente de $(a-\frac{1}{2}(x-r))$ ou de la distance apparente au zénit a diminuée du petit angle $\frac{x-r}{2}$.

2202. S'il y a un rapport constant de r à x, de la réfraction à l'angle au centre, ou à l'angle parcouru, comme, par exemple, de 1 à 7, le petit angle $\frac{x-r}{2}$ sera constamment un certain multiple de la réfraction r, par exemple 3, et la réfraction elle-même sera comme la tangente de la distance au zénit, diminuée de ce multiple ou de trois fois la réfraction. C'est ce que l'observation justifie; et il s'ensuit que la force attractive est constante dans les différentes couches de l'atmosphere.

Pour le prouver, il faut chercher le rapport de x à r; soit un arc infiniment petit AF $= v\,dt$ (2198); la tangente AI, sensiblement égale à la moitié de l'arc, sera $\frac{v\,dt}{2}$; le sinus de CFA, ou de CFL (qui lui est égal, parceque l'angle AFL est infiniment petit) est $=\frac{AQ}{AF}$; l'arc AQ est comme l'angle multiplié par le rayon CA ou z (3498); ainsi AQ $= z\,dx$; et comme AF $= v\,dt$, le sinus de CFA sera $\frac{z\,dx}{v\,dt}$. Mais AI : AL :: sin. ALI ou CFA : sin. AIL; c'est-à-dire, $\frac{v\,dt}{2} : f\,dt^2 :: \frac{z\,dx}{v\,dt}$: sin. dr; donc sin. dr, ou dr lui-même $=\frac{2fz\,dx}{v^2}$, et $\frac{dr}{dx}=\frac{2fz}{v^2}$; ainsi l'on a le rapport entre le petit changement de la réfraction et l'angle au centre.

Le rapport $\frac{2z}{vv}$ est pour ainsi dire constant, parceque les vitesses et les distances au centre de la Terre ne changent que très peu; ainsi $\frac{dr}{dx}$ est sensiblement comme la force réfractive, qui a lieu dans chacune des couches de l'atmosphere; et si cette force f est sensiblement constante ou égale dans les différentes hauteurs de l'atmosphere, le rapport $\frac{dr}{dx}$ sera constant.

2203. Ainsi en supposant que la force réfringente est constante dans toute la hauteur de l'atmosphere, le rapport de x à r est un rapport constant; dans cette hypothese, Simpson, en prenant deux réfractions observées, trouvoit $r=\frac{2}{11}(x-r)$, ou $x=6\frac{1}{2}r$; mais Bradley trouva $\frac{2}{12}$ au lieu de $\frac{2}{11}$, c'est-à-dire $x=7\,r$; dans ce cas $a-\frac{x-r}{2}=a-3\,r$; ainsi *la réfraction est comme la tangente de la distance apparente au zénit diminuée de trois fois la réfraction*. C'est la regle trouvée par Bradley peu de temps avant sa mort, mais qui n'avoit été ni publiée ni démontrée avant la premiere édition de

mon ouvrage; elle s'est trouvée assez bien d'accord avec les observations, pour justifier la supposition de la force constante. Nous verrons bientôt la maniere de trouver ce nombre *trois* par le moyen des observations (2210, 2212).

2204. Les principes que l'on vient de voir suffisent pour prouver que dans toutes les hypotheses qu'on fait sur le progrès de la force réfringente, le sinus d'incidence est au sinus de réfraction en raison constante, et en raison inverse de la vîtesse dans le premier milieu, à la vîtesse dans le second. Car si l'angle est fort petit, AC devient parallele à CF, les lignes CA et CF sont sensiblement égales (a); CFH est l'angle d'incidence, CAG l'angle de réfraction, et le rapport de leurs sinus est celui des perpendiculaires CH et CG ou des vîtesses; donc les vîtesses sont en raison inverse des sinus de réfraction et d'incidence.

2205. D'après la regle de Bradley on a $x = 7\,r$, c'est-à-dire, l'angle FCA égal à 7 fois la réfraction; ainsi la réfraction est toujours la septieme partie de l'angle au centre de la Terre, dans lequel est renfermé tout l'espace que le rayon a parcouru dans l'atmosphere. Nous en ferons usage pour les réfractions terrestres (2252).

2206. Pour faire usage de la regle de Bradley, je suppose que la réfraction soit de 33′ à l'horizon, et qu'on demande celle qui a lieu à 45°: le triple de la réfraction horizontale, 1° 39′, étant ôté de la distance apparente au zénit 90°, on a 88° 21′; on en conclura la réfraction pour 45°, dès qu'on saura que cette réfraction est d'environ 1′, en disant, la tangente de 88° 21′ est à la tangente de 44° 57′, comme la réfraction horizontale 33′ est à 57″, qui est exactement la réfraction pour 45° 0′ de distance apparente au zénit. C'est par cette regle que j'ai fait la table de réfractions que je joins à cet ouvrage, plus étendue et plus exacte que celle de Bradley, mais qui est calculée sur les mêmes données; seulement les réfractions y sont un peu plus petites pour répondre à la hauteur moyenne du thermometre et du barometre à Paris (2241).

2207. Cette regle a lieu dans les petites hauteurs comme dans les grandes, et elle est confirmée sensiblement par les observations. Il en résulte que les réfractions sont proportionelles aux tangentes des distances au zénit, tant que ces réfractions ne passent pas environ 3′, ou que les hauteurs excedent 20°; car alors les tangentes des distances simples ou celles de ces distances diminuées de trois fois la réfraction, ont sensiblement le même rapport; ainsi nous

(a) Il faut pour cela que la hauteur de l'atmosphere soit supposée infiniment petite par rapport au rayon de la Terre, ce qui est sensiblement vrai.

avons pu supposer, sans aucune erreur sensible, que les réfractions au-dessus du pole à Paris, étoient comme les tangentes des distances au zénit (2186). Mais en approchant de l'horizon la simple distance au zénit ne suffit plus, parceque la réfraction étant triplée, produit dans les tangentes une différence énorme ; il faut alors employer une fausse position pour calculer la réfraction par la regle de Bradley, comme dans l'exemple précédent, où on la suppose connue à-peu-près pour la trouver exactement.

2208. On sait par les expériences du barometre que les densités de l'air grossier croissent en progression géométrique, et non pas en progression arithmétique en s'approchant de la Terre. (Voyez Mariotte, Gravesande, Musschenbroek, Nollet, l'Encyclopédie, la Connoissance des mouv. cél. 1765, *pag.* 212). Mais on a lieu de croire que la réfraction, ou en général la force attractive des corps sur les rayons de lumiere, ne dépend pas seulement de leur densité, mais aussi d'une cause interne qui est peut-être la structure de leurs parties, leur distribution, leurs interstices, leur viscosité, leur adhérence, leur électricité, leur qualité plus ou moins huileuse, plus ou moins inflammable. Simpson attribuoit cette différence entre la loi des densités de l'air observées avec le barometre, et celle que nous admettons pour les réfractions dans l'étendue de l'atmosphere, à la chaleur qui dilate l'air, beaucoup plus vers la surface de la Terre que dans la région supérieure, ce qui fait que l'attraction n'augmente pas autant en approchant de la Terre. On sait d'ailleurs que la réfraction n'augmente pas toujours comme les pesanteurs ou les densités des corps réfringens : l'esprit de térébentine est bien plus léger que le verre, et cependant la réfraction y est presque aussi grande ; ainsi rien n'empêche de croire que la matiere réfractive change de densité d'une maniere uniforme en s'élevant au-dessus de la Terre, quoique cela ne soit pas vrai pour l'air grossier. Quoique les expériences faites sur notre air condensé fassent paroître la réfraction proportionelle à la densité, il peut arriver que la matiere électrique, plus abondante dans la région supérieure de l'atmosphere, rende la réfraction plus grande à une certaine hauteur qu'elle ne devroit être, si l'air étoit homogene avec celui que nous respirons ; par là il peut arriver que la force réfractive approche bien plus de l'uniformité que de la progression géométrique. Au reste, Cassini employoit une courbe circulaire pour les rayons de lumiere (*Mém.* 1714), ce qui suppose implicitement une force réfractive constante ; et Bouguer (*Mém. acad.* 1749), trouvoit aussi un rapport constant entre x et r (2203), dans des suppositions qui reviennent à celle d'une force constante.

2209. Cette hypothese s'accorde avec les réfractions observées, tandis que la loi des densités démontrée par les hauteurs du barometre ne sauroit s'y appliquer; si l'on calcule la quantité de la réfraction horizontale, suivant cette loi des densités au moyen de la pesanteur spécifique de l'air et de la force réfractive, qui sont connues, l'on trouve cette réfraction horizontale de 52', au lieu de 33' que l'on observe réellement; mais quand on calcule cette même réfraction horizontale en supposant que la densité croisse uniformément, on approche beaucoup de l'observation (a). Au-dessus de 7° de hauteur, il est indifférent quelle supposition l'on fasse sur les densités de l'atmosphere; car si l'on prend une réfraction observée à une hauteur qui ne soit pas au-dessous de 7°, et qu'on en déduise les autres réfractions suivant les deux hypotheses différentes, on ne trouvera jamais plus de 2″ de différence; d'où Simpson conclud (*p.* 61) que l'hypothese des accroissemens égaux étant beaucoup plus conforme à l'observation vers l'horizon, doit donner elle seule une table fort exacte des réfractions à de plus grandes hauteurs, aussitôt que les grandes réfractions sont une fois observées.

2210. Suivant la regle de Simpson, il y a un rapport constant entre le sinus de la distance apparente au zénit, a, et le sinus d'un certain angle, $a - \frac{1}{2}(x - r)$, et la différence $\frac{1}{2}(x - r)$ de ces deux angles est à la réfraction cherchée dans un autre rapport constant; or en mettant au lieu de $x - r$ (2201) un multiple $n\,r$ de la réfraction, l'on a m sin. a = sin. $(a - nr)$, et c'est par les observations que l'on détermine m et n; par exemple, en supposant la réfraction de 33' à l'horizon et de 1' 30″½ à 30° de hauteur, Simpson trouvoit m = sin. 86° 58'½ ou 0,99861 et $n = \frac{11}{2}$ (2213).

Suivant la regle de Bradley, la réfraction est proportionelle à la tangente de la distance apparente au zénit diminuée d'un certain multiple de la réfraction (2202), ou en général r proportionel à tang. $(a - h\,r)$, et il suppose $h = 3$ (2203), ce qui revient à $n = 6$ au lieu de $\frac{11}{2}$ qu'il y a dans la regle de Simpson; or ces deux regles peuvent facilement se déduire l'une de l'autre.

En effet par celle de Simpson l'on a $1 : m :: \text{sin. } a : \text{sin. } (a - nr)$, ainsi $1 + m : 1 - m :: \text{sin. } a + \text{sin. } (a - nr) : \text{sin. } a - \text{sin. } (a - nr)$, ou, ce qui revient au même, $:: \text{tang. } (a - \frac{1}{2} n r) : \text{tang. } \frac{1}{2} n r$, parceque, comme nous l'avons déja remarqué, la somme de deux sinus est à leur différence, comme la tangente de la demi-

(a) Cependant pour la partie basse de l'atmosphere, la réfraction augmente sensiblement comme la densité de l'air (2225); mais probablement la nature de l'air n'y est pas tout-à-fait la même que dans la partie supérieure.

somme des deux arcs a et $x - nr$ est à la tangente de leur demi-différence (3837); donc tang. $\frac{1}{2}nr$, et r lui-même sont proportionels à tang. $(a - \frac{1}{2}nr)$. Ainsi la valeur de h dans Bradley est $= \frac{1}{2}n$ dans Simpson, et si $n = 6$ on a $h = 3$; mais si $n = \frac{11}{2}$; comme Simpson le supposoit, on a $h = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ au lieu de 3; dans ce cas-là, il faut diminuer la distance au zénit de deux fois et $\frac{3}{4}$ la réfraction. Le nombre n dans Simpson se déduit également de la valeur de h dans Bradley $= \frac{1}{2}n$: pour trouver ensuite l'autre coëfficient m, on emploie une réfraction r observée à une distance a du zénit, on a par ce qui précéde $m = \frac{\sin.(a - nr)}{\sin. a}$; si l'on suppose $a = 90°$, on a sin. $(a - nr) = \cos. nr = m$.

2211. La regle de Bradley est plus facile à retenir et plus simple dans l'énoncé que la regle de Simpson, mais elle n'est pas aussi commode, lorsqu'il s'agit de construire une table par le moyen des observations, parcequelle suppose qu'on connoisse d'avance la réfraction que l'on cherche, et l'on est obligé de faire deux fois le calcul, pour trouver ensuite, par une partie proportionelle, la réfraction qui donne exactement celle qu'on a supposée. Ainsi dans l'usage il vaut mieux la disposer suivant la forme de Simpson. Pour chaque distance apparente au zénit a', à laquelle répond une réfraction r', on a cette équation sin. $(a' - nr') = m \sin. a'$ (2210); la valeur de $a' - nr'$ étant trouvée et retranchée de a', il reste nr' qui divisée par n donne la réfraction cherchée r'. Par exemple, si la réfraction horizontale est de $33' = r$, on a $nr = 6r = 3° 18'$ et cos. $nr = m =$ cos. $3° 18' = 0,9983$. Si maintenant l'on veut avoir la réfraction à 50° de distance au zénit, on trouve cos. $3° 18'$ sin. $50° =$ sin. $49° 53' 13''$; cet angle est plus petit que 50°, de $6' 47''$ dont la sixieme partie $1' 7'' 8$ est la réfraction qui convient à 50° de distance apparente au zénit.

2212. Il faut maintenant trouver dans cette hypothese les coëfficiens nécessaires à la construction d'une table, au moyen de deux réfractions observées. La valeur de m sin. a, ou sin. $(a - nr) =$ sin. a cos. $nr -$ sin. nr cos. a (3811); mais l'arc nr étant très petit, l'on a cos. $nr = 1 - \frac{1}{2}n^2r^2$ (3460); c'est pourquoi l'on aura sin. $(a - nr) =$ sin. $a - \frac{1}{2}n^2r^2$ sin. $a - nr$ cos. a; et parceque m sin. $a =$ sin. $(a - nr)$, divisant par sin. a et mettant cot. a pour $\frac{\cos. a}{\sin. a}$, on aura $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r^2 - nr \cot. a$. En employant une autre réfraction r' à une distance du zénit a', on a la même valeur; ainsi $\frac{1}{2}n^2r'^2 - \frac{1}{2}n^2r^2 = nr \cot. a - nr' \cot. a'$, et $\frac{1}{2}n = \frac{r \cot. a - r' \cot. a'}{r'^2 - r^2}$,

2213. Si la réfraction horizontale est r', on aura cot. $a' = 0$ et $n = \frac{2r\,\text{cot.}\,a}{r'^2 - r^2}$. Connoissant la valeur de n, on trouvera aussi celle de $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r^2 - n\,r$ cot. a. Si r est une réfraction assez éloignée de l'horizon pour que cot. a ne soit pas trop petite, on pourra omettre $\frac{1}{2}n^2r^2$ et faire $m = 1 - n\,r$ cot. a. Pour la réfraction horizontale r', on aura cot. $a' = 0$ et $m = 1 - \frac{1}{2}n^2r'^2 =$ cos. $n\,r'$ (3460).

Simpson employoit les valeurs suivantes, $a = 60°$, $r = 1' 30'' \frac{1}{2}$, $r' = 33'$, ce qui donne $n = \frac{11}{2}$, $m =$ cos. 3° 1' ½ = sin. 86° 58' ½ = 0,998606. Bradley supposoit $r = 1' 38''4$, ce qui donne $n = 6$, et $m =$ cos. 3° 18' = 0,998341. Si l'on employoit les réfractions de Cassini, $r' = 32' 20''$, $r = 5' 28''$, $a = 80°$, on trouveroit $n = 6{,}526$ et $m =$ cos. 3° 31' 0''.

Si l'on prenoit deux réfractions dans la table de la Caille, $r = 1' 54''4$ pour 60° et $r' = 8' 42''$ pour 84°, on trouveroit $n = 17, 78$ au lieu de 6 et $m =$ cos. 6° 7'; mais les réfractions de la Caille n'étant point faites sur cette théorie ni assujetties à cette regle, il n'est pas étonnant qu'elles s'y accordent mal; il suffit d'une différence de quelques secondes dans les données, pour en produire une très grande dans les coëfficiens.

2214. Pour réduire en nombres la valeur de $\frac{1}{2}n$ (2213), il faut réduire le numérateur et le dénominateur en décimales du rayon; mais on peut simplifier l'opération en ôtant le logarithme de l'arc égal au rayon (1242, 3499) du logarithme de $r' - r$, et l'on a pour valeur de n une quantité dont toutes les parties sont homogenes entre elles (3499); parceque pour lors r et $r' + r$ restent exprimées en secondes de degré, et $r' - r$ se convertit en décimales du rayon, et devient une simple fraction.

2215. La loi des réfractions ou la regle de leur progression étant supposée connue par la théorie précédente, il seroit facile de trouver les réfractions absolues. Je suppose, par exemple, qu'on ait observé la hauteur apparente de deux étoiles circompolaires au-dessus et au-dessous du pole (33); en corrigeant ces quatre observations par les réfractions, elles doivent donner exactement la même hauteur du pole; on pourra donc par de fausses positions trouver quelle est la réfraction horizontale qui, en suivant la théorie précédente, donnera quatre réfractions telles que la hauteur du pole se trouve exactement la même par chacune des deux étoiles (2246). De même la déclinaison du Soleil observée très exactement en divers temps de l'année a servi à Bradley pour construire sa table des réfractions, en supposant le rapport de ces réfractions connu par les regles précédentes.

2216. Je reviens à l'hypothese de la force constante (2203), pour en tirer l'augmentation de vîtesse de la lumiere dans l'atmosphere, ou la valeur de b (2201). Soit ACI (FIG 140) $= x'$, CIG ou CIA $= a - x'$; CIH $= a - x' + r$; les sinus des angles CIA et CIH sont comme les perpendiculaires CG, CH, ou les vîtesses 1 et $1 + b$ (2197, 2201); donc $(1 + b)$ sin. $(a - x')$ = sin. $(a - x' + r)$; et supposant que l'angle r soit fort petit ($1 + b$ sin. $(a - x')$ = sin. $(a - x') + r$ cos. $(a - x')$, (3809); divisant par sin. $(a - x')$ et mettant cotang. pour $\frac{\cos}{\sin.}$, on a $1 + b = 1 + r$ cot. $(a - x')$ et $b = r$ cot. $(a - x')$. Pour faire usage de cette formule, il faut observer que la valeur de x' est très petite en comparaison de a, sur-tout lorsque a n'approche pas beaucoup de 90°, car sin. CAI ou a : sin. CIG ou $a - x'$: : CI : CA, c'est-à-dire, dans un rapport qui differe peu de l'égalité. Si la réfraction à 60° de distance au zénit est 1′ 38″ $4 = r$, on trouve $b = r$ cot. a, ou sin. r cot. $a = 0,0002755$; Hauksbée trouvoit 0,000264 en se servant de la réfraction observée du vide dans l'air le sinus, d'incidence étant au sinus de réfraction, comme $1 + b$ est à 1; cela s'accorde assez avec les réfractions de Bradley, tandis que celles de la Caille donneroient 0,00032, qui est sensiblement trop fort; aussi est-on persuadé que les réfractions de la Caille sont un peu trop grandes (2180). On peut aussi déduire b de la valeur de m; car $b = r$ cot. a et $1 - m = n\,r$ cot. a (2213): donc $b = \frac{1-m}{n}$ et si $m = 0,9983$ (2213) et $n = 6$, on a $b = 0,000276$, ce qui ne differe pas beaucoup de ce qu'on vient de trouver par une méthode indépendante de l'hypothese de la force constante.

2217. Sous la zone torride au niveau de la mer, Bouguer a trouvé la réfraction horizontale de 27′, $= r'$ et à 83° de 5′ 30″ $= r$; par là on trouve $n = \frac{r \cot. a}{r'' - r}$ (2213) = 3,3224; $m = \cos.\, n r'$ (2210) = 0,998638 et $b = 0,00020497$; cette quantité est plus petite que dans nos climats; mais nous verrons bientôt que la raréfaction produite par la chaleur de l'air diminue les réfractions (2222).

2218. La hauteur e de l'atmosphere sensible ou réfringente se trouvera facilement par ces formules; car $m = \frac{1+b}{1+e}$ (2201); donc $e = \frac{1-m+b}{m}$, et parceque $b = \frac{1-m}{n}$ (2216), on a $c = \frac{(n+1)(1-m)}{nm}$. Cette expression fait voir que la distance au centre de la Terre change réellement plus que la vîtesse, car le changement c de la distance est au changement b de la vîtesse, comme $n + 1$ qui est environ

ron 7, est à m qui est un peu moindre que l'unité, quand on l'exprime en parties du rayon de la Terre (2219); mais on peut prendre pour le rapport de ces changemens le rapport de $n+1$ à 1. Avec les réfractions de Bradley on trouve $e = 0{,}001938$ en parties du rayon de la Terre (2701), ou 6338 toises. Avec celles de Bouguer, on a 0,0015691, ce qui fait 5130 toises; Bouguer trouvoit 5158 toises, fondé en partie sur les réfractions horizontales observées à différentes hauteurs, et en partie sur une hypothese qui revenoit à-peu-près à la force constante que nous employons actuellement.

2219. On peut trouver par ces formules la réfraction pour un lieu situé à une élévation quelconque, et pour des objets situés même au-dessous de l'horizon, pourvu qu'on ait déterminé m et n pour le lieu proposé. La valeur de n est la même à quelle hauteur que l'on soit; car c'est le nombre 6 par lequel se multiplie la réfraction pour corriger la distance au zénit (2210); or cette loi, qui vient de la nature de la réfraction, est la même dans toute la hauteur de l'atmosphere, puisque la force est constante. Pour trouver la valeur de m qui dépend de la hauteur de l'atmosphere, on prendra la valeur de $e = \frac{(n+1)(1-m)}{nm}$ (2217), donc $m = \frac{n+1}{n+1+en} = 1 - \frac{en}{n+1}$, en faisant la division suivant les regles ordinaires, et négligeant en dans le dénominateur, à cause de la petitesse de la hauteur e de l'atmosphere.

Par exemple, les observations de Bouguer, dans la zone torride, donnent $n = 6{,}645$, et la hauteur totale de l'atmosphere 5130 toises; ainsi à 2388 toises de hauteur la distance au sommet, ou la valeur de e qui est la hauteur de l'atmosphere dans ce cas-là, $= 2742 = 0{,}00083671$ en parties du rayon de l'équateur, d'où l'on conclud $m = 1 - \frac{en}{n+1} = 0{,}99927274 = \cos. nr$ (2210), dans le cas de la réfraction horizontale; on en conclud $nr = 2° \, 11' \, 7''$ et $r = 19' \, 44''$. Or cette réfraction fut observée en différens temps de $19' \, 34''$, de $19' \, 35''$ et de $20' \, 17''$, en sorte que notre regle de théorie donne une réfraction qui tombe fort bien entre celles que donne l'observation.

2220. Pour le cas où l'objet paroissoit au-dessous de l'horizon rationel de $1° \, 17'$, $a = 91° \, 17'$, supposant toujours $n = 6{,}645$, et $r = 19' \, 44''$, $nr = 2° \, 11' \, 6''$, $m = \cos. nr$, $m \sin. a = \sin. (a - nr) = \sin. 87° \, 28'$; donc $nr = 3° \, 49' \, 0''$, et divisant par n, on a $r = 34' \, 28''$: Bouguer trouvoit $34' \, 47''$ par observation. Si l'on veut avoir la réfraction pour un degré d'abaissement à Paris avec les nombres de Bradley (2211), on aura $\cos. 3° \, 18' \sin. 91° = \sin.$

86° 33′ 7″, qui differe de 91° d'une quantité dont la sixieme partie est 44′ 29″; il y a 20′ de plus que pour 1° de hauteur, ce qui fait la sixieme partie de 2°. L'augmentation de réfraction est rapide au-dessous de l'horizon, parceque l'on a la somme des deux angles, qui sont 90°, et la dépression, au lieu qu'au-dessus de l'horizon l'on n'avoit que leur différence, ce qui rend nr plus petit du double de la hauteur, en la supposant égale à la dépression. Nous parlerons bientôt de ces réfractions terrestres (2251).

2221. La réfraction horizontale à différentes hauteurs est comme la racine de la distance au sommet de l'atmosphere; car $m = \text{cos.}\ nr = 1 - \frac{en}{n+1}$ (2219), ou $\frac{en}{n+1} = 1 - \text{cos.}\ nr = \text{sin. verse}\ nr = \frac{1}{2}n^2 r^2$ (3819); donc $r^2 = \frac{2e}{n(n+1)}$; ainsi r est comme la racine de e. Pour avoir la réfraction horizontale à un degré quelconque de hauteur au-dessus du niveau de la mer, on ôte cette hauteur de celle de l'atmosphere (5129 toises pour la zone torride), et la réfraction horizontale est comme la racine du reste, qui est la hauteur restante de l'atmosphere au-dessus du lieu de l'observation.

Au reste il suffit de considérer que la réfraction est comme l'arc parcouru x, et qu'un petit arc est toujours comme la racine du sinus verse (3494). On trouvera de plus grands détails sur les réfractions dans le mémoire de Boscovich, que j'ai cité (2195).

Du changement de la réfraction produit par les variations de l'atmosphere.

2222. La densité de l'air est la cause immédiate de la réfraction; il étoit donc naturel de croire que la réfraction diminuoit lorsque la densité de l'air devenoit moindre, soit par l'expansion que produit la chaleur, soit par les causes qui en diminuent le poids: les astronomes ont en effet reconnu dans les réfractions deux sortes de variétés très sensibles, dont l'une dépend de la chaleur de l'air, et l'autre de son poids; elles sont indiquées par le thermometre (127) et par le barometre [a], instrumens que je suppose connus.

2223. Tycho-Brahé en donnant sa table des réfractions, remarqua deja qu'elles étoient sujettes à des variations (*Progymn. p.* 79, 104);

(a) Θερμὸς, *calidus*; μέτρον, *mensura*; βάρος, *pondus*. Le barometre n'est qu'un tube vide d'air, dans lequel une colonne de mercure se tient élevée par la pression de l'air d'environ 28 pouces; cette hauteur diminue quand l'air devient plus léger (2270). Bouguer l'a vu à 15 pouces 11 lignes, à une hauteur de 2484 toises (*Mém. acad.* 1753).

mais Cassini et Picard furent les premiers qui mesurerent avec quelque précision le changement et l'inégalité des réfractions. Picard reconnut par les hauteurs méridiennes du Soleil, en 1669, et par la connoissance du diametre du Soleil vers l'horizon, que les réfractions étoient plus grandes en hiver qu'en été; il vit aussi qu'elles étoient plus grandes la nuit que le jour (*Histoire célest. pag.* 19). Suivant les observations rapportées à la fin de son voyage d'Uranibourg, il trouva la réfraction horiz. de 33′ 2″ par le premier bord du Soleil, et 32′ 37″ par le second bord; en sorte que dans le petit intervalle de temps que le Soleil emploie à se lever, la réfraction diminue de 25″ par la présence du Soleil. Etant au Mont-Valérien, et ayant pointé un quart-de-cercle vers le sommet des tours de Notre-Dame de Paris, il trouva leur abaissement de 20′; mais le Soleil ne fut pas plutôt levé, que l'abaissement fut de 22′; les vapeurs s'étoient élevées par la présence du Soleil, et le milieu entre Paris et le Mont-Valérien étoit devenu plus égal, au lieu qu'avant le lever du Soleil, Paris étoit dans un air plus dense que le Mont-Valérien.

2224. Ce changement de la réfraction a été constaté de même en Amérique; Bouguer observa que les réfractions de la nuit y étoient plus grandes que celles du jour de $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$ par les variations seules du thermometre (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 105). Avant le lever du Soleil le froid est plus grand, l'atmosphere est plus condensée, au moins par sa partie inférieure; si l'atmosphere se condensoit par-tout proportionellement d'un septieme de son volume, le changement de réfraction ne seroit que de $\frac{1}{14}$, c'est-à dire, la moitié moindre, comme le démontre Bouguer; mais les variations se font principalement dans la partie inférieure, et vont en effet à un septieme, tandis qu'elles sont insensibles dans la partie supérieure de l'atmosphere (2254).

2225. Halley remarqua, à l'occasion des hauteurs méridiennes de Sirius, observées à Paris en 1714 et 1715, qu'il devoit y avoir un quatorzieme ou 8″ de différence en divers temps de l'année sur la réfraction qui convient à cette hauteur (*Phil. trans. n°.* 364). En effet, la hauteur du barometre qui marque la pesanteur de l'air, varie d'environ deux pouces sur vingt-huit, ou d'un quatorzieme; les réfractions sont proportionelles à la densité de l'air, tant que sa nature reste la même, suivant les expériences de Hauksbée, faites sur un air condensé au double et au triple. Ainsi les réfractions doivent changer aussi d'un quatorzieme; et puisqu'à la hauteur de Sirius, qui est de 25°, la réfraction est, suivant Halley, de 1′ 55″,

il doit y avoir des différences de 8″ suivant les temps ou suivant les différentes pesanteurs de l'air : nous en parlerons ci-après (2237).

2226. M. le Monnier, en 1738, 1739 et 1740, fit un grand nombre d'observations sur les réfractions des étoiles circompolaires ; elles sont rapportées au commencement de l'Histoire céleste, qu'il a publiée en 1741. Il employa, pour observer la réfraction, les étoiles qui passent aux environs du zénit de Paris, telles que la Chevre, la Claire de Persée, et la derniere de la grande Ourse ; il déterminoit leur distance au zénit avec le grand secteur de 9 pieds, qui avoit servi en Laponie pour la figure de la Terre (2380), et il observoit ensuite leur hauteur sous le pole avec un quart-de-cercle de trois pieds de rayon. Ainsi, le 24 Septembre 1738, la Chevre, observée à 48° 51′ de latitude, parut à 3° 9′ 24″ $\frac{1}{2}$ du zénit, l'observation étant réduite au premier juillet 1738 ; la vraie distance de la Chevre au pole étoit donc de 44° 18′ 24″ $\frac{1}{2}$, et sa hauteur inférieure devoit être de 4° 32′ 35″ $\frac{1}{2}$; mais le 14 juillet cette hauteur méridienne parut de 4° 42′ 23″ ; ainsi la réfraction étoit de 9′ 47″ $\frac{1}{2}$ à cette hauteur, tandis que, suivant la table de Cassini, elle devoit être de 11′ 7″ ; la réfraction étoit donc de 1′ 20″ plus petite, mais le thermometre avoit monté à 23° vers les trois heures, et il étoit encore sur les neuf heures du soir à 18°. Le 5 août on la trouva de 9′ 20″ seulement, le barometre étoit à 27 $\frac{1}{2}$ pouces.

Le 4 février 1739, au matin, le thermometre étant à 5°, la réfraction étoit de 10′ 31″, plus grande de 71″ qu'elle n'avoit été le 5 août 1738. Enfin en 1740, M. le Monnier établit la réfraction dans le plus grand froid à Paris, lorsque le thermometre est à 10° au-dessous de la congélation, de 11′ 15″ à 4° 44′ $\frac{1}{4}$ de hauteur apparente, tandis qu'elle a été observée de 9′ 20″ à 24° au-dessus de la congélation ; la différence est à raison de 2′ pour 36° du thermometre. Le barometre étoit à 28 pouces.

2227. Les changemens de la réfraction horizontale pourroient se reconnoître par la seule observation des amplitudes ; M. le Monnier remarque (*Mém.* 1766) que si d'un endroit élevé on observe les points du lever et du coucher de la Lyre, le changement dans la réfraction horizontale en produit un très grand [a] dans la distance apparente des verticaux du lever et du coucher ; ce seroit peut-être un moyen d'observer les variations relatives au thermometre et au barometre avec assez de précision. Mais il y a trop peu de beaux jours à Paris pour qu'on y puisse espérer beaucoup de cette méthode.

(a) M. le Monnier dit 29′ ; mais M. Cagnoli ne trouve que 8′ (*Trig. p.* 372).

2228. De ces différences de réfraction en différentes saisons de l'année, on est porté à conclure que les différens climats de la Terre doivent aussi éprouver des réfractions différentes; on avoit cru que dans le nord les réfractions augmentoient considérablement; elles alloient jusqu'à un degré par les observations de Bilberg et de Spole, mathématiciens Suédois (*Mém. acad.* 1700), et encore plus dans les observations de 1597 à la nouvelle Zemble.

L'examen des réfractions dans le nord étoit un des objets que se proposerent les académiciens qui allerent en Suede en 1736, et voici ce que M. le Monnier en rapporte.

2229. Le 5 janvier 1737, à Torneo, le thermometre marquoit 31° au-dessous de la glace à 11h du matin, un peu avant le lever du Soleil; le même jour la réfraction fut déterminée par l'observation du Soleil à midi de 20′ 3″ à la hauteur de 2° 9′ $\frac{1}{3}$, ce qui étoit conforme à la table de Cassini.

Le 7, la réfraction fut trouvée d'une minute plus grande que suivant la table, ou de 20′ 10″ à la hauteur de 2° 24′ $\frac{1}{2}$; mais quelquefois on la trouva d'une minute plus petite, sur-tout quand le thermometre étoit aux environs de la congélation; enfin *l'on fut obligé de conclure que les réfractions étoient les mêmes au cercle polaire qu'à Paris*, parcequ'elles furent trouvées assez souvent d'accord avec la table de Cassini, principalement dans les plus grands froids (*Hist. célest. pag.* XII). Il est vrai que c'étoit dans un temps où le Soleil paroissoit sur l'horizon.

2230. En 1773, dans le voyage de Phips, on a trouvé les réfractions à 80° de latitude les mêmes qu'en Europe; mais c'étoit encore en été (page 141 de l'édition françoise 1775, *in*-4°). Cependant en hiver la réfraction, même à Paris, augmente de 12 à 13 minutes, à 10° de froid suivant de nouveaux calculs faits par M. le Monnier (*Mém. de l'acad.* 1780, *pag.* 91; *Mémoires concernant diverses questions d'astronomie, par M. le Monnier,* 1781, *in*-4°).

2231. Quoi qu'il en soit, quand le Soleil a été trois mois sous l'horizon, comme les Hollandois Heemskerke, Barensz et Gerard de Veer l'observèrent à la nouvelle Zemble, depuis le 4 novembre jusqu'au 24 janvier 1597, par 76° de latitude, le froid devient terrible, et peut-être alors les réfractions augmentent beaucoup. M. le Monnier assure qu'il a reconnu par le Journal des observations imprimées en 1599, que le 24 et le 27 janvier 1597, il y avoit plus de quatre degrés et demi de réfraction, et que l'on a eu tort de vouloir expliquer ces observations, les révoquer en doute, ou y soupçonner de l'erreur, comme l'ont fait la plupart des astronomes, Képler, Cassini, et M. le

Gentil, *Voyage dans les Mers de l'Inde, tom. I, pag.* 395, *t. II, pag.* 832. Celui-ci a continué de soutenir qu'il y avoit erreur dans les observations. S'il n'étoit pas si difficile d'hiverner à de pareilles latitudes, on pourroit espérer des observations capables de lever ce doute. Mais en lisant la fameuse relation de ce terrible voyage (*Histoire des voyages, tom.* 57), on n'est pas tenté d'en concevoir l'espérance.

2232. La Caille étant au Cap de Bonne Espérance, se proposa aussi d'examiner si les réfractions y étoient les mêmes qu'à Paris; pour cela, il choisit deux étoiles telles que γ du Sagittaire, et β du Cocher; la premiere passe à 4° du zénit du Cap et à 79° de celui de Paris; la seconde passe à 4° du zénit de Paris, et à 79° de celui du Cap; si la distance de ces deux étoiles ne paroît pas la même au Cap et à Paris, c'est-à-dire, si la réfraction accourcit plus leur distance à Paris qu'au Cap, c'est une preuve que la réfraction est plus forte à Paris; la Caille trouva en effet 7″ sur 5′ 12″, c'est-à-dire, un 44ᵉ de plus à Paris. Ayant formé ainsi 47 comparaisons par différentes etoiles prises deux à deux, il n'y en eut que 7 qui indiquerent une réfraction plus petite à Paris, toutes les autres la donnerent plus grande; il y en eut qui donnerent jusqu'à un seizieme de plus, mais la quantité moyenne étoit un quarantieme (*Mém. acad.* 1755).

2233. Cette différence parut à l'auteur assez petite pour lui faire tirer cette conclusion définitive, « que l'on peut, sans craindre des » erreurs sensibles, se servir dans toute l'étendue des zones tem» pérées d'une même table de réfractions, quand même un obser» vateur la trouveroit un peu en défaut par des observations faites » près de son horizon, parcequ'on doit attribuer l'erreur apparente » à la réfraction terrestre et aux autres circonstances locales » (2254).

2234. Pour déterminer les réfractions dans la zone torride, Bouguer fit au Pérou différentes observations dont on trouve le résultat dans les mémoires de 1739; il descendit encore en 1740, dans une isle de la riviere des Emeraudes, nommée alors l'isle de l'Inca, et qui a été appellée depuis ce temps-là l'isle de l'Observatoire; il y détermina les réfractions depuis 1° jusqu'à 7° de hauteur: la table qu'il dressa fait voir que les réfractions y sont plus petites environ d'une septieme partie qu'elles ne sont en Europe; cette table est dans les mémoires de 1739; la réfraction y est de 27′ à l'horizon, à 6° de hauteur elle est de 7′ 4″, et à 45° de 44″. M. le Gentil les a trouvé plus grandes à Pondichery que M. Bouguer au Pérou, quoique dans la zone torride (*Mém. acad.* 1774, *Voyage, tom. I, pag.* 447), cela peut tenir à la nature de l'air. Bouguer a donné ensuite une

table de réfractions pour Quito, qui est de 1479 toises au-dessus du niveau de la mer (*Mém. acad.* 1739 et 1749).

2235. Kepler étoit persuadé que sur des lieux élevés les réfractions devoient être plus grandes, parceque les rayons incidens différent plus de la perpendiculaire à la surface à mesure qu'on s'éloigne du centre; Romer le croyoit aussi (*Horrebow atrium astron. pag. 6 et* 83), et on le pensoit assez généralement avant le voyage du Pérou. Pour décider cette question, Bouguer observa au mois de décembre 1738 la réfraction horizontale à Chimboraço, 2388 toises au-dessus du niveau de la mer; il ne la trouva que de 19′ $\frac{3}{4}$ (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 79 *et* 82); à la croix de Pitchincha, qui est à 2044 toises, il trouva 20′ 48″; à Quito, 22′ 50″; enfin au niveau de la mer, 27′. Ces observations, jointes à la théorie (2219), lui firent établir cette regle générale (2221), que les réfractions y sont comme les racines des distances à 5158 toises, hauteur au-dessus de laquelle la matiere réfractive ne produit plus d'effet sensible, du moins dans la zone torride.

2236. Ayant reconnu que les réfractions étoient plus petites le jour que la nuit, plus petites l'été que l'hiver, et plus petites dans la zone torride que dans les zones tempérées, il étoit naturel de chercher combien, dans le même pays, il devoit y avoir de différence lorsque l'air y étoit plus ou moins dense, plus ou moins pesant; la hauteur du barometre change à Paris depuis 26 pouces 3 lignes jusqu'à 28 pouces 9 lignes, quoique ces extrêmes soient très rares; le poids de l'air varie donc d'un douzieme, et la réfraction, toutes choses égales, doit changer dans la même proportion (2225).

2237. Si l'on établit les réfractions moyennes pour 28 pouces, on devra les trouver plus petites d'une 28ᵉ partie quand le mercure descendra d'un pouce, c'est-à-dire, quand le poids de l'air aura diminué d'un 28ᵉ; sur le sommet de Pitchincha, le mercure n'étoit qu'à 15 pouses 11 lignes, aussi la réfraction y étoit-elle très-petite. Il en sera de même de tous les autres cas: la variation de la réfraction sera toujours à la réfraction moyenne, comme le changement du barometre est à sa hauteur moyenne 28 pouces (2225).

2238. Cette regle, adoptée d'abord par Halley (2225), confirmée ensuite par Euler dans les calculs qu'il a donnés sur le changement des réfractions (*Mém. de Berlin* 1754), a été suivie par Mayer et par la Caille; les observations du barometre que de l'Isle faisoit chaque jour à Paris pendant plusieurs années, ont servi à réduire les réfractions observées par la Caille à leur quantité moyenne,

paroissoient toujours plus petites dans les temps froids ; mais avec les corrections, il trouva que sur les 243 comparaisons il n'y en avoit que 7 qui donnassent 10″ de plus que 84° 46′ 42″, distance vraie des paralleles, et 3 qui donnassent 10″ de moins : il y avoit 198 résultats qui ne s'en écartoient pas de plus de 6″, ou 119 qui s'accordoient à 2″ près.

2241. M. Maskelyne a donné une autre table d'après une regle de Bradley ; elle suppose que les réfractions moyennes sont pour 29,6 pouces anglois du barometre, et 50 degrés du thermometre de Fahrenheit ; et comme le volume de l'air est supposé de 400 parties, dont chacune répond à un degré de ce thermometre, la réfraction est en raison inverse de la hauteur du thermometre, augmentée de 350, au nombre 400, en même temps qu'elle est en raison directe de la hauteur du barometre à celle de 29,6. (*Préface des observ. de* 1765. *Philos. trans.* 1764, 1787, *pag.* 157. *Table réquisite* 1766). Les 50° de Fahrenheit font 8° du thermometre françois, et les 29,6 pouces font 27 pouces 9,3 lignes de France. Pour réduire la table de Bradley à 10° de notre thermometre et à 28 pouces de notre barometre, il falloit diminuer les réfractions de la table de 0,0031 ; c'étoit environ 6″ à ôter de la réfraction horizontale : c'est ce que j'ai fait dans la table qui est jointe à cet ouvrage. De là il suit que le degré du thermometre anglois plus 350, est à la hauteur du barometre en dixiemes de pouces anglois, comme 77 sont à la réfraction actuelle de 45 degrés, d'où l'on peut conclure toutes les autres (2206). Le nombre 77 est celui qui est à 57″ réfraction moyenne à 45°, comme 400 est à 296, en sorte que dans la proportion que nous venons d'indiquer, si, au lieu des deux premiers termes 400 et 296, on met les nombres du thermometre, augmentés de 350, et du barometre en dixiemes de pouces, le quatrieme terme augmentera en raison directe du second et en raison inverse du premier.

M. Bonne, qui avoit dressé une nouvelle table de réfractions, voulut déterminer en 1758, par de nouvelles expériences, le rapport des densités de l'air à divers degrés de chaleur ; il faisoit soutenir une goutte de mercure par un thermometre d'air, mis à la glace et à l'eau bouillante, et ayant bien mesuré la capacité de la boule et du tube, il trouva que le rapport des volumes de l'air étoit de 173 à 253 ; la différence étant 80 pour les 80 degrés du thermometre, c'est le résultat de neuf expériences faites en différens temps et avec des verres différens.

De là il suit que le volume de l'air à la congélation étant pris pour unité, le volume à la température de 10 degrés est 1,058 ; suivant

Fahrenheit, on a aussi 1,058; suivant Mayer, 1,046; suivant Bradley, 1,055; suivant la regle de M. de Luc, pour corriger les hauteurs du barometre, 1,047; suivant celle de M. Shuckburgh, 1,050; suivant la Caille, en réduisant son thermometre d'esprit-de-vin à celui de mercure, 1,050.

2242. Le volume de l'air au tempéré étant donc supposé de 183 parties, il augmente d'une partie pour chaque degré du thermometre, et quand on veut avoir le volume qui répond à la chaleur actuelle, on ajoute à 183 autant d'unités qu'il y a de degrés au-dessus de la température de 10 degrés, ou bien l'on en ôte autant d'unités qu'il y a de degrés au-dessous de la même température; par exemple, pour 30° du thermometre on ajoutera 20, et l'on aura 203, volume répondant à la chaleur actuelle de 30°; pour 8° au-dessous de la congélation, on ôtera 18, et l'on aura 165. Ainsi la densité de l'air pour 30° et 27 pouces ou 324 lignes du barometre, sera $= \frac{183}{203} \times \frac{324}{336}$ $= 0{,}887$; tel est le fondement de la table que j'ai adoptée, et qui contient les nombres par lesquels il faut multiplier les réfractions moyennes, lorsque le thermometre et le barometre different de l'état moyen.

Effet de la réfraction sur la hauteur du pole à Paris.

2243. Le petit degré d'incertitude que l'on a aujourd'hui sur la hauteur du pole à Paris, vient de l'incertitude de la réfraction à 49° de hauteur; c'est donc ici le lieu de parler de cette hauteur du pole et de la réfraction qui y convient. La latitude du milieu de Paris, qui est, vers l'église de Notre-Dame, de 48° 51′ 22″, étoit marquée de 48° 30′ dans la géographie de Ptolemée (*II.* 8), de 48° 38′ dans Fernel, en 1528; de 48° 40′ dans Oroncé Finé, qui écrivoit sa Gnomonique en 1532; elle est de même dans Mersenne, Bourdin, Alleaume; 48° 39′ dans Kepler, 1627; et cela venoit de ce qu'on supposoit l'obliquité de l'écliptique trop grande; de 48° 55′ dans la Cosmographie d'Henrion, *pag.* 325; c'étoit en 1614; Roberval la supposoit de 48° 54′, *ib. pag.* 328. On trouve 48° 49′ dans Viete (*Responsorum*, *liv. II.*); 48° 50′ dans le Comte de Pagan, Morin et Duret; 48° 52′ dans Midorge et Gassendi, en 1625; 48° 51′ dans Boulliaud, 1645. Petit, intendant des fortifications, la trouva en 1652, par les hauteurs méridiennes du Soleil, de 48° 53′ 10″, et en 1654 de 48° 52′ 41″. Picard Roberval et Buot (2310), en 1667, 48° 53′ au jardin de la bibliotheque du Roi, qui étoit au coin de la rue Vivienne et de la rue Neuve-des-petits-champs, vis-à-vis

de la Bourse; cela feroit pour l'Observatoire royal 48° 51' 15", ou une minute de trop, mais c'étoit la hauteur apparente; on ne tenoit pas compte de la réfraction, quoique Cassini en eût parlé. Ce ne fut qu'à l'époque de l'application des lunettes aux quarts-de-cercles, qu'on eut de la précision et de la certitude sur cet article fondamental de l'astronomie, c'est-à-dire, vers la fin de l'été 1667. Nous ne savons pas d'ailleurs à quel endroit de Paris on avoit fait les observations plus anciennes, et depuis la porte Montmartre, vers laquelle Picard observoit en 1666, jusqu'à l'Observatoire royal, il y a plus de 2 minutes de différence en latitude.

La hauteur du pole est constante, c'est une chose actuellement reçue de tous les astronomes. Dominique Maria, dont Copernic étoit éleve, avoit eu des doutes là-dessus. *Voyez* Cassini, *mém.* 1693, *pag.* 113; Petit, dans sa dissertation sur la latitude de Paris, Hooke, Hévélius, *Prod. astr. pag.* 5. Manfredi avoit cru reconnoître une variation dans celle de Bologne, par la comparaison des solstices d'hiver et d'été, observés à la méridienne de S. Petrone depuis 80 ans (*De gnomone Bonon.* 1736, *cap.* 16); mais on est persuadé qu'il faut attribuer à des circonstances locales les différences qu'il a trouvées.

2244. Nous avons dit que la hauteur apparente du pole fut observée en 1667 de 48° 51' 15"; Picard trouva ensuite 48° 51' 10"; si l'on ôte 50" de réfraction, l'on aura pour la hauteur vraie 48° 50' 20" par les observations de 1667. Dans le Traité de la figure de la Terre, *pag.* 287, Cassini suppose 48° 50' 18".

La Hire observa dans la suite la hauteur apparente 48° 51' 2", et comme il faisoit la réfraction trop grande et la parallaxe du Soleil trop petite, il jugeoit la vraie hauteur 48° 49' 58"; il auroit dû trouver 48° 50' 12", en employant 50" de réfraction. M. le Monnier a fait voir que le quart-de-cercle de 32 pouces de rayon, dont Picard et la Hire se servirent, n'étoit pas aussi exact que ces astronomes le croyoient, et qu'il ne falloit pas compter sur cette détermination, à quelques secondes près (*Hist. cél. pag.* xix).

Le chevalier de Louville trouvoit la hauteur apparente du pole à l'Observatoire de 48° 50' 58", il en ôtoit 50" pour la réfraction, ce qui donne la hauteur vraie 48° 50' 8" (*Mém.* 1721).

M. Maraldi (*Mém. acad.* 1733), trouva en employant un quart-de-cercle de 2½ pieds 48° 50' 12"; il supposoit la réfraction de 58".

M. le Monnier, par des observations de l'étoile polaire, faites en 1738, trouva la hauteur apparente 48° 51' 4", il en conclut la hauteur vraie 48° 50' 14" (*Mém. acad.* 1739). Par d'autres observations

faites en 1740, il jugea la hauteur apparente du pole à l'Observatoire royal 48° 51' 9", et la hauteur vraie 48° 50' 15", la réfraction étant de 54" lorsque le thermometre étoit à 3° au-dessous de la congélation (*Hist. célest. pag.* XXXVII). En 1783 il suppose 17" ½.

Cassini de Thury, au moyen d'un quart-de-cercle de 6 pieds de rayon, qui venoit d'être construit pour l'Observatoire, trouva en 1742, 48° 50' 12" et 48° 50' 9", en employant les deux lunettes différentes, et en supposant la réfraction de 52" à la hauteur du pole (*Mém.* 1744).

2245. L'abbé de la Caille, après un nouveau travail sur les réfractions, fait avec deux secteurs différens de 6 pieds de rayons, vérifiés avec soin, a jugé par un très grand nombre d'observations, que la réfraction à la hauteur du pole de Paris, étoit de 58"2, et la vraie hauteur du pole à l'Observatoire royal de Paris 48° 50' 14" (*Mém. acad.* 1755).

Ainsi la Caille, quoique avec une réfraction plus grande de 6" que Cassini ne la supposoit, (ce qui devoit diminuer la hauteur du pole), a trouvé cependant encore 4" de plus ; il y a donc 10" de différence entre ces observations, à raison des divisions des instrumens, ou des erreurs de vérification ; ces différences sont assez petites pour prouver que la hauteur du pole ne varie point dans un même lieu ; c'est-à-dire, que le mouvement diurne de la Terre se fait toujours sensiblement sur le même axe, et autour des mêmes points.

2246. Le milieu entre toutes les hauteurs apparentes que j'ai rapportées, est 48° 51' 5", et si l'on suppose 50" de réfraction, l'on aura pour la hauteur vraie 48° 50' 15". M. Cagnoli par 40 observations de trois ou quatre étoiles faites en 1783, avec un excellent quart-de-cercle, à trouvé seulement 14"; mais Boscovich trouvoit 16" par le moyen de plusieurs étoiles circompolaires observées par M. Cagnoli, et qui lui donnoient la hauteur du pole et les réfractions tout-à-la-fois (*Oper. tom. II, pag.* 459). M. Maskelyne trouve 14"; car la hauteur du pole de Greenvich ayant été déterminée par beaucoup d'observations et d'excellens instrumens de 51° 28' 40", et la différence de Paris à Greenvich, étant de 2° 38' 26", par les distances au zénit de β et γ du Dragon, observées par Bradley et la Caille, la latitude de Paris doit être 48° 50' 14" (*Philos. Trans.* 1787, *pag.* 170); c'est ce que trouvoit la Caille par ses seules observations, et c'est aussi la quantité dont j'ai coutume de me servir.

Autres effets de la Réfraction.

2247. Les diametres du Soleil et de la Lune sont diminués de haut en bas par la réfraction. Supposons que le bord inférieur de la Lune paroisse à l'horizon, et que la grandeur apparente du diametre soit de 30'; la réfraction étant plus petite d'environ 4' 38" à 30' de hauteur apparente qu'elle n'est à l'horizon, le bord supérieur de la Lune étant moins élevé par la réfraction que le bord inférieur, le diametre vertical paroîtra plus court de 4' 38" que le diametre horizontal; voilà pourquoi le Soleil paroît ovale quand il se leve ou qu'il se couche; et cela est sensible même à 10° de hauteur (*Mém. acad.* 1733).

Cet effet des réfractions ne fut pas inconnu aux anciens : Diodore de Sicile parle avec étonnement d'un pays du nord où le Soleil ne paroît point rond (*liv. III*, *ch.* 19); on croit que ce fait étoit emprunté d'Agatharchides.

Cet accourcissement du diametre vertical a lieu proportionellement sur tous les diametres inclinés du Soleil et de la Lune; or les astronomes faisant un usage continuel de ces diametres observés dans tous les sens, il est important d'en tenir compte dans le calcul; j'en ai donné une table T. xcIII.

2248. Pour en exposer la construction, je suppose d'abord que la figure du disque solaire est sensiblement elliptique par l'effet de la réfraction; cela est vrai, sur-tout au-delà de 3 ou 4° de hauteur; car la réfraction croissant uniformément, l'accourcissement qu'elle cause est proportionel à la quantité des cordes verticales du disque solaire qui sont affectées de la réfraction ; c'est-à-dire, qu'une corde de 15' est accourcie moitié moins que celle de 30'; or quand on diminue proportionellement toutes les ordonnées d'un cercle, on a celles d'une ellipse (3387).

Dans une ellipse qui est peu excentrique, les diminutions des rayons, en s'éloignant du grand axe, sont sensiblement comme les carrés des sinus des distances au sommet (2693); ainsi quand on a observé un diametre incliné, par exemple, le diametre de la Lune dans le sens des cornes, l'accourcissement diminue comme le carré du cosinus de l'angle que fait la ligne des cornes avec la verticale.

Par exemple, la Lune en quadrature ayant été observée avec un micrometre, on a trouvé son diametre de 33' 10" dans la direction de la ligne des cornes, et l'on a estimé que cette ligne faisoit avec la ligne horizontale un angle de 30°, la Lune ayant 20° de hauteur; dans la table XCIII au-dessous de 20°, et vis-à-vis de 30°, on trouve

1″1 ; mais comme le diametre est de 33′ au lieu de 30′ que suppose la table, il faut augmenter cette correction proportionellement, ou de 0″1, et l'on aura 1″2, pour l'accourcissement cherché. La table a été calculée par M. de Lambre, en supposant le disque elliptique, et la derniere ligne donne la différence du grand axe au petit axe. Il s'est servi de la formule de Bradley pour les réfractions, en la différentiant à la maniere de M. Cagnoli (4049).

Si l'on vouloit avoir cet accourcissement pour le cas où la hauteur de la Lune est moindre que 2°, il faudroit calculer rigoureusement la réfraction; mais il est bien rare qu'on en ait besoin; voyez cependant M. du Séjour, *Traité analyt. tom. I, pag.* 243.

2249. On doit corriger de la même maniere les distances mesurées sur le disque du Soleil entre son bord et une tache ou une planete, telle que Mercure et Vénus, de même que la distance des cornes d'une éclipse, et la partie du Soleil qui n'est pas éclipsée; la correction est alors proportionelle à la distance mesurée; la table ne donne sa valeur que pour une distance égale au diametre dans le sens où l'on a mesuré. Les différences d'ascension droite et de déclinaison doivent être corrigées par la réfraction (2544).

Enfin les distances observées entre deux astres doivent être dégagées de l'effet des réfractions, sur-tout pour trouver les longitudes en mer (4183).

2250. C'est aussi par l'effet des réfractions qu'il arrive qu'on a vu la Lune éclipsée, tandis que le Soleil étoit encore sur l'horizon; Pline en parle (II, 13), aussi bien que Cléomedes (II, 6); celui-ci regardoit la chose comme impossible; mais nous l'avons vu arriver à Paris le 19 juillet 1750 : le Soleil et la Lune, quoique réellement opposés, paroissoient rapprochés d'un degré par l'effet des deux réfractions, qui élevoient l'un et l'autre.

Des Réfractions terrestres, et des accidens de Réfraction.

2251. Les réfractions terrestres sont celles qui affectent les situations des objets terrestres, ou qui ont lieu entre deux points de la Terre, dont l'un paroît à l'autre sur un rayon qui ne va pas en ligne droite; si l'on suppose l'observateur en M (fig. 141), mesurant la hauteur d'une montagne en L, le rayon LGM en s'approchant de la Terre en G, passe dans un air plus dense, et s'en éloignant en M il revient dans une couche plus rare; ainsi il prend une double courbure, ce qui fait paroître l'objet L hors de sa véritable place, et sur un rayon MF.

La réfraction terrestre se joint quelquefois à la réfraction astronomique, parcequ'il y a des cas où l'observateur étant fort élevé, voit les astres au-dessous de la ligne horizontale : la différence peut devenir extrêmement considérable. Bouguer étant à Chimboraço 2388 toises au-dessus du niveau de la mer, et observant le Soleil à l'horizon lorsqu'il se couchoit, la réfraction horizontale étoit de 19′ 45″; mais le Soleil étant parvenu à 1° de dépression apparente, la réfraction étoit déja de 30′, et elle étoit 34′ 47″ à 1° 17′ de dépression apparente (*Mém.* 1749); on en a vu le calcul (2220).

2252. Si MH est la ligne du niveau apparent ou de l'horizon rationel et astronomique; S le Soleil, dont le rayon SRLM se courbe en entrant dans l'atmosphere en R, et arrive à l'œil M, en se confondant avec la tangente FM; la dépression apparente du Soleil est l'angle HMF; la partie la plus basse MGL du rayon solaire est égale de part et d'autre du point G, qui est le plus près de la surface de la Terre T; l'inclinaison en L est la même qu'en M, quand le point L est aussi élevé que le point M au-dessus de la Terre. Si donc on suppose l'angle MCL de deux degrés, l'angle HML d'un degré, l'observateur en L verroit l'astre S un degré au-dessus de l'horizon, au lieu de le voir un degré au-dessous, et la courbure de la partie RL du rayon seroit la réfraction astronomique pour un degré d'élévation apparente; mais la seconde courbure de L en M est plus considérable, c'est une double réfraction terrestre, qui ajoutée à la réfraction astronomique pour un degré de hauteur apparente, forme la réfraction pour un degré de dépression apparente; la moitié de cette réfraction terrestre est celle qu'on éprouveroit, si du point M on observoit la hauteur apparente de l'objet terrestre L, puisqu'on le verroit trop haut de la quantité FL, qui répond à l'angle FML. La double réfraction est à-peu-près la septieme partie de l'arc de la Terre compris entre M et L, ou de l'angle MCL, décrit par le rayon pendant son trajet dans l'atmosphere (2205); quelquefois Bouguer l'a supposée de $\frac{1}{5}$ (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 101); en supposant $\frac{1}{7}$, il s'ensuit que sur une distance de 950 toises ou d'une minute, cette réfraction seroit de $8''\frac{1}{2}$; ainsi l on doit retrancher de chaque hauteur observée, ou ajouter à chaque dépression la moitié de cette réfraction, ou $\frac{1}{14}$ de l'intervalle des deux stations. On peut voir sur cette matiere une petite dissertation de Mayer, intitulée : *Programma de refractionibus objectorum terrestrium, Gotting.* 1751, et l'ouvrage de Lambert (2195). Il y traite de la réfraction terrestre, des hauteurs des montagnes, mesurées par le moyen du barometre ou par des triangles, de la correction qu'il falloit faire aux différentes hauteurs

des objets terrestres que Cassini avoit déterminés dans le livre de la figure de la Terre; il prouve que chaque réfraction terrestre est $\frac{1}{14}$ de la courbure de la Terre, le rayon osculateur de la courbe de la lumiere étant 7 fois le rayon de la Terre.

2253. Boscovich observant les hauteurs des signaux dans sa mesure du degré en Italie, trouva que le signal placé au sommet de Carpegna, vu de l'extrémité occidentale de la base de Rimini, à l'embouchure de l'Ansa, étoit à 2° 7′ de hauteur, et cette extrémité, vue du signal de Carpegna, étoit à 2° 24′ 10″ de dépression; la différence est 17′ 10″, au lieu de 19′ 11″ qu'exigeoit la distance ou l'arc de la Terre, compris entre les deux stations, sans réfraction (*Voyag. astron. pag.* 157). La hauteur de chaque objet étoit augmentée de plus d'une minute par la réfraction; aussi l'auteur suppose 87° 54′ 0″ et 92° 25′ 11″ pour les distances de chacun des objets par rapport au zénit; il trouvoit en général pour chaque réfraction $\frac{1}{12}$ de l'arc compris. M. le Monnier, entre Meudon et Notre-Dame de Paris, trouva 2 ou 3″ sur 500 toises, ou environ $\frac{1}{12}$. M. Gaultier de Kerveguen et M. Junker ayant fait, en 1786, beaucoup d'observations pareilles dans les Pyrénées, assurent que quand les hauteurs apparentes sont au-dessous d'un degré, on trouve $\frac{1}{8}$, et qu'entre 2 et 3° on ne trouve que $\frac{1}{15}$ pour chaque réfraction; ainsi la partie inférieure de l'atmosphere pourroit être assez différente de la partie supérieure pour produire des inégalités sensibles; elles peuvent venir aussi des hauteurs des stations qui diminuent les réfractions absolues, du feu répandu inégalement dans l'atmosphere, et des vapeurs de l'horizon qui les augmentent. L'humidité de l'air doit aussi influer sur la quantité de ces réfractions terrestres; à en juger par les ouvrages de M. de Luc et de M. de Saussure sur l'hygrométrie, où l'on voit aussi que l'air peut contenir de l'eau en dissolution, ce qui doit changer les réfractions terrestres. Dans les mesures des triangles faites en 1787 sur les côtes de France et d'Angleterre. M. Mechain a trouvé constamment $\frac{1}{14}$, et je m'en tiendrai à cette quantité.

2254. Les changemens réguliers qui peuvent se mesurer et se prédire par le moyen du thermometre et du barometre (2242), ne sont pas les seuls qu'on apperçoive dans les réfractions; il y a des changemens irréguliers qu'on ne sauroit calculer, et qui ont lieu sur-tout vers l'horizon, parcequ'ils viennent principalement de la partie inférieure de l'atmosphere (2223). Mairan avoit déja remarqué (*Mém. acad.* 1721), que plus la couche des vapeurs denses est près de la surface de la Terre, plus les réfractions en sont augmentées;

augmentées; Bouguer a fait voir aussi (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 108) que les changemens de réfractions ne viennent pas d'un changement de l'atmosphere entiere, mais seulement de la partie la plus basse : voici comme il le prouve. Lorsqu'on est sur le sommet de Pitchincha, où le barometre n'a que 16 pouces de hauteur, la couche d'air qu'on a au-dessous de soi, ou la colonne d'air qui s'étend depuis le niveau de la mer jusqu'à la hauteur de la montagne, équivaut à 12 pouces de mercure; car les deux ensemble produisent une hauteur de 28 pouces; si toute la masse de l'air se dilatoit alors de $\frac{1}{48}$ seulement, il y auroit $\frac{1}{48}$ de la colonne inférieure qui s'éleveroit sur Pitchincha : le poids de la colonne supérieure y augmenteroit, et le barometre y monteroit de 3 lignes; car $\frac{1}{48}$ de 12 pouces fait 3 lignes : cependant l'observation a prouvé qu'il n'y a point de pareil changement du barometre sur les hautes montagnes, et que le mercure y varie à peine d'une ligne : c'est une preuve que les différences d'un sixieme observées dans la réfraction au-dessous de ces montagnes, comme à Quito, entre le jour et la nuit, ne viennent que du changement de l'air qui s'est fait au-dessous du sommet; ce changement d'une ligne dans le barometre qui a lieu sur les montagnes, ne peut produire que $\frac{1}{144}$ de différence dans la réfraction, puisqu'il ne prouve que $\frac{1}{144}$ de dilatation dans l'atmosphere (2237).

Les réfractions sont sur-tout inégales quand il vient un filet de vent froid au travers d'une masse d'air échauffé, ou quand il arrive de ces causes météorologiques qui rompent les colonnes de l'air, et font baisser le barometre quelquefois de deux pouces (*Anciens mémoires de l'académie*, *tom. II*, *pag.* 87).

2255. On apperçoit à Paris que les réfractions voisines de l'horizon sont sensiblement affectées par les vapeurs et les fumées qui s'élevent de dessus la ville, située au nord de l'Observatoire royal. Les vapeurs et l'humidité de l'air influent beaucoup sur les réfractions, de même que la situation des lieux plus ou moins élevés, le voisinage des villes, des montagnes, des forêts, des rivieres ou des plaines arides; aussi la Caille étoit persuadé qu'un astronome ne sauroit jamais avoir près de l'horizon des réfractions purement célestes, c'est-à-dire, de la nature de celles qui se font à 20° de hauteur ou au-dessus; les seules circonstances locales produisent des différences si considérables dans les réfractions horizontales, qu'il n'a pas même voulu insérer dans sa table de réfractions celles qui ont lieu au-dessous de 6°. M. de Thury croyoit que les inégalités étoient plus grandes pour les astres qui paroissent du côté du midi,

que pour ceux qui nous paroissent au nord ; à 4° de hauteur il trouvoit 20″ de plus à Paris.

A différentes heures du jour, ces effets terrestres sont différens : on voit des côtes de Gênes et de Provence les montagnes de Corse à certaines heures du jour ; mais à d'autres heures ces montagnes paroissent se plonger dans la mer, sans qu'on puisse attribuer cette différence à autre chose qu'aux réfractions terrestres (*Mém. acad.* 1722, *pag.* 348). Le P. Laval à Marseille trouvoit l'abaissement apparent de l'hôrizon, tantôt de 11′ 46″, et tantôt de 14′ 30″, tandis que l'inclinaison véritable du rayon direct qui rasoit la surface de la mer, devoit être de 13′ 14″ (*Mém. acad.* 1707, *pag.* 195). On trouve sur cette matiere des observations curieuses dans le Traité de M. de Luc, que j'ai cité (2271).

2256. On peut placer ici des faits assez singuliers, et qui ont quelque rapport avec les accidens de réfraction. Le P. Boscovich a remarqué en Italie que les vents de sud et sud-est causoient un rétrécissement sensible sur les objets dont les rayons rasoient la mer. Les pointes des isles paroissent en l'air comme suspendues au-dessus des eaux, parceque le resserrement est d'autant plus considérable, que les parties sont plus près des flots agités ; la toile de son signal de l'Ausa, qui d'en-bas ne paroissoit point, vue d'un peu plus haut, étoit étroite comme une ligne: en montant davantage on la voyoit s'élargir. *Voyage astron.*, *n°.* 174.

La Caille éprouvoit quelquefois au Cap de Bonne-Espérance des ondulations de lumiere, qui faisoient trembler les astres dans sa lunette au point de ne pouvoir pas les observer exactement : dans ces circonstances, il ne distinguoit pas même les taches de la Lune, quoique le ciel fût très serein, et le demi-diametre de la Lune, enflé par cette ondulation, paroissoit de 3 à 4″ plus grand que dans les autres temps. Nous observons en France que le vent de sud-est, lorsqu'il est un peu fort, produit quelque chose de semblable, quoique d'une maniere moins sensible qu'au Cap de Bonne-Espérance : c'est un assemblage de vapeurs étérogenes qui changent la réfraction de l'air.

2257. Les rayons en traversant obliquement l'atmosphere se dispersent, en sorte que l'intensité de la lumiere du Soleil, lorsqu'il est à l'horizon, est 1354 fois moindre que lorsqu'il est au zénit. Bouguer, *Traité d'optique sur la gradation de la lumiere*, 1760, *in-4°;* Lambert, *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae; Augustae Vindelicorum*, 1760, *in-8°.* On sent assez que les rayons qui se présentent obliquement à l'entrée de l'atmo-

sphere doivent être en effet les plus faciles à réfléchir ; chacun a éprouvé par les ricochets d'une pierre jetée sur la surface de l'eau, que plus le choc d'un corps est oblique, plus il se réfléchit aisément.

2258. Ce n'est pas tant l'atmosphere que les vapeurs dont elle est chargée qui produisent l'affoiblissement de la lumiere du Soleil. Mairan examine cette matiere fort au long dans les mémoires de 1719 et 1721; il conclud que si l'atmosphere toute pure interceptoit à midi, dans le solstice d'hiver, seulement la cinquieme partie de la lumiere qui parvient jusqu'à nous dans le solstice d'été, le Soleil nous seroit toujours caché dès qu'il approcheroit de l'horizon, à-peu-près comme il l'est dans les jours sombres, ce qui est contraire à l'expérience : il est donc certain, continue Mairan, que lorsque la lumiere du Soleil nous paroît sensiblement plus foible en hiver qu'en été, cet affoiblissement doit presque toujours être attribué aux vapeurs dont la partie inférieure de l'atmosphere est chargée, plutôt qu'à l'atmosphere proprement dite, quoique traversée beaucoup plus obliquement. Bouguer, dans son *Traité d'optique*, *pag.* 332, donne la table ci-jointe, qu'il avoit faite dès 1729, où l'on voit la force de la lumiere à différentes hauteurs, en prenant pour unité la force qu'elle auroit hors de l'atmosphere.

Degrés.	Force de la lum.	Degrés.	Force de la lum.	Degrés.	Force de la lum.
0	0,0006	12	0,3773	30	0,6613
1	0,0047	13	0,4050	35	0,6963
2	0,0192	14	0,4301	40	0,7237
3	0,0454	15	0,4535	45	0,7454
4	0,0802	16	0,4753	50	0,7624
5	0,1201	17	0,4954	55	0,7759
6	0,1616	18	0,5143	60	0,7866
7	0,2031	19 0'	0,5316	65 0'	0,7951
8	0,2423	19 16	0,5358	66 11	0,7968
9	0,2797	20	0,5474	70	0,8016
10	0,3149	25	0,6136	80	0,8098
11	0,3472			90	0,8123

2259. L'atmosphere est chargée continuellement d'exhalaisons, de vapeurs, de nuages aqueux ou de feux électriques : de là naissent une multitude de météores, et sur-tout ces feux que l'on prend quelquefois pour des étoiles tombantes, mais qui ne sont que des

exhalaisons légeres, dont la lumiere ne dure qu'un instant; quand elles sont près de nous, ce sont des globes de feu qui paroissent étonnans : tels furent ceux du 17 juillet 1771 et du 18 août 1783 (*Journ. des Sav. sept.* 1771; *Mém. de l'ac.* 1771; *Philos. Trans.* 1784).

Des Crépuscules.

2260. LE CRÉPUSCULE, ou la lumiere crépusculaire qu'on apperçoit vers l'horizon après que le Soleil est couché, de même que l'aurore qui nous annonce son lever, sont encore des effets semblables à celui de la réfraction; c'est l'atmosphere qui réfléchit et qui disperse les rayons du Soleil, en sorte qu'il en parvient jusqu'à nos yeux une partie assez forte pour éclairer l'air, et nous empêcher de distinguer les astres, quoique le Soleil soit au-dessous de l'horizon.

2261. L'ARC D'ÉMERSION d'un astre est la quantité dont le Soleil est abaissé sous l'horizon dans un vertical, lorsque l'on commence à appercevoir cet astre à la vue simple. On estime l'arc d'émersion de 5° pour Vénus, quoique dans certains temps il soit absolument nul (1197); de 10° pour Mercure et Jupiter; de 11 à 12° pour Mars, Saturne, et les étoiles de premiere grandeur (201). Cependant Sirius se voit en plein jour dans les pays méridionaux. M. de la Nux l'a vu souvent à l'isle de Bourbon. *Canopus* est une étoile aussi grande en apparence que Sirius, du moins dans une belle nuit; il y en a qui disent que sa lumiere est un peu moins blanche ou un peu plus terne, et qu'on ne la voit pas aussi facilement dans le crépuscule; d'autres la trouvent plus belle (670). L'arc d'émersion, ou l'arc de vision, est de 14° pour les étoiles de troisieme grandeur (*Riccioli Almag. nov. I*, 660); enfin il est d'environ 18° pour les plus petites étoiles, puisqu'on ne les apperçoit distinctement à la vue simple que quand le Soleil est abaissé de 18°, du moins en Europe : c'est ce qu'on appelle l'abaissement du cercle crépusculaire.

2262. Cet abaissement de 18° est ce qui doit décider de la durée du crépuscule; mais il change sans doute par diverses circonstances. Riccioli donne une table des opinions différentes qu'on a eues sur la durée des crépuscules (*Almag. nov. I*, 39).

2263. Rothman (suivant Tycho) avoit trouvé que le crépuscule ne finissoit completement que quand le Soleil étoit descendu de 24° sous l'horizon; suivant Nonius, dans son Traité des crépuscules, c'étoit 16°; suivant Cassini 15°. Riccioli trouvoit dans les équinoxes 16° le matin, 20 ½ le soir; dans le solstice d'été 21° 25′ le matin; dans le solstice d'hiver 17° 25′ le matin; il y a apparence que cela varie

suivant les temps et les lieux ; l'hiver, le crépuscule doit être plus court, parceque l'air plus condensé doit avoir moins de hauteur ; le matin il doit être aussi plus court que le soir, ou le cercle crépusculaire moins abaissé par la même raison : la Caille étant en mer l'a trouvé de 16° 38′ et de 17° 13′ (*Mém. de l'acad.* 1751, *pag.* 454) ; mais dans nos climats septentrionaux cette quantité peut être un peu plus grande, et la plupart des astronomes prennent 18° pour l'abaissement du cercle crépusculaire.

2264. La durée du crépuscule est donc le temps que le Soleil emploie à s'abaisser de 18° ; cette durée change tous les jours, car quand le Soleil décrit un parallele plus petit, ou un arc plus oblique à l'horizon, il faut qu'il parcoure un plus grand nombre de degrés de ce parallele, pour arriver à 18° d'abaissement perpendiculaire au-dessous de l'horizon. On trouve dans Clavius (*Tom. III*, *pag.* 275), une table de la durée du crépuscule depuis 35° jusqu'à 61° de latitude, et pour chaque longitude du Soleil de 3 en 3° ; on y voit que cette durée varie sous la latitude de 35° depuis 1h 28′ jusqu'à 1h 52′, et sous celle de 45° depuis 1h 42′ jusqu'à 2h 39′ ; l'inégalité est encore plus grande quand on avance vers les poles ; sous le pole boréal le crépuscule dure environ 50 jours.

2265. Le crépuscule le plus long de tous dans la sphere oblique, en supposant que le Soleil s'y couche, est toujours au solstice d'été. Au solstice d'hiver, il est encore plus long que dans l'équinoxe, soit parceque le parallele étant plus petit, il y a un plus grand nombre de degrés dans l'intervalle crépusculaire, soit parceque le Soleil n'étant pas loin du méridien, descend plus lentement. De là il sembleroit résulter que c'est dans l'équateur que le Soleil donne le plus court crépuscule ; mais un parallele, dont le 90e degré de distance au méridien est situé vers 9° au-dessous de l'horizon, donne une descente un peu plus rapide que l'équateur lui-même. Ainsi le point où la durée du crépuscule est la moindre, fait la matiere d'un problême *de maximis et minimis*, qui donna quelque peine à Jean Bernoulli, et dont la solution est rapportée dans l'*Analyse des inf. petits :* il y a d'autres solutions d'Euler, de d'Alembert, de Boscovich, (*Tom. IV*, *pag.* 388) de M. Mauduit, etc. ; mais en voici une dans laquelle M. Cagnoli a réduit la démonstration à une plus grande simplicité (*Encyclopédie méthodique*, 1786).

Soit HO l'horizon, fig. 158, n°. 3, CHZPOD le méridien, CD le cercle crépusculaire abaissé de 18°, Z le zénit, P le pole élevé, M et N les deux points par lesquels le Soleil passe le cercle crépusculaire, et l'horizon quand il se leve ; la durée du crépuscule ou de

son passage de M à N est mesurée par l'angle MPN, que nous supposons le plus petit de tous; soit TPR la durée de ce même passage pour un parallele infiniment voisin, ou, si l'on veut, pour le jour précédent ou pour le suivant : par la nature du *minimum* ces deux angles NPM TPR seront égaux; car lorsqu'une quantité est la plus petite ou la plus grande, son changement est nul (3437); ôtant de ces deux angles la partie commune NPG, on aura NPT = MPR; or NPT = dZPN, et MPR = dZPM. Dans le triangle ZPN l'on a, par les formules différentielles de la trigonométrie sphérique (4026), dZPN : dPN :: cot. ZNP : sin. PN; et dans le triangle ZPM, dZPM : dPM :: cot. ZMP : sin. PM; on suppose PN = PM, ainsi que PT = PR, puisqu'il s'agit du parallele unique dont on cherche la position; au reste le changement de déclinaison, depuis T jusqu'en R, n'est que de 1′ 42″ pour la latitude de Paris, et l'erreur sur la durée du crépuscule, calcul fait, n'est que de 8″; elle ne seroit que de 42″, même à 70° de latitude : alors on a dPN = dPM; donc ayant trois termes qui sont les mêmes dans les deux analogies, il en résulte que le 4ᵉ est aussi le même, et que ZNP = ZMP, c'est-à-dire, que l'angle du vertical et du cercle de déclinaison est constant dans le temps où le crépuscule est le plus court; c'est la premiere propriété du parallele que nous cherchons.

2266. Pour connoître la déclinaison du Soleil, qui a lieu lorsque les deux angles parallactiques sont égaux, l'on prend l'arc MQ = 90° = ZN, alors les triangles MQP, NZP sont égaux, puisqu'ils ont deux côtés égaux avec l'angle compris; donc PQ = PZ, et ZQ = 18°. Dans le triangle isoscele PQZ, si l'on abaisse un arc perpendiculaire PE, il divisera la base ZQ en deux parties égales, et dans le triangle PEM rectangle en E, l'on aura (3886) cos. PE $= \frac{\text{cos. PM}}{\text{cos. ME}} = \frac{\text{cos. PM}}{\text{sin. QE}}$. Dans le triangle rectangle PEQ l'on a aussi cos. PE $= \frac{\text{cos. PQ}}{\text{cos. QE}} = \frac{\text{cos. PZ}}{\text{cos. QE}}$; donc $\frac{\text{cos. PM}}{\text{sin. QE}} = \frac{\text{cos. PZ}}{\text{cos. QE}}$, et cos. PM = cos. PZ tang. QE, d'où l'on tire cette proportion : Le sinus total est au sinus de la latitude du lieu donné (cos. PZ), comme la tangente de 9° (tang. QE) est au sinus de la déclinaison du Soleil (ou cos. PM). Ce cosinus est négatif, et indique une déclinaison australe, parceque ME étant plus grand que 90°, tang. QE, qui en dépend, est négative.

2267. Pour trouver la durée du plus court crépuscule, on considerera qu'elle est mesurée par l'angle ZPQ = MPN; or dans le triangle ZPQ isoscele, l'on a sin. ½ ZPQ $= \frac{\text{sin. } \frac{1}{2} \text{ZQ}}{\text{sin. PZ}}$ (3874), d'où l'on

tire cette proportion : Le cosinus de la latitude du lieu (sin. PZ), est au sinus de 9° (sin. ½ZQ), comme le rayon est au sinus de la moitié de l'angle ZPQ ou NPM ; l'angle total converti en temps, donne la durée du plus court crépuscule.

2268. Par le moyen de ces deux proportions, l'on trouve que le plus court crépuscule arrive à Paris quand le Soleil a 6° 51′ de déclinaison australe, ce qui a lieu vers le 2 mars et le 10 octobre, et que sa durée est de 1h 47′. Mais le plus court crépuscule qui puisse avoir lieu sur la Terre est sous l'équateur, au temps de l'équinoxe, et il est de 1h 12′, qui répondent à 18°.

2269. La figure du crépuscule, ou la courbe qui termine la lumiere crépusculaire, est une hyperbole, qui est un peu altérée par la réfraction (*Mém.* 1713). On voit en mer dans la Zone Torride cette courbe assez bien terminée, lorsque le crépuscule est près de finir, au rapport de la Caille.

2270. LA HAUTEUR DE L'ATMOSPHERE peut se déduire de l'abaissement du cercle crépusculaire ; Képler en fit l'essai, et la Hire perfectionna cette méthode. Soit C le centre de la Terre (FIG. 158, n°. 2), ABD un arc de la circonférence de la Terre, que je suppose de 18°, pour que l'horizon DG differe de l'horizon AG de 18° ; BG la hauteur de l'atmosphere, SDG le rayon du Soleil quand il est à 18° au-dessous de l'horizon du lieu A, c'est-à-dire, à l'horizon du lieu D, qui est éloigné de A de 18°. Ce rayon DG est le premier qui commence à être réfléchi le matin par la partie la plus élevée G de l'atmosphere, ou du point G de l'horizon, vers l'œil de l'observateur A.

Dans le triangle AGC rectangle en A, on connoît l'angle ACG qui est de 9°, car AD est de 18°, le Soleil étant à l'horizon du lieu D, et le rayon de la Terre, ou CA que Képler supposoit de 904 mille d'Allemagne ; on trouvera CG de 914 milles : donc l'excès BG est de 10 milles, ou 38000 toises ; c'est la hauteur de l'atmosphere, du moins suivant cette méthode, employée à la façon de Képler. Cependant il n'estimoit cette hauteur que d'un demi-mille, ou environ 2000 toises ; il attribuoit le reste du crépuscule, soit aux différentes réflexions et réfractions des rayons au-dedans de l'atmosphere, soit à l'atmosphere du Soleil (847). Il est vrai qu'à 2000 toises de hauteur, le ciel paroît noir la nuit comme l'ébene, au rapport de M. de Saussure, ainsi le reste de la hauteur de l'air réfléchit bien peu de rayons.

La Hire ne trouve que 34585 toises au lieu de 38000, en faisant entrer dans son calcul la réfraction du rayon DG, et la différence de

hauteur entre le bord et le centre du Soleil (*Mém. acad.* 1713). Lambert trouve aussi 38000, mais en supposant 19° pour l'abaissement du cercle crépusculaire.

Mariotte, dans son Essai de la nature de l'air, en employant les expériences sur la condensation de l'air, trouve l'atmosphere encore un peu moindre que la Hire.

Si l'on supposoit que la hauteur de l'atmosphere dans les éclipses de Lune produit une ombre qui soit la 60e partie de celle de la Terre (1756), on auroit 54000 toises pour la hauteur de l'atmosphere; mais comme la pénombre et la réfraction y entrent, on ne peut pas en tirer cette conséquence.

Si l'on prend pour atmosphere la partie de l'air, où la réfraction astronomique est sensible, on ne trouve que 5158 toises de hauteur, suivant Bouguer (2218).

2271. Quand on ne prend que la hauteur où le poids de l'air est sensible, on peut supposer que le barometre soit réduit à une ligne de hauteur, et l'on trouve 25100 toises, ou 11 lieues pour la hauteur de l'atmosphere dans ce sens-là (M. de Luc, *tom. II*, *pag.* 249). Si l'on veut s'élever jusqu'au point où l'atmosphere ne supposeroit qu'un dixieme de ligne de mercure, on trouvera 35505 toises pour la hauteur de l'atmosphere. Ainsi l'air peut encore réfléchir de la lumiere à une hauteur où son poids ne peut soutenir qu'un dixieme de ligne de mercure.

En divisant la hauteur de l'atmosphere par tranches correspondantes à une ligne du barometre, celle qui n'est chargée que de l'équivalent d'une ligne, ou l'avant-derniere tranche, a 25275 pieds d'épaisseur; ce nombre divisé par la hauteur du barometre en lignes, donne au quotient le nombre de pieds dont il faut monter ou descendre pour faire changer d'une ligne la hauteur du barometre, en supposant que l'air soit à la température, ou à 10° du thermometre (1297), ce nombre est le produit de 348 lignes par l'épaisseur de la tranche inférieure, qui répond à une ligne; c'est l'épaisseur de l'avant-derniere tranche. On prendroit 27096 pieds, si le thermometre étoit à 25° (*Recherches sur les modifications de l'atmosphere* par M de Luc, 1772, *tom. II*, *pag.* 72).

Des Atmospheres des Planetes.

2272. Nous avons parlé de l'atmosphere du Soleil à l'occasion de la matiere zodiacale (847), et de celle de la Lune à l'occasion de l'inflexion (1992); nous ajouterons seulement que le P. Boscovich, dans

dans une dissertation imprimée à Rome en 1753, *de Lunae atmosphaera,* soutient que la Lune pourroit avoir une atmosphere aussi dense que de l'eau, sans qu'il fût possible de nous en appercevoir; et que cette atmosphere pourroit bien être la cause qui empêche de distinguer les montagnes sur le bord de la Lune, tandis qu'on les voit distinctement sur son disque. On peut voir aussi ce que dit le P. Frisi dans sa dissertation *de Atmosphaera cœlestium corporum,* qui remporta le prix de l'académie en 1758, et qu'il a fait imprimer à Lucques en 1759, dans le premier volume de ses dissertations. Il est difficile de dire quelque chose de certain sur cette matiere.

2273. Les passages de Vénus et de Mercure sur le Soleil devroient nous faire appercevoir les atmospheres de ces deux planetes, s'il y en avoit, comme quelques astronomes l'ont cru; cependant j'ai vu Mercure en 1753, et Vénus en 1761, sans aucune apparence d'anneau lumineux; mais je ne dois pas dissimuler que d'autres astronomes ont parlé plusieurs fois de ces anneaux; on en vit un à Montpellier dans le passage de Mercure en 1736, et l'on assure même que cet anneau continua de paroître six à sept secondes après que Mercure fut totalement sorti de dessus le disque du Soleil. M. Prosperin assure l'avoir vu dans le passage de 1786. M. de Fouchy, M. le Monnier, M. Chappe, M. Wargentin ont asssuré qu'ils avoient vu un anneau autour de Vénus (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 365), ce qui formeroit un préjugé pour le systême des atmospheres des planetes, si cet anneau ne pouvoit s'expliquer par des causes purement optiques.

2274. Cassini, en comparant entr'elles diverses observations de Mars (1717), trouva les différences très irrégulieres; il crut qu'elles pouvoient être causées par quelque réfraction extraordinaire, faite dans l'atmosphere de Mars; il trouva les mêmes irrégularités par l'observation de Cayenne; le jour de la conjonction de Mars à la moyenne ♃, l'intervalle entre cette étoile et celle qui la précede parut sensiblement augmenté; car les jours précédens la différence du passage de ces deux étoiles étoit de 2′ 8″ de temps à Cayenne, comme on l'observa toujours à Paris, et le jour de la conjonction, il parut de 2′ 14″; Cassini imaginoit que le rayon visuel qui alloit à l'étoile après la conjonction avec Mars, rencontrant obliquement son atmosphere, y pouvoit être rompu, de sorte qu'il faisoit paroître l'étoile trop orientale, en augmentant sa distance par rapport à Mars qui avoit passé à l'occident de l'étoile (*Observ. astron. pag.* 42 *et* 45).

2275. Cassini attribuoit à la même cause la trop grande vîtesse dans la séparation de Mars et de l'étoile, qu'il trouvoit par la com-

paraison des observations de Picard et de Romer. De plus la parallaxe déduite de la comparaison de la derniere observation de Picard avec celle de Richer parut insensible, tandis qu'elle paroissoit trop grande, vers le temps de la conjonction, à cause d'une trop grande vîtesse dans la séparation de Mars et de l'étoile qui suivoit : Cassini attribuoit une partie seulement de la différence à la parallaxe, et l'autre à la réfraction produite dans l'atmosphere de Mars; en rapportant ses doutes à ce sujet, il avertit les observateurs d'y prendre garde dans les occasions semblables, afin d'avoir la confirmation ou la réfutation de cette idée par des observations plus décisives.

2276. LA DIFFRACTION, ou inflexion des rayons dont parle Newton dans le 3e livre de son optique, est le changement de direction, que des rayons éprouvent en passant près d'un corps solide qui les attire par sa masse, ou les repousse par une espece de réflexion. On a essayé quelquefois d'expliquer, par cette diffraction, divers phénomenes que d'autres expliquent par les réfractions des atmospheres, ou par l'irradiation et l'aberration des rayons qui bordent les corps lumineux (1991, 2273), de même que les bandes lumineuses des ombres, observées par le P. Grimaldi, et par de l'Isle (*Mémoires pour servir à l'histoire et au progrès de l'astronomie; à Pétersbourg*, 1738, *in-4°*. M. du Tour, *Mém. présentés tom. VI*); mais tout cela ne nous donne aucune lumiere sur les atmospheres des planetes.

LIVRE TREIZIEME.

DES INSTRUMENS D'ASTRONOMIE.

Les fondemens essentiels de l'astronomie, et les calculs des principaux phénomenes ont formé la majeure partie de cet ouvrage; il est temps d'y joindre le détail de la pratique des observations; je commencerai par l'histoire et la description de nos instrumens.

2277. Le plus ancien instrument d'astronomie dont on ait fait usage, est le Gnomon (72) avec lequel on mesuroit les ombres du Soleil; nous en parlerons bientôt en détail (2285). On employa ensuite les cercles divisés en degrés (24, 278), auxquels on rapportoit les arcs des cercles célestes; le plus célebre de ces instrumens est ce qu'on appelle les *Armilles d'Alexandrie* (861), avec lesquelles Timocharès (315) observa la déclinaison de l'épi de la Vierge; elles avoient une demi-aune de diametre (*Proclus. Hyp. astr., cap. II*). Flamsteed pense que, comme l'aune des anciens pouvoit être la longueur des bras étendus, ces armilles devoient avoir trois pieds de diametre (*Flamst. proleg. Hist. cél. pag.* 19, 21, 30); il en est parlé dans l'Almageste (III. 2).

2278. Ptolemée se servit, pour déterminer la parallaxe de la Lune, d'un instrument qu'on a appellé *Triquetrum*, ou *Regles parallactiques*[a], dont le rayon étoit de 4 coudées ou de 6 pieds; il en donne la description dans son Almageste (V, 12); la figure 196 représente les 3 regles.

Sur la regle AO l'on voit à angles droits deux pinnules ou petites planchettes carrées L et O, paralleles entre elles, dont chacune a au milieu un petit trou; celui qui est du côté de l'œil est le plus petit, et celui qui est en L est assez grand pour que la Lune puisse y paroître toute entiere; la regle AO est ajustée par une charniere A sur la regle verticale AF, et elle tourne librement autour du point A. La troisieme regle GD sert à régler ou mesurer le mouvement de AO.

(a) Copernic et Tycho écrivent *parallatiques*, mais Ptolemée écrivoit ὄργανον παραλλακτικὸν, parcequ'il s'en servoit pour les parallaxes. La machine que nous décrirons ci-après (2400), est appellée parallatique, du mot *parallele*, parcequ'elle suit le parallele des astres.

Sur les lignes AG et AO sont marquées 60 parties égales qui forment le rayon, tandis que GD est la corde de l'angle GAO ou GAD, en supposant que le triangle GAD soit toujours isoscele. Le long de la regle verticale AF il y a un fil à plomb passant par deux trous B et C, qui sert à rendre la regle AF exactement perpendiculaire à l'horizon.

2279. Ptolemée décrit encore dans son Almageste (V, 1, VII, 4, VIII, 2), un autre instrument qu'il appelle *Astrolabe*[a], et qu'il employoit pour observer les distances de la Lune au Soleil. Il y avoit deux cercles exactement tournés, placés l'un dans l'autre à angles droits, l'un destiné à représenter l'écliptique, et l'autre le colure des solstices sur lequel on marquoit les poles de l'équateur; un troisieme cercle tournoit autour des poles de l'écliptique sur deux cylindres qui y étoient fixés, et servoit à marquer les longitudes; un quatrieme cercle au-dedans des trois autres portoit deux trous ou deux pinnules, qui servoient à regarder la Lune ou un autre astre, et à mesurer sa longitude et sa latitude. L'instrument de Tycho, que nous décrirons ci-après (2283), n'en différoit que par une plus grande perfection. Ptolemée nous dit qu'il ne pouvoit s'assurer de 4′ dans les angles (*pag.* 313), et de 8′ pour le temps d'une éclipse (*pag.* 112); mais il paroît que les erreurs de ses observations étoient bien plus grandes.

2280. Les Arabes ne se servirent point des armilles, mais seulement des regles parallactiques de Ptolemée; ils y ajouterent des quarts-de-cercles d'un plus grand rayon et des sextans, comme on le voit par un écrit du Docteur Bernard sur l'obliquité de l'écliptique déterminé par les Arabes (*Philos. Trans.* 1684, *n°* 163). Il raconta à Flamsteed qu'il avoit vu un écrit arabe sur la comparaison des instrumens de son temps avec ceux des anciens, pour prouver que les observations des Arabes étoient plus exactes que celles des Grecs (*Flamst. Proleg.*, *pag.* 20 *et* 26).

2281. Après les observations arabes, on trouve celles de Waltherus; il se servit d'abord des regles parallactiques et du rayon ou bâton astronomique, *baculus astronomicus*, qui étoit à-peu-près de la même nature; ensuite d'une armille, à la façon de Ptolemée. Les erreurs de ses observations alloient quelquefois à 10′. Régiomontanus, dans son livre *de Torqueto*, parle de plusieurs

(a) Ἀστρόλαβος, qui vient de ἄστρον, astre, λαβὴ, *prehensio*, *complexio*. Copernic décrit un pareil astrolabe (II, 14); mais il y a aussi un astrolabe planisphere (4061), qui servoit à prendre la hauteur, et sur-tout à résoudre des triangles; ainsi le même nom a été donné à des instrumens qui n'ont aucun rapport.

autres especes d'instrumens dont le détail seroit trop long. Le *Torquetum* avoit une table horizontale, une autre parallele à l'équateur, et une 3e dans le plan de l'écliptique, avec un cercle de latitude mobile. Le *Torquetum* d'Apian (*Astronomicum caesareum*, 1540) et de Schoner, avoit aussi un mouvement sur un axe parallele à l'axe du monde (2401); mais dans le *Torquetum* imaginé par les Arabes, peut-être même par les Chaldéens, on employoit des surfaces planes au lieu des armilles (Tycho, *Astron. instaur. Mecan, pag.* 39). Copernic n'employa pas d'autres instrumens que ceux de Ptolemée (2278); son astrolabe et son instrument parallatique sont décrits dans son livre *de Revolutionibus* (II, 14 et 15), et, de son aveu, il pouvoit y avoir 10′ d'erreur dans ses observations.

2282. Tycho-Brahé fut le premier qui fit construire des instrumens sur lesquels on distinguoit, non seulement les minutes, mais quelquefois dix secondes, comme on le voit dans l'ouvrage où il en donne la description (*Astronomiae instauratae Mecanica*); dans son *Histoire céleste;* dans celle de Flamsteed, *tom. III;* enfin dans les Mémoires de l'académie pour 1763, où l'on a donné les figures de ceux qui étoient les plus remarquables, beaucoup mieux gravées que dans le livre de Tycho.

Tycho, rendant compte dans ses Progymnasmes, des observations qu'il avoit faites pour l'établissement des principaux points de l'astronomie, donne la description des deux instrumens dont il s'étoit le plus servi, sur-tout pour mesurer les distances des étoiles entre elles et leurs différences d'ascensions droites; le premier de ces deux instrumens est un sextant dont le rayon avoit 4 coudées (ou environ 5 pieds), et il en avoit trois de la même construction (*Progymn.*, *pag.* 247, *Astronomiae instaur. Mecanica, pag.* 53).

2283. Tycho décrit aussi dans ces deux ouvrages, comme un des instrumens dont il faisoit le plus d'usage, ses armilles équatoriennes, qui ont quelque ressemblance avec l'anneau astronomique [a] et avec l'équatorial (2409); aussi appelle-t-il instrument armillaire celui dont Hipparque et Ptolemée se servoient. Les armilles de Tycho sont représentées dans la figure 195. Le cercle extérieur NZH représente le méridien, et il est supposé placé en effet dans le plan du méridien, en sorte que le point N regarde directement le midi, et que le point H soit au nord; ce cercle étoit de cuivre poli, et divisé de minute en minute; les autres cercles étoient couverts de

(a) L'anneau astronomique est composé d'un méridien et d'un équateur, avec une alidade qui sert à trouver l'heure; il est décrit dans le Traité des instrumens de mathématiques, par Bion, et dans la Gnomonique de Dom Bedos.

lames de cuivre. Autour de l'axe PA tournent les deux cercles FI et QN; le cercle FI n'est point divisé, parcequ'il ne sert qu'à soutenir et porter l'équateur NMR qui est mobile; l'axe PA est de cuivre, et porte un cylindre D au centre. Les pinnules R et N qui sont sur l'équateur sont de cuivre; elles servent à mesurer les distances des astres au méridien, ou les angles horaires, et les différences d'ascension droite. On a même cet avantage avec un équateur mobile, que lorsqu'on met un astre sur le degré d'ascension droite qui lui convient, on voit dans le méridien même l'ascension droite du milieu du ciel (1014), dont les astronomes ont souvent besoin pour en conclure l'heure qu'il est, quand on sait l'ascension droite du Soleil.

Le cercle intérieur VQC est un cercle de déclinaison ou un méridien, qui tourne autour de l'axe PA, et dont le plan est toujours perpendiculaire à celui de l'équateur NMR; on dirige ce méridien mobile vers l'astre dont on veut mesurer la déclinaison, et au moyen des pinnules mobiles Q et C, et du cylindre D, on s'aligne vers l'étoile dont la déclinaison se trouve marquée par la pinnule. Toute la machine étoit placée sur un pied de cuivre, très-solide, qu'il faut concevoir au-dessous de T.

Cet instrument est celui dont Tycho faisoit le plus d'usage; car toutes les fois qu'il avoit observé les distances des planetes aux étoiles avec le sextant, il observoit ordinairement leur déclinaison et le temps vrai avec ces armilles équatoriennes, en mesurant la distance de quelque belle étoile au méridien le long de l'équateur. On mesuroit aussi quelquefois avec d'autres instrumens la hauteur et l'azimut, pour avoir le temps vrai. Souvent Tycho, à la suite des distances d'une planete aux étoiles, donne aussi l'ascension droite de la planete conclue de sa distance au méridien par les armilles équatoriennes. La précision de ces instrumens de Tycho alloit au plus à une ou deux minutes, quoiqu'il marquât quelquefois les dixaines de secondes; on trouve même quelquefois des discordances de 3′ dans les observations d'un même jour.

2284. Les instrumens dont se servit Hévélius dans le dernier siecle étoient aussi remarquables par leur grandeur et leur exactitude; il en a décrit 12 principaux dans son Organographie (*Machina cœlestis, pars prima*); on y remarque un sextant de cuivre de plus de six pieds de rayon, avec lequel il mesura ce nombre prodigieux de distances qu'on trouve dans le second volume du même ouvrage. On peut estimer à 30″ les erreurs probables de ses observations; il semble même que Flamsteed les regarde comme n'allant pas à 15″ *Proleg. pag.* 100.

Des Gnomons ou Méridiennes.

2285. On appelle gnomon (72) une hauteur perpendiculaire, prise au-dessus d'une méridienne horizontale, et terminée en haut par un petit trou qui donne passage à l'image du Soleil. On mesure sur la méridienne la distance entre l'image lumineuse du Soleil et la verticale qui marque le pied du style; l'on a la tangente de la distance du Soleil au zénit, la hauteur du style étant prise pour le rayon.

L'observation des hauteurs méridiennes du Soleil (70), par le moyen du gnomon ou de la longueur des ombres, a dû être une des premieres méthodes employées pour mesurer l'année et le retour des saisons; cette méthode paroît avoir été fort en usage chez les Egyptiens, les Chinois, etc. *Voyez* Goguet (II, 250), l'histoire de l'astronomie Chinoise (*Tom. I, p.* 3; *Tom. II, p.* 5, 8 *et* 21). Les gnomons ont été les premiers instrumens qu'on ait employés, parceque la nature les indiquoit, pour ainsi dire, aux hommes : les montagnes, les arbres, les édifices sont autant de gnomons naturels qui ont fait naître l'idée des gnomons artificiels qu'on a employés presque partout. Tels furent probablement l'horloge d'Achaz (suivant Goguet), les gnomons des Chaldéens (237), de Pythéas à Marseille (312), et d'Eratosthene; car il paroît qu'il s'en servit pour les hauteurs du Soleil (2634).

Sous le regne d'Auguste, *Manlius* profita d'un obélisque que ce Prince avoit fait élever dans le champ de Mars, pour en faire un gnomon; Pline dit qu'il avoit 116 ¾ pieds (105 ¾ de France), et qu'il marquoit les mouvemens du Soleil (*Lib.* 36, *cap.* 9, 10 *et* 11). Cet obélisque avoit été fait par Sésostris, roi d'Egypte, qui vivoit 967 ans avant l'ere vulgaire; il se voit encore à Rome, quoique abattu et fracassé : j'en ai parlé dans mon *Voyage en Italie*, publié en 1769 et 1786, et l'on peut voir plusieurs grandes dissertations sur cette matiere dans l'ouvrage de Bandini, *dell' Obelisco di Cesare Augusto*, etc., à Rome, 1750, *in-folio*.

Co-cheou-King en fit un de 40 pieds à Pékin, vers l'an 1278 (381); Ulug Beg, vers 1430, se servit à Samarkand d'un gnomon qui avoit 165 pieds de hauteur (366). Cet usage des gnomons a été si naturel et si général, qu'on en a trouvé des vestiges jusqu'au Pérou : *Garcilaso de la Vega, commentarios reales de los Incas*, 1723, *Tom. I, lib.* 2, *cap.* 22, *pag.* 61.

Paul Toscanelli, vers 1467, pratiqua dans la fameuse coupole que

Brunellesco avoit faite à la cathédrale de Florence, un gnomon de 277 ½ pieds de hauteur; c'est le plus grand qui existe. Ximenès l'a rétabli, et en a donné une ample description : *Del vecchio e nuovo gnomone Fiorentino*, etc., 1757, *in*-4°.

Gassendi voulant observer en 1636 la hauteur solstitiale du Soleil, comme il l'avoit promis à Wendelinus, forma dans le college de l'Oratoire à Marseille, un gnomon de 51 pieds 8 pouces 4 lignes de hauteur (*Gass. op. Tom, V, pag.* 525), avec lequel il observa la hauteur solstitiale du bord supérieur du Soleil 70° 25′ 59″. Le gnomon du P. Henri à Breslaw avoit 35 pieds, comme je le trouve dans les manuscrits de M. de l'Isle.

2286. Ignace *Danti*, dominicain (423), ensuite évêque d'Alatri, construisit un gnomon de 67 pieds de haut en 1575 ou 1576, dans l'église de saint Pétrone, patron de Bologne (423); Cassini le rétablit en 1655 (Riccioli, *Alm. I*, 131), ensuite en 1695 (509), et lui donna 83 ½ pieds de hauteur; c'est la méridienne de saint Pétrone de Bologne, qui a été la plus célebre et la plus utile de toutes; on en trouve la description dans deux ouvrages, l'un de Cassini, l'autre de Manfredi, avec les observations qui y ont été faites en très grand nombre : j'en ai parlé aussi dans mon *Voyage d'Italie*. Zanotti a restauré cette méridienne en 1776, et a publié en 1779 un ouvrage à ce sujet.

Picard, en 1669, commença une méridienne dans la grande salle de l'Observatoire royal de Paris, qui a 97 ½ pieds de longueur; le gnomon a 30 ½ pieds. Cassini le fils la refit en 1730, et elle fut ornée de marbres avec des divisions et des figures pour chaque signe (*Mém. de l'acad.*, 1732).

La méridienne des chartreux de Rome, aux Thermes de Dioclétien, est la plus ornée que je connoisse; il y a deux gnomons, l'un de 62 ½ pieds de hauteur au midi, l'autre de 75 pieds du côté du nord; cet ouvrage fut construit par Bianchini en 1701. Voyez sa dissertation de *Nummo et Gnomone clementino*, à la suite de son livre *de Kalendario et Cyclo Caesaris*, *Romae*, 1703, *in-folio;* le livre publié par Manfredi à Vérone en 1737 : *Francisci Blanchini astronomicae Observationes;* et mon Voyage en Italie, *Tom. IV, pag.* 311, édition de Paris, 1786.

La méridienne de S. Sulpice de Paris fut entreprise en 1727, par Sully, horloger; M. le Monnier l'a refaite en grand avec soin et avec magnificence (*Mém. acad.* 1743); le gnomon a environ 80 pieds de hauteur; il y a un objectif de 80 pieds de foyer, et M. le Monnier s'en sert chaque année, en marquant sur un marbre la trace des bords

bords de l'image pour observer l'obliquité de l'écliptique, il en concluoit qu'elle étoit invariable; les objections que j'ai faites contre ce résultat se trouvent dans les *Mém. de l'acad.* pour 1762, *pag.* 267; et M. le Monnier lui-même est convenu ensuite que cette méridienne prouvoit une diminution dans l'obliquité de l'écliptique, *Mém.* 1774. M. de Cesaris et M. Reggio ont fait une méridienne en 1786 dans la cathédrale de Milan; le gnomon a 73 pieds de hauteur. *Eph. de Milan*, 1788. Ces sortes d'instrumens seroient encore les meilleurs de tous, si les bâtimens étoient absolument immobiles; mais on verra combien les grands édifices sont sujets à varier (2609).

Des Lunettes astronomiques.

2287. L'INVENTION des lunettes d'approche[a] devenue si utile à l'astronomie, fut faite vers l'an 1609 par hasard en Hollande; Molyneux dans sa dioptrique observe que Roger Bacon, mort en 1292, en avoit donné quelque idée; J. B. Porta, Napolitain, en avoit parlé obscurément *Magiae natur.* 1549 (Voyez *la Dioptrique* d'Huygens, Borelli *de vero Telescopii Repertore, et l'Optique de Smith, art.* 71).

Galilée, dans le *Sidereus nuncius*, publié au mois de Mars 1610, raconte qu'environ dix mois auparavant, le bruit s'étoit répandu qu'un Hollandois avoit fait une lunette, par le moyen de laquelle les objets éloignés paroissoient fort proches; on en racontoit plusieurs effets singuliers, que quelques personnes révoquoient en doute. Quelques jours après un François, mommé *Badovere*, lui ayant écrit de Paris la même chose, il se mit à en chercher la raison, et à méditer sur les moyens de faire un pareil instrument, par le moyen des loix de la réfraction; il y parvint bientôt. Il mit aux deux extrémités d'un tube de plomb, deux verres, plans d'un côté, et sphériques de l'autre, mais dont l'un avoit un côté convexe, et l'autre un côté concave; alors approchant l'œil du verre plan concave, il vit les objets trois fois plus près qu'à la vue simple; il continua à Padoue de construire des lunettes plus longues; et nous avons à l'académie l'objectif avec lequel il découvrit peu après les satellites de Jupiter (2915).

2288. Les lunettes dont se servent aujourd'hui les astronomes, sont formées de deux verres convexes, dont l'un tourné du côté de l'objet s'appelle l'*objectif*, et l'autre vers lequel on place l'œil

(a) Les lunettes à mettre sur le nez étoient connues en 1166. *Journal des Sav.* 1782, *pag.* 181, *in*-4°.

s'appelle l'*oculaire;* je supposerai comme des choses connues plusieurs propositions que l'on trouvera démontrées dans les livres d'optique [(a)] déja cités (2162); je ne rapporterai que les principes dont les astronomes ont journellement besoin.

Les rayons SA, SA (FIG. 142) qui viennent d'un point lumineux, par exemple, d'une étoile, sont paralleles entr'eux à cause de la grande distance (1726); après avoir traversé un verre convexe, ils se réunissent en un foyer F, et y forment l'image du point lumineux; c'est là que se placent les fils (2348); ces rayons, après s'être réunis au point F, s'écartent et vont tomber sur l'oculaire GG, duquel ils sortent paralleles, pour entrer dans l'œil placé en O. Un œil bien constitué, c'est-à-dire, qui n'est ni myope ni presbyte, voit distinctement un point, lorsque les rayons qui en viennent y arrivent parallelement entre eux; et il voit ce point sur l'axe optique CF ou sur la ligne qui passe par l'objet, par le centre de l'objectif, et par le point F du foyer où tous les rayons étoient rassemblés avant que d'arriver à l'oculaire.

2289. Si l'on considere deux points lumineux, par exemple, les les deux extrémités S et L d'un objet (FIG. 143), on aura deux axes optiques SAF et LAG; le point S envoie à tous les points de l'objectif une infinité de rayons paralleles entr'eux, qui vont tous se réunir en un point F pour arriver ensuite à l'œil paralleles entr'eux, et c'est ainsi que l'œil apperçoit distinctement l'image de cet objet au point F (2288); de même le point L envoie une infinité de rayons qui, couvrant la surface de l'objectif, vont ensuite se réunir au foyer G sur l'axe LAG, et font voir distinctement le point L. L'angle que les axes SAF et LAG font entr'eux après avoir traversé l'oculaire, lorsqu'ils arrivent à l'œil, est plus grand que celui des rayons directs, autant de fois que le foyer de l'objectif contient celui de l'oculaire; ainsi une lunette de 18 pieds de foyer, avec un oculaire de 2 pouces de foyer, grossit un objet 108 fois, parceque deux pouces sont contenus 108 fois dans 18 pieds: avec une semblable lunette on voit les objets sous un angle 108 fois plus grands qu'à l'œil nud, ou de la grandeur dont on les verroit s'ils étoient 108 fois plus près de nous qu'ils ne sont réellement. Pour les télescopes, voyez l'art. 2415. Pour mesurer la force amplificative d'une lunette, M. Ramsden a imaginé un petit instrument nommé *Dynametre*, dont j'ai donné

(a) Optique vient de ὄπτομαι, *video;* Catoptrique vient de κάτοπτρον, *miroir*, parceque c'est la connoissance des rayons réfléchis; Dioptrique vient de διόπτομαι, *je vois au travers*, parcequ'elle traite des réfractions; la Dioptrique s'appelle aussi *anaclastique*, du mot κλάω, *je romps*.

la description à la suite de celle de sa machine à diviser (*Paris*, 1789).

2290. La grandeur de l'image GF répond à un angle GAF égal à l'angle SAL qui mesure le diametre de l'objet; ainsi pour qu'un objet qui a 32′ de diametre puisse se voir dans une lunette, il faut que l'ouverture de l'oculaire soit assez grande pour que le demi-diametre de cette ouverture, qui doit être égal à BF, soutende un angle de 16′ au centre A de l'objectif; c'est cette ouverture de l'oculaire, ou plutôt celle du *diaphragme* (a), c'est-à-dire, du cercle de carton qu'on place au foyer F d'une lunette, qui décide seule du champ de la lunette, c'est-à-dire, de la grandeur de l'objet qu'on peut y appercevoir.

On donne 10 à 12 lignes d'ouverture au diaphragme d'une lunette de 5 pieds dont l'oculaire auroit 2 pouces de foyer: on doit consulter là-dessus l'expérience; car il est permis d'augmenter cette ouverture tant qu'on ne voit ni couleurs ni confusion sur les bords du champ de la lunette; mais plus une lunette grossit, plus le champ diminue, parcequ'un oculaire d'un court foyer ne peut pas avoir une grande ouverture: un oculaire de 2 pouces de foyer ne sauroit avoir que deux pouces d'ouverture tout au plus.

2291. L'ouverture de l'objectif ou la largeur CD qu'on y réserve pour introduire les rayons, décide seule de la quantité de lumiere qu'on aura dans la lunette, et de la clarté avec laquelle on y verra les objets; c'est là le principal avantage d'une grande lunette sur une petite; le verre CD pouvant admettre une plus grande quantité de lumiere, on peut la disperser par le moyen d'un oculaire qui grossisse beaucoup, sans qu'elle soit trop affoiblie.

Il seroit donc très utile d'augmenter cette ouverture pour augmenter la lumiere des objets; cependant on donne à peine deux pouces et demi d'ouverture à une lunette simple de 18 pieds, parceque la figure sphérique de nos verres ne réunit pas exactement les rayons en un seul point; cette aberration provenant de la sphéricité, est d'autant plus forte que l'ouverture est plus grande; les objets deviennent confus et mal terminés, quand on augmente l'ouverture assez pour rendre cette aberration sensible, et c'est là un des principaux inconvéniens des lunettes astronomiques (1395).

Dans des verres qui seroient parfaitement sphériques, l'aberration des rayons ou la confusion qui en résulte, seroit comme le cube des longueurs focales, c'est-à-dire des distances des foyers aux verres (*Opt. de Smith*). D'après cette regle, Huygens avoit donné

(a) Διὰ, *inter*, φράγμα, *vallum*, *separatio*.

une table des ouvertures qui convenoient à chaque lunette, suivant la longueur du foyer de l'objectif : voici un extrait de cette table pour des lunettes de 3, 6, 9 et 18 pieds de foyer, qui sont les longueurs les plus employées dans l'usage de l'astronomie ; ces nombres sont exprimés en pouces et en centiemes de pouces ; la derniere colonne exprime la longueur des foyers d'oculaires que Huygens assignoit pour ces différentes lunettes.

Foyer.	Ouverture.	Oculaire.
pieds.	*pouces.*	*pouces.*
3	0, 97	1, 07
6	1, 37	1, 50
9	1, 67	1, 83
18	2, 42	2, 60

Huygens en avoit fait de 120, 170, et même 210 pieds de foyer; on les conserve encore à la société royale de Londres, le dernier a 8½ pouces d'ouverture : on a éprouvé le premier en 1786, chez M. Cavendish, près de Londres, les étoiles y étoient assez mal terminées; les télescopes de 20 pieds sont préférables à ces immenses lunettes. Voici une autre table faite d'après les nombres indiqués dans l'Optique de Newton (*Liv. I, prop.* 7), pour des lunettes de différentes longueurs ; les ouvertures des objectifs et les foyers des oculaires sont exprimés en lignes et dixiemes de lignes (*Mém. ac.* 1755).

Foyer.	Ouverture.	Oculaire.
pieds.	*lignes.*	*lignes.*
3	6, 7	16, 9
6	9, 7	24, 1
9	12, 0	29, 0
18	16, 7	41, 0

2292. On ne doit consulter que l'expérience pour régler les ouvertures, les oculaires et les diaphragmes des lunettes, parceque tout cela peut varier suivant la perfection de l'objectif, et l'usage qu'on se propose d'en faire. Avec un objectif simple de 15 pieds, s'il est très bon, l'on peut employer un oculaire qui n'aura qu'un pouce et demi, pour voir un objet fort lumineux, parceque l'image étant parfaite, on peut la regarder avec une loupe qui la grossisse beaucoup, sans qu'elle paroisse obscure ni mal terminée; mais il y faudra peut-être un oculaire de 3 pouces, si l'objectif est d'une qualité médiocre, ou si l'objet a peu de lumiere.

2293. Il faudroit, quand on observe pendant le jour, employer des oculaires plus foibles ou d'un plus long foyer que la nuit, à cause de la grande lumiere des objets environnans qui frappe et éblouit les yeux, rétrécit la prunelle, et rend l'œil moins sensible aux impressions d'une lumiere trop foible. Lorsqu'on ne veut que rassembler une très grande lumiere sans s'occuper de rendre les objets bien terminés, on rend l'ouverture de l'objectif plus grande; on fait aussi le foyer de l'oculaire plus long ; c'est là tout le secret des lunettes de nuit, avec lesquelles on parvient à découvrir

des cometes dans le ciel, et des vaisseaux sur mer pendant la nuit.

2294. Deux oculaires plans convexes, qui seroient, par exemple, de 3 pouces et de 1 pouce ½ pour une lunette de 12 pieds, font souvent mieux qu'un seul oculaire : ils procurent un plus grand champ, et les astronomes trouvent de l'avantage dans cette méthode; on est même obligé d'y avoir recours lorsqu'on veut employer des oculaires d'un court foyer, et faire grossir beaucoup une lunette (2304).

2295. Les lunettes astronomiques sont composées de deux verres seulement, mais elles ont l'inconvénient de renverser les objets; les lunettes d'approche dont on se sert pour les objets terrestres sont composées de quatre verres ; mais on en a fait quelquefois, sur-tout pour la marine, qui étoient à six verres convexes; elles ont le champ plus grand d'environ une moitié que les lunettes à quatre verres, et elles sont moins sujettes aux iris. *Voyez* Euler dans sa Dioptrique en 3 vol. *in*-4°, imprimée à Pétersbourg, 1769—1771.

Dans la disposition de ces lunettes, on observe de ne pas mettre les oculaires l'un au foyer de l'autre ; on y verroit les taches et les poussieres noires qui nuisent à la netteté de l'image ; au lieu que quelques lignes d'écartement suffisent pour empêcher qu'on ne distingue ces corps étrangers sur la surface d'un oculaire.

2296. Je n'entrerai pas dans le détail de la maniere de travailler et de polir les verres avec le sable, et ensuite le tripoli ou la potée d'étain. L'on peut consulter le grand traité d'Optique de Smith (2162), Huygens, Molineux, le P. d'Orléans. Passement en a dit quelque chose dans sa *Construction d'un télescope*, imprimée en 1738, et M. l'abbé Rochon dans ses Opuscules, Brest 1768.

Des Lunettes acromatiques (a).

2297. Un des plus grands obstacles qu'on ait trouvés jusqu'ici à la perfection des lunettes, est l'inégale réfrangibilité des rayons de différentes couleurs; il n'y a presque pas de lunette ordinaire dans laquelle on ne voye sur les bords plusieurs cercles colorés ; les astres lorsqu'ils sont fort lumineux y paroissent également bordés des mêmes couleurs : cette différente réfrangibilité des rayons fait que

(a) Le nom que j'ai donné à ces lunettes vient de χρῶμα, *color*, précédé d'un α privatif, et veut dire *sans couleur*. Cependant les lunettes ainsi appellées n'ôtent pas les couleurs qui viennent des oculaires; mais elles diminuent la confusion de rayons qui [illegible] lieu au foyer des objectifs, soit par la différente réfrangibilité des rayons, soit par la sphéricité des verres. Voyez M. Boscovich, *Dissertatio I*, *pag*. 48.

le foyer des lunettes est incertain et variable; que la parallaxe optique des micrometres est sujette à changer (2599); que les objets sont mal terminés, et qu'on ne peut donner aux objectifs qu'une très petite ouverture.

Ces inconvéniens avoient fait desirer un moyen de réunir les rayons de différente espece à un même foyer, et l'on y a réussi en grande partie. Euler, en 1747, examina si l'on ne pourroit point y parvenir par un moyen que Newton avoit indiqué dans son optique pour corriger l'erreur de la sphéricité; il s'agissoit de faire des objectifs composés de deux couches de verre, et dont l'intervalle fût rempli d'eau (*Mém. de Berlin, tom. III, pag.* 274). On fit faire à Paris divers essais d'après la théorie d'Euler; mais ils n'eurent pas le succès que cet illustre auteur avoit espéré.

2298. Dollond, célebre opticien de Londres, voulut d'abord réfuter Euler qui avoit attaqué la loi de réfraction donnée par Newton dans cette théorie des couleurs; Euler lui répondit dans les mémoires de Berlin pour 1753, et Dollond ne se rendoit point; mais Klingenstierna l'ayant convaincu de l'erreur de Newton, alors Dollond chercha, en 1758, une méthode pour combiner les réfractions, et il parvint à former des lunettes acromatiques (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 380, 1757, *pag.* 524). Cet habile artiste mourut le 30 novembre 1761, agé de 55 ans [a]. Ses fils ont continué de faire d'excellentes lunettes, ainsi que M. Ramsden leur beau-frere.

2299. Hévélius avoit observé depuis long-temps que le crystal de roche avoit une réfraction plus grande que le verre de Venise (*Selenog. pag.* 9); mais ce qu'on n'avoit pas observé, c'est que la dispersion des couleurs prismatiques dans différens verres est fort différente, lors même qu'on suppose un égal degré pour la réfraction moyenne, c'est-à-dire pour celle des rayons verds, qui tiennent le milieu entre les extrêmes, ou entre les violets et les rouges. Il y a des matieres qui dispersent deux fois plus que d'autres les rayons colorés, et qui augmentent beaucoup la longueur du spectre coloré sous un même degré de réfraction moyenne; en sorte qu'on peut faire varier leurs angles réfringens jusqu'à obtenir un spectre coloré de même grandeur, une égale séparation des rayons extrêmes, sans que la réfraction moyenne soit égale; la réfraction qui reste suffit pour former une lunette.

J'ai appris en Angleterre qu'un gentilhomme, nommé Hall, avoit fait cette remarque, vers 1750, et avoit fait avant Dollond des verres acromatiques, on l'a constaté dans un procès entre Dollond et

(a) Il étoit fils d'un fabricant de soie en Normandie.

Watkins; Hall s'adressoit à un opticien nommé Aiscough, pour qui Bass travailloit, et celui-ci, qui travailloit aussi pour Dollond, lui fit voir les verres de Hall, qui donna sa méthode à Bird et à plusieurs autres; mais pour lors on n'en tint aucun compte. En 1789, M. Dollond le fils a lu un mémoire à la société royale, pour établir les droits de son pere sur cette découverte; mais M. Ramsden l'a réfuté par un autre mémoire.

2300. Quoi qu'il en soit, c'est Dollond qui nous a fait jouir de la découverte des lunettes acromatiques : il forma des prismes, ou de petits angles réfringens, premièrement avec un verre jaunâtre ou couleur de paille, appellé communément à Londres *verre de Venise*, 2°. avec le verre d'Angleterre, connu sous le nom de *crown-glass* (a), dont on fait les vitres à Londres, 3°. avec le crystal blanc, dont on fait à Londres les verres, les carafes, les lustres, appellé *flint-glass* (b); il trouva des prismes de crown-glass et de flint-glass, qui produisoient dans les couleurs, une égale divergence de rayons, ou une égale étendue dans le spectre coloré, quoique la réfraction moyenne fût inégale; *Philos. Trans.* 1758, *p.* 740. D'où il étoit aisé de conclure, qu'un objectif composé de ces deux matieres, réunies d'une maniere convenable, n'auroit plus cette aberration de rayons colorés qui produisoit la confusion des images.

Le rapport des dispersions, dans le crown-glass, et dans le flint-glass, suivant Dollond, est de 200 à 300, et suivant M. l'abbé Rochon de 200 à 320; il y apparence que cela varie un peu, même dans des verres de même espece, et il faudroit éprouver à chaque fois celui dont on veut se servir.

2301. Ce n'est pas ordinairement le poids des matieres qui rend la réfraction plus forte; car l'esprit de térébenthine a presque autant de réfraction que le verre, quoiqu'il pese beaucoup moins. Newton a fait voir que les matieres combustibles avoient plus de réfraction relativement à leur poids; le tissu intérieur des parties y contribue certainement beaucoup; mais nous observons en général que le verre le plus pesant, est celui qui disperse le plus les rayons colorés, et qui produit le spectre le plus allongé. En effet, le *flint-glass* donne trois pouces de couleurs, là où nos glaces ordinaires ne donneroient que deux pouces; et d'un autre côté, l'on trouve en pesant ces matieres dans l'air et dans l'eau, que le flint-glass

(a) C'est-à-dire, *verre en couronne*, parcequ'on le travaille en rond par le moyen de la force centrifuge.

(b) *Flint* signifie *petit cailloux* ou *silex*; c'est la matiere qui le compose, jointe avec du minium, ou chaux de plomb.

pese 1200 grains le pouce cube, tandis que notre verre commun ne pese qu'environ 940 grains.

2302. Cet excès de pesanteur prouve bien qu'il entre beaucoup de plomb dans le verre dont la dispersion est si forte : aussi m'a-t-on assuré en Angleterre, qu'il entroit en minium un tiers du poids total de la matiere du *flint-glass;* et Passement étoit parvenu à faire des échantillons, qui donnoient la même dispersion, en faisant fondre six onces de sablon, quatre de potasse, cinq de minium, et huit grains de manganese (qui est appellée quelquefois le savon des verreries), pour éclaircir la matiere. Il parvint même à faire un verre, dont la dispersion étoit double de celle de nos glaces, et qui pesoit 1570 grains le pouce cube, en faisant fondre deux onces de sable, $3\frac{1}{2}$ de minium, une once de potasse et un gros de salpêtre. Les morceaux de verre qui nous viennent d'Allemagne, et qui portent chez nous le nom de *strass*, (parceque M. Strass, célebre bijoutier de Paris, s'en est beaucoup servi pour imiter les diamans) réussissent pour les lunettes, parcequ'ils contiennent beaucoup de minium ; ils ont une qualité dispersive, double de celle du verre commun; mais il est bien rare d'en trouver qui soit sans ondes ; M. l'abbé Bouriot a reconnu que le pouce cube pese 1440 grains, quelquefois même jusqu'à 1600 ; le strass qu'on fait en France 1306, le flint-glass 1202, les glaces d'Angleterre 1005, le verre ordinaire de France 940, le verre de Bohême 774 ; en sorte qu'on pourroit faire des lunettes acromatiques avec le verre de France et celui de Bohême. D'ailleurs, M. Zeiher à Pétersbourg, a trouvé qu'avec une certaine quantité d'alkali, on diminue la réfraction moyenne du verre, sans presque rien changer à la dispersion ou à l'étendue du spectre coloré, (*M. d'Alembert; opus. Tom. III, pag.* 404). Le docteur Bévis m'a dit qu'il avoit fait faire à Londres des essais de verre avec beaucoup de borax, et que la réfrangibilité étoit aussi grande que celle du crystal blanc d'Angleterre. Mais malgré tous les efforts qu'on a faits jusqu'ici, pour avoir de bon crystal en France, et même en Angleterre, on est encore peu avancé ; et l'on en obtient rarement qui soit assez pur pour les lunettes. L'académie a proposé un prix de 12000 liv. en 1786, le bureau des longitudes en Angleterre, en avoit deja proposé un du double ; mais en Angleterre les droits sont trop forts, et empêchent qu'on ne puisse multiplier ces sortes d'expériences.

2303. M. Clairaut a donné une théorie très détaillée des lunettes acromatiques (2298), dans laquelle on trouve un grand nombre de combinaisons différentes pour le choix des foyers, et la quantité des

des courbures propres à corriger tout à-la-fois et la réfrangibilité, et les aberrations de sphéricité, c'est-à-dire celles que la figure circulaire produit. D'après ces formules, M. Anthéaulme fit au mois de septembre 1763, un très bon objectif acromatique de sept pieds, le premier que l'on ait eu de cette force ; il produit beaucoup plus d'effet que la lunette de 34 pieds qui est à l'Observatoire, il a 34 lignes d'ouverture, et peut porter un oculaire de 3 lignes. M. Anthéaulme a centré ses verres, en faisant porter sur leur surface une des extrémités d'un niveau très parfait (2399), et faisant tourner le verre entre trois entailles, où il tournoit sans changer de hauteur ; la moindre inégalité d'épaisseur faisoit varier le niveau. Il l'a travaillé dans une forme qui n'étoit pas parfaite ; mais y ayant ensuite collé du papier fort épais, et appliquant le verre dessus, il a vu les endroits où le papier étoit trop comprimé ; il les a usés avec la pierre-ponce, et il s'est procuré par-là un bassin de papier très exactement sphérique. Je vais rapporter ici les dimensions de cet objectif : étant deja consacrées par un entier succès, elles pourront servir de modele à d'autres artistes.

2304. La partie ABH (FIG. 144), qui est tournée du côté de l'œil, est de la matiere la plus légere, de verre commun, ou de crown-glass. Sa courbure extérieure AB a 7 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon ; la surface intérieure CHD 18 pouces ; le verre CEGD est un ménisque (1400). Il est de la matiere la plus pesante ; le rayon de sa concavité CD a 17 $\frac{1}{4}$ pouces, le rayon de la convexité EG, qui doit être tournée du côté de l'objet, a 7 pieds 6 pouces 8 lignes. Ces deux matieres différentes sont séparées l'une de l'autre sur les bords, par l'intervalle d'une carte à jouer, et forment par leur assemblage un objectif composé, qui a sept pieds de foyer. On est obligé d'employer pour cette lunette deux oculaires, afin d'avoir un champ plus considérable, malgré la force amplificative (2294) : le grand oculaire, qui est le plus près de l'objectif, a 18 lignes de foyer ; le rayon de sa convexité, qui est tournée vers l'objectif, est de 11 lignes $\frac{6}{10}$; celui de la convexité tournée du côté de l'œil est 7 pouces 1 ligne $\frac{2}{10}$; le petit oculaire a 5 lignes de foyer : c'est un *ménisque*, convexe du côté de l'objet ; la convexité a 2 lignes $\frac{1}{2}$ de rayon ; la concavité a 8 lignes. Ce petit oculaire est placé à 9 lignes du premier, ou à la moitié seulement de la distance de son foyer. Le premier oculaire a 9 lignes d'ouverture, le second en a deux ; mais le premier contribue surtout à l'étendue du champ de la lunette, et le second à la force amplificative (2289).

2305. Parmi les différentes formules, que Clairaut a trouvées

propres à former des objectifs acromatiques, il y en a une qui est fort simple, puisqu'elle ne consiste qu'à rendre le rayon des deux courbures intérieures, égales à un cinquieme du rayon des deux courbures extérieures. Si AB (FIG. 144) est un arc de 10 pieds de rayon aussi bien que l'arc EG, et que les arcs intérieurs CD aient deux pieds de rayon, la partie ABH étant de verre commun plus léger, on aura un objectif acromatique de 10 pieds de foyer (*Mém.* 1757); cependant les dimensions rapportées ci-dessus (2304) paroissent donner encore plus de perfection.

M. Grateloup a trouvé en 1786, qu'en collant les deux verres avec une légere couche de résine, on remédie à l'irrégularité des surfaces intérieures, et l'on rend les lunettes beaucoup meilleures; M. l'Abbé Rochon avoit déja eu l'idée d'un fluide interposé, comme on le voit dans ses opuscules imprimés en 1783.

2306. M. l'Abbé Bouriot a exécuté des lunettes acromatiques à deux verres, avec beaucoup d'intelligence et d'adresse; une entre autres qui a 6 pieds 3 pouces de foyer, et peut grossir jusqu'à 120 fois; le flint-glass qui est en dehors, a une surface convexe du côté de l'objet, et une concave du côté des oculaires; les surfaces extérieures ont 5 pieds 3 pouces de rayon, les surfaces intérieures 14 pouces; l'ouverture est de 28 lignes. Il emploie deux oculaires; le plus grand a 18 lignes de foyer, le plus petit 6 lignes, et celui-ci est placé aux deux tiers du foyer du grand oculaire, ou à 12 lignes de distance, ils sont tous les deux plans convexes; la surface plane est tournée du côté de l'œil; le premier oculaire a 10 lignes d'ouverture, le second 5 lignes, et l'œilleton ou l'ouverture à laquelle on applique l'œil a 3 lignes de diametre. M. de l'Etang, autre amateur, a fait aussi d'excellentes lunettes acromatiques, ainsi que M. l'Abbé Rochon, M. Putois et M. le Rebours, opticiens de Paris.

2307. Les plus singulieres que l'on ait faites, sont celles de $3\frac{1}{2}$ pieds, que Dollond a exécutées depuis 1765, à trois objectifs, et que M. Ramsden continue avec succès: j'en acquis une en 1768; elle a environ 43 pouces de foyer, avec 40 lignes d'ouverture; elle force plus que les lunettes ordinaires de 20 pieds. L'objectif est composé de trois verres, dont un est de flint-glass, concave des deux côtés, placé entre deux lentilles bi-convexes de verre commun; les six rayons, à commencer par celui de la surface extérieure, sont 315 lignes, 450, 235, 315, 320 et 320 (*Mém.* 1771, *pag.* 78); cette lunette est aux Indes. Voici les dimensions d'une autre dont je me sers actuellement, et qui est encore meilleure: 315 lignes, 400, 238, 290, 316 et 316: elle a 43 pouces 5 lignes de foyer, et 40 lignes d'ou-

verture (*Journal des Savans* décembre 1772), et on a déterminé ces courbures par le moyen du sphérometre (2597). Ces lunettes deviendront encore meilleures, lorsqu'on y emploiera trois sortes de verres, au lieu de deux, qui à la rigueur ne réunissent que deux sortes de rayons (Voyez le P. Boscovich, *Dissert. II, pag.* 101).

2308. On peut voir sur la théorie des lunettes acromatiques, Clairaut (*Mém. acad.* 1756, 1757, 1762); Euler (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 555, *Mémoires de Berlin, tom. XXII, Dioptrique en* 3 *vol. in*-4°); d'Alembert, Opuscules mathématiques, d'abord dans le *tom. III*, publié en 1764, et ensuite dans les Mémoires de 1764 et 1765, dans les tomes IV et V de ses opuscules en 1768, dans le tom. VI en 1773, et dans les tomes VII et VIII en 1781. M. Klingenstierna, dans une piece qui a remporté le prix de l'académie de Pétersbourg en 1762. M. l'Abbé Rochon, dans ses Opuscules, publiés en 1768 et en 1783, *in*-8°. Le P. Boscovich, dans les cinq Dissertations latines qu'il a publiées à Vienne en 1767, *in*-4°. Dans un ouvrage intitulé *Memorie sulli Cannochiali*, 1771, 8°, et dans ses OEuvres imprimées à Bassano en 1785, tom. I et II, où l'on trouve un Traité complet sur cette matiere. M. Fuss, dans son Instruction pour les lunettes, publiée à Pétersbourg en 1774; le P. Pézenas, et M. Duval le Roy, dans leurs Traductions de l'Optique de Smith, publiées en 1767.

2309. L'ACADÉMIE des sciences, établie en 1666, forma une époque mémorable dans les sciences, mais sur-tout dans celle des observations astronomiques; jusqu'alors Boulliaud et Gassendi, nos meilleurs observateurs, s'étoient contentés de faire des observations à l'estime, et avec des instrumens grossiers. Pour voir combien il y avoit jusqu'alors d'inexactitude dans les observations, il ne faut que jeter les yeux sur les variétés qu'il y a eues dans la latitude de Paris, déterminée en divers temps (2243). Auzout se plaignoit de l'imperfection des instrumens, et souhaitoit beaucoup de les perfectionner; dans une Epître au Roi en 1664, il lui disoit: *Mais*, SIRE, *c'est un malheur qu'il n'y a pas un instrument à Paris, ni, que je sache, dans tout votre royaume, auquel je voulusse m'assurer, pour prendre précisément la hauteur du pole;* il auroit pu ajouter qu'il n'y en avoit pas plus en Angleterre, et en Italie; on ne pouvoit guere citer que Hévélius à Dantzik (2284).

Louis XIV, secondé par Colbert, ne tarda pas à y remédier; l'académie des sciences fut établie (494); on jeta les fondemens de l'Observatoire royal; on rassembla les astronomes françois; on en appella du dehors, et l'on fit construire les meilleurs instrumens.

2310. Les soins du ministere furent heureusement secondés par

l'habilité des astronomes : Auzout et Picard imaginerent, en 1667, de placer la lunette sur le quart-de-cercle (2312), au lieu des pinnules [a]. On trouve dans l'Histoire céleste, 1745 (*pag.* 2 *et* 11), l'extrait d'un mémoire lu à l'académie par Picard, au mois de décembre 1667 ; il y rapporte des hauteurs méridiennes du Soleil, observées au mois d'octobre 1667, dans le jardin de la bibliotheque du Roi (2243), avec un quart-de-cercle de 9 pieds 7 pouces de rayon, et avec un sextant de 6 pieds, sur lesquels il y avoit des verres au lieu de pinnules ; ce sont les premieres observations où l'on ait appliqué des lunettes aux quarts-de-cercle, et cette idée doit être regardée comme une de celles qui ont changé la face de l'astronomie ; on la verra employée dans tous les instrumens que nous allons décrire.

Description du Quart-de-cercle mobile.

2311. Le quart-de-cercle mobile est, de tous les instrumens actuels d'astronomie que nous avons à décrire, celui dont l'usage est le plus général, le plus indispensable, le plus commode : c'est pourquoi je commencerai par celui-là. On a déja vu la maniere dont il faut concevoir l'usage du quart-de-cercle pour mesurer des hauteurs (25) : il ne s'agit plus que des détails de l'instrument porté à sa derniere perfection ; je décrirai celui dont nous nous servons le plus en France, où la lunette est fixe ; je parlerai de la lunette mobile à l'occasion du mural.

Je suppose un quart-de-cercle de trois pieds de rayon CBA (FIG. 149) ; le limbe qui forme la circonférence ADB est de cuivre ; il est assemblé avec le centre C par trois regles de fer CA, CD, CB, de deux pouces de large, fortifiées chacune par-derriere d'une regle de champ qui en empêche la flexion. Vers le centre de gravité X de la masse entiere du quart-de-cercle, est fixé un axe ou petit cylindre de cuivre, de deux pouces de diametre sur 5 à 6 pouces de long,

(a) On a attribué cette idée à Picard ; mais il dit lui-même à la Hire qu'Auzout y avoit eu grande part ; voyez son Mémoire sur la date de plusieurs inventions en astronomie (*Mém* 1717). De l'Isle croyoit que cette idée étoit venue de Roberval ; mais on la trouve dans Morin, *Scientia longitudinum*, 1634, *pag.* 18 *et* 56, où l'auteur donne cette invention comme de lui : *Applicatio tubi optici ad Alhidadam, pro stellis fixis promptè et accuratè mensurandis, à me excogitata.* Mais Morin n'eut pas l'idée de mettre des fils au foyer des verres ; ce fut Huygens qui fit cette importante addition (2347) Morin fut aussi le premier qui, au mois de mars 1635, imagina de suivre les étoiles en plein jour, et l'on voit dans son livre combien cela lui fit de plaisir (pag. 210) : cependant Picard crut être le premier en 1669. (*Hist. acad, pag.* 54, *mém.* 1787).

perpendiculairement au plan de l'instrument; ce cylindre entre dans une douille, c'est-à-dire, dans un cylindre creux E, représenté séparément en EE (FIG. 153); cette piece, qu'on appelle *le genou*, est composée non seulement d'une douille horizontale ou cylindre creux EE, mais d'un autre cylindre *e*, fondu tout d'une piece avec la douille, et que l'on place verticalement en *n* sur le pied de l'instrument. Pour empêcher que le quart-de-cercle ne sorte de sa place, on applique derriere la douille ou le canon E (FIG. 149) une plaque de fer qui recouvre le tout; cette plaque est arrêtée par une forte vis, qui pénetre dans l'axe du quart-de-cercle, et qui tourne avec lui, sans lui permettre de sortir de la douille.

Par le moyen de ce genou, le quart-de-cercle peut tourner verticalement et horizontalement : il tourne verticalement, ou dans le plan d'un vertical, lorsque le genou EF restant immobile, l'axe du quart-de-cercle tourne dans la douille à frottement dur; il tourne horizontalement en se dirigeant successivement vers tous les points de l'horizon, lorsqu'on fait tourner sur son pied l'arbre F du genou. Il y a des vis de pression au-dessus de la douille horizontale E, et à côté de la douille verticale F, comme on le voit au-dessus de *p*, avec lesquelles on presse le canon dans sa douille, lorsqu'on veut fixer le quart-de-cercle à une hauteur donnée ou dans un vertical déterminé.

2312. Vers l'un des rayons CB du quart-de-cercle, on fixe une lunette GM; elle passe dans une douille de cuivre, fixée en G par des rebords ou empattemens, où passent de fortes vis qui l'assujettissent inébranlablement sur la carcasse de l'instrument; à l'autre extrémité M est la boîte du micrometre, fixée aussi par des empattemens. A l'égard du tuyau qui s'étend de G en M, il n'importe de quelle matiere il soit fait; ce n'est que pour donner de l'obscurité dans la lunette : on le fait ordinairement de cuivre. Il suffit qu'il ait 15 à 16 lignes de diametre pour un quart-de-cercle de trois pieds, à moins que la lunette ne soit acromatique : la solidité en est indifférente; mais celle des deux pieces G, M, qui portent les verres, est essentielle, parceque leur solidité assure celle de l'axe optique de la lunette, qui doit être exactement parallele au plan de l'instrument (2572), et au premier rayon qui passe par le point de 90°. Nous expliquerons la maniere de lui donner précisément cette situation (2555).

2313. Au centre C de l'instrument est un cylindre de cuivre exactement tourné, qui porte à son centre un très petit point; on y place la pointe d'une aiguille, sur laquelle on fait passer la boucle du fil à plomb; on voit séparément en AA (FIG. 150) le cylindre, ainsi

que l'aiguille placée au centre, supportée par une piece d'acier *a* recourbée, et percée d'un trou, au travers duquel passe l'aiguille pour aller se loger au centre du cylindre. Quand elle y est bien placée, on a soin de la serrer dans la piece *a* avec une vis de pression qui paroît au-dessus de *a*. Autour de l'aiguille *a*, l'on fait une boucle avec un cheveu, un fil de pite ou un fil d'argent très fin; à cette boucle, placée tout contre le cylindre du centre, on suspend le fil à plomb chargé d'un poids que l'on voit en *q* (FIG. 149); ce fil marque sur la division du limbe le degré de la hauteur à laquelle est dirigée la lunette MG. L'extrémité du cylindre AA (FIG. 150), qui porte le point du centre et la pointe de l'aiguille, doit être un peu arrondie ou convexe, pour que le fil n'y éprouve pas un trop grand frottement (2386). On peut aussi mettre à la place de l'aiguille *a* une vis qui se termine en une pointe très fine, et qui tourne dans la piece *a* comme dans une espece de pont.

2314. Autour du cylindre qui porte le centre du quart-de-cercle, il y a une plaque de cuivre plus large, ronde, fixée sur la charpente de l'instrument. Sur cette piece est suspendu le *garde-filet* CH (FIG. 149); c'est une longue boîte de cuivre, mince, soutenue vers le centre, autour duquel elle tourne pour se mettre toujours d'à plomb, et contenir le fil qui pend du centre pour marquer la hauteur. Ce garde-filet a une longue porte qui se ferme avec deux petits crochets, pour garantir le fil de l'agitation de l'air; on la voit ouverte sur la gauche. A la partie inférieure H est une boîte plus large; il y a des astronomes qui y placent un vase d'eau où trempe le poids du fil à plomb, afin que la résistance diminue les oscillations et en abrege la durée; j'ai toujours craint qu'elle ne diminuât aussi la liberté du poids, et je n'en ai jamais fait usage : j'ai reconnu par expérience qu'on peut fixer le plomb en le touchant légèrement du bout du doigt, et quand les oscillations sont très petites, on peut les anéantir en les contrariant à propos par un mouvement de la vis, qui fait faire une oscillation opposée, et arrête subitement le fil à plomb : on a bientôt acquis cette habitude quand on observe souvent. La boîte inférieure a une porte Z, où est attaché un microscope et une lampe à deux meches; la lampe sert à éclairer le limbe et le fil à plomb, pour voir sur quelle division il répond; le microscope sert à grossir les points, pour mettre facilement et exactement le fil du quart-de-cercle sur le point que l'on veut (2578).

2315. La verge de conduite ou *verge de rappel* LKI est une addition très utile, que M. de Fouchy a introduite pour mettre le fil sur tel point du limbe que l'on veut; on la voit représentée séparément

en IL (FIG. 151 et 152), avec tous ses détails; mais il faut supposer que la partie L (FIG. 152), est placée au-dessus et sur le prolongement de la partie I (FIG. 151). La tringle a trois pieds de long, sept lignes de large et cinq d'épaisseur; elle est logée par ses deux bouts dans deux boîtes de cuivre I, L. Quand elle est arrêtée en I (FIG. 149), au moyen de la vis de pression *c* qui l'empêche de glisser dans la boîte I, alors l'extrémité inférieure sert de point d'appui : en tournant l'écrou qui est en B, l'on fait monter la boîte L, qui est fixée par une piece ou mâchoire *r* derriere le quart-de-cercle, à la regle de champ du limbe, par le moyen d'une cheville qui traverse et la mâchoire et la regle de champ; en faisant mouvoir ainsi la boîte L, on fait avancer le quart-de-cercle.

2316. La maniere dont l'écrou B est tenu sur la boîte L paroît assez dans la fig. 152. Cette boîte est évidée par en-haut; à sa base supérieure est pratiquée une rainure dans laquelle tourne un écrou, qui y est retenu par le moyen d'un collet, ou qui est seulement rivé par-dessous au-dedans de la boîte. Cet écrou, qui tient nécessairement à la boîte, avance quand on le tourne sur la vis B qui est à l'extrémité de la verge, parceque celle-ci est fixée par son autre extrémité; l'écrou fait avancer aussi le quart-de-cercle, qui est obligé de suivre la boîte L.

Pour produire ce mouvement avec plus d'exactitude, on soude à l'extrémité de la boîte L une plaque ronde de cuivre; dans son épaisseur, qui est d'environ deux lignes, on pratique une rainure circulaire de demi-ligne de profondeur, dans laquelle tourne la base de l'écrou; celle-ci est recouverte par deux demi-cercles d'une ligne d'épaisseur qui embrassent l'écrou, auquel on fait, si l'on veut, une rainure circulaire, pour que les deux demi cercles s'y engagent mieux. Ces demi-cercles sont attachés à la plaque supérieure de la boîte L chacun avec deux vis; ils empêchent l'écrou de sortir de la rainure, sans empêcher qu'il n'y tourne librement. La vis qui termine la verge de conduite passe au travers de l'écrou. Un écrou à tête ronde, qui a un grénetis R (FIG. 167), c'est-à-dire, qui est légèrement dentelé sur les bords, est plus fort que n'est l'écrou à oreille, représenté en *m* et en B (FIG. 151 et 152).

A l'extrémité inférieure I de la verge de rappel, on a pratiqué un semblable mouvement, pour que l'observateur, qui est occupé à regarder le fil à plomb, puisse faire tourner le quart-de-cercle d'une petite quantité, et le mettre exactement sur celui des points de la division qui approche le plus de la hauteur de l'astre qu'on se propose d'observer. Pour cet effet, la boîte I (FIG. 151), est fixée sur

une piece coudée de fer ou de cuivre *f*, qui passe dans une autre boîte *g*, et se termine par une vis *m*, qui est prise dans un écrou, arrêté par un collet sur la base de la boîte *g*, mais qui tourne librement; il fait avancer la vis, la piece *f* et la boîte I, dans laquelle est serrée la verge de rappel par une vis de pression *c*: cette verge est donc tirée par la vis *m*, et fait mouvoir le quart-de-cercle.

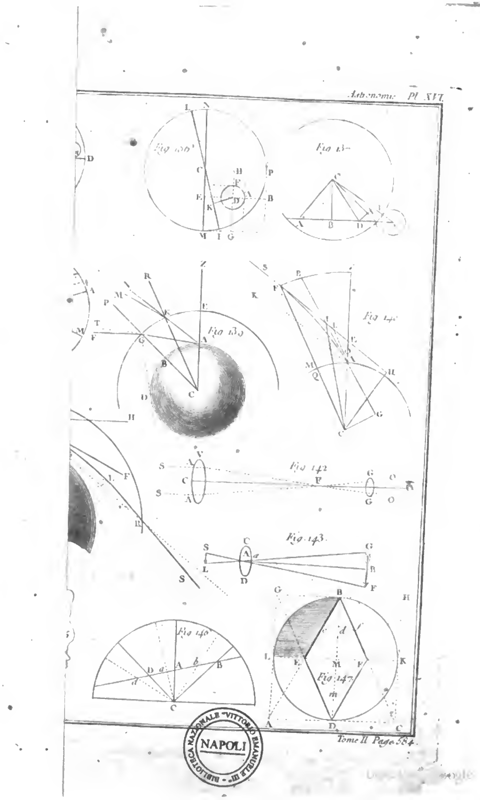
La boîte *gm*, aussi bien que la boîte BL, doivent être mobiles chacune autour d'un axe horizontal pour se prêter aux différentes inclinaisons de la verge de rappel, et la boîte *g* est montée sur un collet N (FIG. 149), qui embrasse la tige du quart-de-cercle, et y tourne librement : on peut l'arrêter par une vis de pression, pour fixer le quart-de-cercle dans un vertical déterminé; mais cette vis de pression n'est pas absolument nécessaire.

2317. Le montant ON du pied de ce quart-de-cercle est un arbre de fer de deux pouces de diametre sur trois pieds et demi de hauteur; il se termine par un carré qui passe au travers des barres P, P, qui font les traverses du pied. Dans ce carré l'on passe une clavette, ou cheville de fer, au-dessous de Q; aussi tôt que les quatre arcs-boutans R ont été mis en place, et que leurs extrémités sont entrées dans leurs trous en haut et en bas, on serre cette clavette Q à coups de marteau; cela fait descendre l'arbre NO sur les arcs-boutans, et forme un assemblage ferme et invariable de l'arbre avec ses arcs-boutans R et ses traverses PP. La tige ON doit être assez longue pour que le limbe DA soit à 2 pieds de terre, ou même 2 ½ pour la commodité des observateurs.

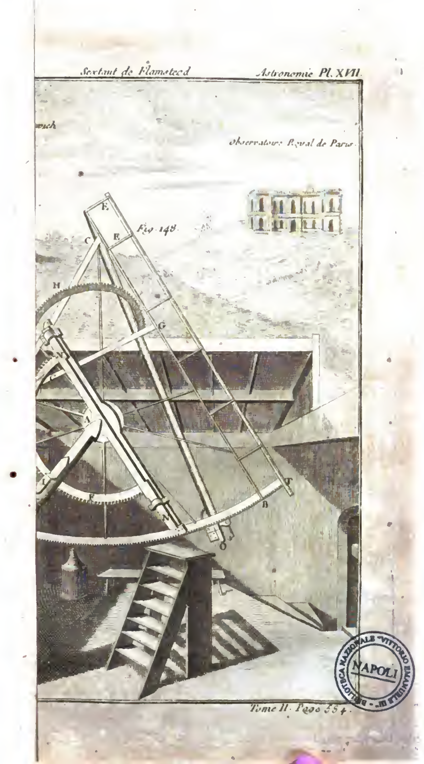
2318. Pour caler l'instrument, on emploie les 4 vis que l'on voit aux extrémités P, P des traverses du pied; elles sont de cuivre, et ont un pouce de diametre; elles servent à soutenir le pied de l'instrument, à l'incliner, à rendre son arbre ON exactement vertical, de maniere qu'on puisse faire tourner le quart-de-cercle sur son pied, sans que le plan cesse d'être vertical, du moins sensiblement. Ces vis portent sur des coquilles de fer, qui servent, par leur frottement, à empêcher que le quart-de-cercle ne charrie ou ne change de place quand on tourne la vis.

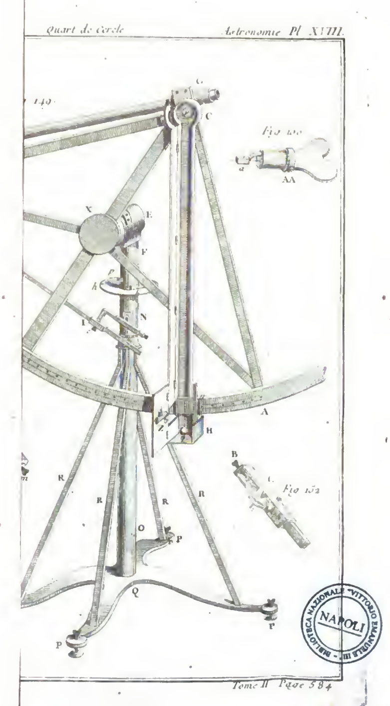
2319. Le cercle azimutal *ph* a 6 pouces de diametre; il est fixé à une douille de cuivre qui est attachée sur le pied de l'instrument; le canon F du genou porte à son extrémité inférieure une alidade *k*, qui tourne avec le quart-de-cercle, tandis que la plaque azimutale est fixe; l'alidade marque par son mouvement le degré d'azimut, ou le point de l'horizon auquel le plan est dirigé.

L'usage de ce petit cercle azimutal ne s'étend pas jusqu'à observer l'azimut






Observatoire Royal de Paris
Fig. 148.
E
E
C
H
G
A
F
T
B
N
O


Fig. 149.
G
C
Fig. 150.
a
AA
X
E
F
h
L
N
A
H
B
C
Fig. 152.
R
R
R
R
O
P
Q
P
P

l'azimut avec précision, comme Tycho et Hévélius le faisoient autrefois ; on a banni ce genre d'observations, comme trop difficile à bien faire : cependant j'ai vu à Avignon un quart-de-cercle fait sous les yeux du P. Morand, dont l'axe exactement tourné portoit à sa partie inférieure, et entre les pieds du quart-de-cercle, un grand cercle azimutal, avec lequel on pouvoit très bien observer l'azimut. *Opt. de Smith*, éd. d'Avignon, Tom. II, pag. 532; M. Mégnié en a fait un à Paris en 1781, qui est d'une très grande exactitude ; il est à Lyon chez M. le Camus. L'observation de l'azimut seroit souvent commode et utile, mais elle exige des vérifications particulieres, dont le P. Boscovich a parlé Tom. IV, p. 87.

2320. Le limbe ADB du quart-de-cercle est la piece la plus essentielle; il a deux pouces de large; son épaisseur, qui est de quatre lignes, est formée de deux lames, une de fer et l'autre de cuivre; il est important que le limbe de cuivre soit bien dressé, et que toutes ses parties soient dans un seul et même plan (1120) avec le point du centre (2549). C'est un usage qui a été long-temps trop répandu, de former le limbe d'un quart-de-cercle avec du fer sur lequel on met une plaque de cuivre, tandis que l'assemblage est de fer ; le cuivre se dilate plus par la chaleur, et cela peut changer l'arc total, en sorte qu'il ne soit plus de 90°. Il est vrai qu'on remédie presque entièrement à cet inconvénient par la force des rivets, ou des clous qui attachent le cuivre sur le fer; car M. Bouguer ayant exposé un quart-de-cercle à une très grande chaleur, ne trouva pas dans les angles de différence sensible (*Fig. de la Terre*, *pag.* 184); cependant on feroit encore mieux de n'employer que du cuivre dans la construction toute entiere de l'instrument; cela se pratique depuis long-temps en Angleterre, et quoique la dépense soit un peu plus considérable, on commence à suivre en France la même méthode.

C'est sur le limbe ADB que l'on place les divisions, quelquefois par transversales (2336); mais plus souvent avec de simples points, comme on le voit dans la fig. 149. Lorsque la lunette a un micrometre, comme on le voit en M, on n'a besoin que d'avoir des points de dix en dix minutes. Nous parlerons de la maniere de diviser (2342), et de vérifier les divisions (2562).

2321. En Angleterre tous les quarts-de-cercles mobiles ont une alidade ou lunette mobile, comme dans le mural (FIG. 155), avec un vernier (2343); en sorte que le limbe du quart-de-cercle ne change point, et que la lunette seule tourne autour du centre. On se contente d'employer un fil à plomb, qui pend sur le dernier point de la division, ou du moins qui est parallele au rayon vertical de 90°;

quelquefois même on n'y emploie que le niveau, l'usage en est plus commode que celui du fil à plomb, mais il est moins exact (2399). Si l'on n'emploie pas généralement cette lunette mobile dans les petits quarts-de-cercles, c'est que l'usage en est un peu moins commode que celui du fil à plomb.

2322. Le double genou représenté en ST (FIG. 153) n'est point employé dans le quart-de-cercle de la figure 149, il ne sert que pour mettre le plan de l'instrument dans une situation horizontale ou inclinée (2584), comme dans la figure 169. La partie *e* du premier genou étant toujours verticale, et la partie EE toujours horizontale, le cylindre T entre dans le canon EE, où il tourne à frottement; l'axe V, qui porte le quart-de-cercle, et qui est vertical quand le plan est dans une situation horizontale, entre dans la douille S; par ce moyen on donne au plan toutes les inclinaisons pour mesurer des angles dans tous les sens.

Mais pour mesurer les angles sur le terrain, il n'y a rien de meilleur qu'un cercle entier; s'il a seulement un pied de diametre, on peut s'assurer de deux secondes, comme M. de Cassini et M. Méchain s'en sont assurés, en 1787, dans la mesure des triangles entre la côte de Flandre et celle d'Angleterre.

Voyez les vérifications et les usages du quart-de cercle, art. 2550 et suiv.

Sextant de Flamsteed pour mesurer les distances.

2323. PEU de temps après la perfection des intrumens à Paris (2310), Flamsteed entreprit d'observer en Angleterre, avec la même précision; vers la fin de 1671, il commençoit à mesurer des distances entre les étoiles et les planetes, avec des lunettes de 7 et de 15 pieds, à *Derby;* et il reconnut souvent que les tables de la Lune, et les catalogues d'étoiles dont on se servoit alors étoient défectueux; les positions des étoiles marquées dans le catalogue de Tycho, s'écartoient souvent de 3, 4, ou 5', et les lieux de la Lune de 15 à 20' de l'observation. Ce fut alors que le chevalier MOORE, qui étoit à la tête de l'artillerie, qui aimoit les sciences, et en particulier Flamsteed, lui fournit des instrumens, et détermina le roi Charles II à faire bâtir l'observatoire de GREENWICH près de Londres (520), où Flamsteed entra au mois d'août 1676 (*Hist. célest. Proleg. pag.* 103).

Au défaut d'un quart-de-cercle mural que Flamsteed ne put d'abord se procurer, il s'occupa pendant les douze premieres années à

mesurer les distances des étoiles entre elles, et les distances des planetes aux étoiles, avec un sextant que le chevalier Moore lui avoit donné.

2324. Ce sextant CDB (FIG. 148) a 6 pieds 4 pouces de rayon, mesure de Paris; il est divisé de 5 en 5'. Vers le centre de gravité, par lequel cet instrument est soutenu, l'on voit une plaque A de laquelle partent 8 petites lames de fer, qui assemblent les rayons CB et CD, avec le limbe BD de l'instrument. Il y a 7 barreaux de fer E, E, d'environ 7 pouces, aux extrémités desquels est la lunette fixe ET; par ce moyen l'espace BT est suffisant pour que deux observateurs puissent regarder à la fois par les deux lunettes CO, ET lorsqu'elles approchent du parallélisme.

Le limbe BD est de fer, couvert d'une lame de cuivre, qui est striée comme une vis, les révolutions, ou les valeurs de ces filets, ou stries, se comptent sur des cercles tracés sur le limbe de cuivre, tout près du bord; mais comme le sextant est vu par-dessous ou par-derriere, dans la *figure* 148, je n'ai pu y représenter les divisions. On avoit encore tracé sur le limbe des arcs de cercles divisés de 5 en 5', et qui par des transversales (FIG. 145), pouvoient donner 10''. Une barre de fer NN, placée de champ, porte le demi-cercle denté NFF, et le plan du secteur peut s'incliner en tournant autour de l'axe NN. Cet axe est parallele à la lunette fixe TE; par son moyen on tourne le sextant, sans que la lunette fixe ET quitte l'étoile à laquelle elle étoit dirigée, et de maniere que la lunette mobile OC, puisse parvenir dans la position nécessaire pour l'autre astre.

Une barre de fer GG perpendiculaire à la barre NN, et fixée également sur le plan du secteur, porte un autre demi-cercle denté, H, dont le plan est perpendiculaire à celui du grand demi-cercle NFF. Sur ce demi-cercle H, et dans l'endroit où il touche le grand demi-cercle NFF, il y a une vis sans fin, avec un manche qui sert à incliner le plan de l'instrument pour lui faire faire un angle quelconque, avec le plan du grand demi-cercle FF, qui est toujours dans le plan d'un cercle de déclinaison.

2325. L'axe AQX sur lequel tourne l'instrument est de fer, il a 3 pouces de diametre, et reçoit le demi-cercle. La manivelle MI donne le mouvement à toute la machine, afin que la lunette fixe ET puisse se placer dans un parallele quelconque: car elle seroit toujours dans le plan de l'équateur, si elle restoit perpendiculaire à l'axe AX. L'axe est supporté en Q, et contenu dans la direction du pole.

2326. Les deux demi-cercles F et H servent à placer l'instrument dans le plan de deux astres pour en mesurer la distance; on com-

mence par diriger la lunette fixe ET vers l'un des deux astres, par le moyen du seul demi-cercle FF, après quoi, sans quitter l'étoile, on peut faire tourner le plan de l'instrument par le demi-cercle H, de maniere que la lunette mobile CO étant placée sur quelque point du limbe soit dirigée vers l'autre astre.

2327. M. Haw en calculant les distances des étoiles observées tout autour du ciel, a trouvé qu'il y avoit dans cet instrument une erreur de 1″ par degré. Flamsteed essaya d'observer des hauteurs méridiennes avec ce sextant; mais comme cela étoit fort difficile, il fit construire à ses frais, en 1683, un autre instrument du même rayon, qu'il divisa lui-même, et dont il se servit plusieurs années.

En 1688, Abraham Sharp fut choisi pour aider Flamsteed dans ses observations; c'étoit un homme très-adroit, et très instruit dans les mathématiques; il lui fit lui-même un arc mural de 69½ pouces de rayon (5 pieds, 5 pouces de Paris), avec lequel Flamsteed fit ensuite pendant 30 ans les observations qui ont servi à dresser le fameux catalogue britannique, et il commença le 19 septembre 1689, (*Prolegom. pag.* 111). Cet instrument étoit si bien fait que les artistes même l'admiroient; cependant on trouve quelquefois des discordances de 3 a 4″ de temps, entre les différences de passages des mêmes étoiles d'un jour à l'autre.

Description du Quart-de-cercle mural.

2328. Tycho-Brahé qui avoit beaucoup perfectionné le quart-de-cercle, fut le premier qui imagina le quart-de-cercle mural, c'est-à-dire celui dont le plan est fixé contre un mur, et dont l'alidade parcourt le plan du méridien, pour observer les passages et mesurer les hauteurs méridiennes; il donna à cet instrument le nom de *Quadrans Tychonicus* (*Astron. inst. mecan. pag.* 21), en qualité d'inventeur, et il s'en servit beaucoup pour déterminer la théorie du Soleil; c'est véritablement l'instrument le plus commode, et celui avec lequel on peut faire en peu de temps le plus grand nombre de bonnes observations.

Le mural que l'on voit dans la (FIG. 155) fut fait à Londres en 1742 par Jonathas Sisson, sous la direction de M. Graham; M. le Monnier s'en servit à Paris jusqu'en 1751 qu'il fut transporté à Berlin, pour mes observations (*Hist. de l'acad. de Berlin, tom. VI, an.* 1750, *pag.* 255). Il est décrit dans l'*Optique de Smith* [(a)].

(a) Dans les tables de la Hire, publiées en 1687, on trouve la description du mural, qu'il plaça en 1682, dans la tour occidentale de l'Observatoire, conjoin-

2329. Ce mural est entièrement de cuivre, il a environ 5 pieds de rayon, le chassis en est formé par des regles plates de cuivre fortifiées par des regles de champ, et assemblées par un grand nombre de vis[a]. Les rayons HB, HA étant divisés chacun en quatre parties égales, servent à trouver les points D et E par lesquels le quart-de-cercle est suspendu librement sur des appuis ou supports de fer, qui font saillie sur le nud du mur.

L'un des supports E est représenté séparément en *e* à côté du quart-de-cercle; il est mobile au moyen d'une tringle EF ou *ef* qui passe dans un écrou, pour rétablir l'instrument dans sa situation, lorsqu'on voit qu'il en est un peu dérangé; cela se reconnoît par le moyen du fil perpendiculaire HA qui doit toujours répondre sur le même point A du limbe, et qu'on a soin d'examiner avec un microscope à chaque observation. M. Ramsden[b] fait en sorte que l'on voit aussi en bas, le point supérieur au haut du fil, sans qu'on ait la peine d'y monter.

Pour empêcher la vacillation d'une aussi grande machine, on a placé derriere le limbe 4 oreilles de cuivre avec de doubles équerres I, K, I, K; il y en a d'autres le long du rayon HA et du rayon HB; chacune de ces équerres *a b c* (FIG. 154, n° 2) porte deux vis *dd*, entre lesquelles on arrête les oreilles *f* qui sont fixées derriere le quart-de-cercle.

Ces équerres sont scellées dans le mur *a m* ou dans la pierre qui porte l'instrument, et le contiennent dans le plan du méridien, sans s'opposer à la dilatation ou à la contraction des regles de cuivre dont est composé le mural; cette liberté qu'a l'instrument de s'étendre en tous sens, fait que la dilatation causée par la chaleur, ne change rien aux angles qu'on mesure par ce moyen (2320). On pourroit même suspendre le mural par son centre de gravité seulement, mais il faudroit le rendre plus épais.

2330. Au dessus de la pierre qui porte l'instrument et à la même hauteur que le centre, on place horizontalement un axe PO (FIG. 155),

tement avec Picard, et qu'on y voit encore auprès de la grande salle de la méridienne. En 1725, Graham en fit un de 8 pieds pour Halley; c'est le premier que l'on ait fait de cette exactitude et de cette grandeur. Godin a décrit dans les *Mém.* de 1731 un petit mural, qu'il plaça dans la rue des Postes, dont M. de Fouchy et M. Bouguer se sont servis après lui, et que j'ai placé en 1782, dans l'observatoire du College Royal.

(a) M. Mégnié préfere de fondre toutes ces lames d'un seul jet, et le limbe entier d'un autre jet, et il l'avoit entrepris à l'Observatoire royal en 1786; mais on n'a pas terminé ce travail.

(b) Voyez l'histoire de ce célebre artiste dans le Journal des Savans, nov. 1788.

qui est perpendiculaire au plan du quart-de-cercle et qui passeroit par le centre *c* s'il étoit prolongé. Cet axe tourne dans deux canons P. Cet axe porte à angles droits une autre branche ON, chargée à son extrémité d'un poids N, capable de faire équilibre avec la pesanteur de la lunette LM, tandis que l'axe, par son extrémité voisine du quart-de-cercle, conduit le chassis de bois PRM qui tient à la lunette en M. Le contre-poids dispense l'observateur de soutenir le poids de la lunette quand il s'agit de l'élever, et empêche qu'elle ne charge et ne fatigue le limbe de l'instrument. On place aussi une tringle *df* qui supporte la lunette quand elle est verticale, par son extrémité *f*, ou, ce qui vaut encore mieux, par son extrémité *d*.

M. Aubert, dans son mural de Bird, a remédié aussi à la pression de la lunette sur l'axe du centre, où le bout extérieur du tourillon, est fatigué ici par la moitié de l'effort de la lunette, et Bird l'a fait de même à Oxford; la piece de la lunette qui tourne sur le centre du mural, est prolongée et se termine par un levier, qui à son extrémité porte un contre-poids : entre deux est un crochet qui supporte le levier, et par conséquent la lunette. M. Ramsden a fait la même chose; mais un peu différemment dans le mural de Blenheim.

2331. L'extrémité inférieure V de la lunette porte en-dessous deux petites roulettes qui prennent le limbe du quart-de-cercle par les deux faces; la lunette ne touche presque le limbe que par ces roulettes, qui en rendent le mouvement si doux, qu'en lui donnant de la main un assez petit mouvement, la lunette parcourt toute seule une grande partie du limbe, emportée par le contre-poids N.

Lorsqu'on veut arrêter la lunette à une certaine hauteur, on se sert d'une main, ou agraffe de cuivre T, qui embrasse le limbe, dessus et dessous, et qui fait ressort par-dessous; elle se fixe par une vis de pression qui la serre sur le limbe; alors en tournant la vis de rappel, qui passe au travers de T, on fait avancer la lunette, jusqu'à ce que l'astre dont on observe la hauteur soit sur le fil horizontal de la lunette; on voit alors sur une plaque X qui tient à la lunette, et qui porte un vernier (2342), le nombre de degrés et de minutes, et même les quarts de minutes; le reste s'estime facilement à 2 ou 3″ près (2345).

2332. M. Bird, célebre artiste de Londres, a fait plusieurs quarts-de-cercles de 8 pieds de rayon ou 7 $\frac{1}{2}$ pieds de France, un pour Greenwich, deux pour Oxford, deux pour Petersbourg et Manheim, et deux pour Paris; feu M. Bergeret, receveur général des finances, en fit faire un au commencement de 1775, qui a été acquis par l'école militaire en 1786, et dont M. d'Agelet a déja fait un grand usage;

l'erreur des divisions ne va presque jamais au-delà de deux secondes : celui de Padoue est de M. Ramsden, qui en a fait un pour Vilna et un pour Milan. Sisson fit, en 1770, un arc mural de 142°, pour l'Observatoire du roi, à Richmond ; il est mort vers 1780. Bird a fait aussi deux muraux de 6 pieds pour Gottingue et pour Cadix, et M. Ramsden en a fait deux, dont un est à Blenheim ; et tourne sur un axe vertical; c'est une des plus belles machines d'astronomie que l'on ait jamais faites. Les muraux de Bird étoient déja si parfaits, que le gouvernement d'Angleterre acheta sa méthode, et la publia en 1767 (*The method of dividing, etc. London, by Jonhn Nourse*, 1767, *in*-4°) : elle a été traduite en françois. Dans la plupart de ces quarts-de-cercle, on a deux divisions par lignes (2345), et quelquefois une division par points entre les deux autres; l'alidade qui est en X (FIG. 155) est percée alors vers le milieu, pour qu'on ait la facilité d'y tendre un fil qui se place sur les points.

Après qu'on a observé une étoile, on emploie un micrometre extérieur (2335) pour trouver ce qu'il s'en faut que la lunette ne soit sur le point, ou le chemin qu'il faut lui faire faire pour qu'elle y parvienne, et l'on ajoute cette quantité à celle qui est indiquée par le point, pour avoir la hauteur de l'étoile. Pour qu'un mural placé du côté du midi serve aussi pour les étoiles boréales, Godin proposoit de mettre au bout de la lunette un miroir incliné de 45°. (*Mém.* 1733).

2333. UN CERCLE ENTIER, placé dans le méridien, donneroit encore plus d'exactitude ; Romer le proposoit en 1700 (*Miscell. Berolin, Tom. III, pag.* 277) ; Mayer l'indiquoit pour la marine (4175); M. Bugge en a décrit un de 4 pieds, qu'il a fait faire à Copenhague (*Observations de* 1784) ; et M. Ramsden, le plus célebre ingénieur qu'il y ait actuellement pour les grands instrumens, ne veut plus faire que des cercles entiers; il en a fait un de 5 pieds, en 1788, pour M. Piazzi, astronome de Palerme; il en fait actuellement un de 8 pieds pour Paris, et un de 11 pour Dublin. On y trouve plusieurs grands avantages qu'on ne peut avoir avec un quart-de-cercle : 1°. on peut tourner le cercle entier, et le rendre parfaitement plan, au lieu qu'un quart-de-cercle est toujours gauche, ou voilé dans quelques parties de son plan ; on ne peut le vérifier que par des hauteurs correspondantes, et il faudroit en avoir à tous les points, au lieu que le cercle est tourné rond sur son axe même, il n'y a jamais d'erreur : 2°. on peut vérifier la position du centre par les deux points diametralement opposés, au lieu que dans un quart-de-cercle, le centre peut s'user et se fausser sans qu'on ait aucun

moyen de le vérifier : 3°. on peut s'assurer que l'axe est perpendiculaire au plan, et qu'il est bien horizontal : 4°. on a deux points pour chaque observation, un en haut et un en bas : 5°. il est plus facile de diviser; on peut reconnoître même l'inégalité des divisions : 6°. la dilatation est uniforme, et ne produit aucune inégalité dans les divisions : 7°. on peut retourner le cercle tous les jours, et vérifier le premier point de division : 8°. si l'on met un cercle horizontal au dessous, on peut avoir les azimuts, et observer les réfractions indépendamment de la mesure du temps : 9°. l'axe autour duquel il tourne, fait que ce cercle mural est encore un instrument des passages (2387). Par ce moyen, on peut, avec un cercle de 8 pieds de diametre, s'assurer d'une seconde, tandis qu'avec un quart-de-cercle de 8 pieds de rayon, l'on pourroit se tromper de 4 à 5″. Le cercle dont je viens de parler est placé dans un chassis de quatre colonnes, et ce chassis tourne sur deux pivots, un en haut et l'autre en bas, et on le place dans le méridien par une piece de cuivre, contre laquelle il est arrêté. L'axe est soutenu sur des roulettes et des ressorts qui ne laissent qu'une petite partie du poids de l'instrument sur les véritables pivots qui reglent la situation et le mouvement du cercle. Enfin ce cercle tourne sur un cercle horizontal, avec lequel on peut avoir l'azimut, qu'on n'a pu observer exactement jusqu'ici.

Des différentes Divisions du Quart-de-cercle.

2334. Il y a quatre méthodes pour subdiviser dans un quart-de-cercle, l'intervalle d'une division à l'autre, qui est de 5′ ou de 10′ : 1°, le micrometre intérieur; 2°, la vis extérieure; 3°, les tranversales avec une alidade divisée; 4°, la division de vernier.

Le micrometre d'un quart-de-cercle mural est le même que pour un quart-de-cercle mobile, et nous en donnerons la description (2366); on l'a employé en France dans plusieurs quarts-de-cercle muraux.

2335. La vis extérieure ou micrometre extérieur, a été employée en Angleterre dans les muraux de 8 pieds et dans les grands secteurs (2381). La vis T (FIG. 155), destinée à mouvoir la lunette, porte un petit cercle ou cadran de laiton, divisé, qui est fixé sur la vis, et qui tourne avec elle. Il y a un index placé à frottement dur sur la monture, et qui ne tourne point avec le cadran et la vis; quand on a observé la hauteur d'une étoile en la mettant sur le fil de la lunette, et qu'on veut savoir le nombre de secondes qui y répond, on place l'index sur zéro, ou sur le commencement de la division du cadran;

cadran ; l'on fait tourner la vis avec son cadran jusqu'à ce que l'alidade X, ou la ligne de foi tombe exactement sur un des points de la division, et le nombre de secondes qui a passé sur le cadran, en le faisant ainsi mouvoir, s'ajoute avec les degrés et minutes qui répondent au point de la division. Si les pas de la vis ne sont pas tels, qu'un tour fasse exactement une minute, on divise le cadran en conséquence des filets de la vis.

2336. La division par transversales droites est fort ancienne, elle tire son origine de l'échelle géométrique dont on ignore l'auteur. Tycho-Brahé nous apprend qu'avant lui l'on s'en servoit pour diviser les fleches, arbalêtes, ou bâtons de Jacob. Digges l'attribue à Cantzler (*Alae seu Scalae mathem.* 1573); Tycho, qui en parla pour la premiere fois dans son Traité sur la comete de 1577, dit qu'il la tenoit d'un habile professeur de Leipsick, nommé Homélius, qui l'employoit dans son échelle géométrique. Tycho s'en servit dans presque tous ses instrumens ; mais en 1572, il ne l'avoit pas encore employée.

2337. Quant aux transversales circulaires, qui prolongées passeroient par le centre de l'instrument, et qui sont géométriquement plus exactes, Hévélius attribuoit cette invention à Benoît *Hedraeus;* mais Morin, dans son livre intitulé : *Longitudinum caelestium atque terrestrium scientia,* imprimé plus anciennement, et dès 1634, l'avoit attribué à Jean Ferrier, artiste industrieux ; c'est probablement le même dont parle Clavius dans la préface d'un petit traité qui est à la fin des huit livres de sa Gnomonique ; celui-ci étoit Espagnol, et avoit imaginé une méthode nouvelle et ingénieuse pour tracer les cadrans solaires (*Mém. de Marseille*, *pag.* 9).

2338. La méthode des transversales s'emploie encore dans quelques muraux, et dans les quarts-de-cercles mobiles, lorsqu'on n'a ni alidade ni micrometre. Soit ALDE (FIG. 145), une portion du limbe d'un quart-de-cercle, LB un arc de 5 minutes qu'il s'agit de subdiviser, AL une portion du rayon, ou de l'alidade qui porte la lunette du mural, ou bien le fil à plomb dans un quart-de-cercle mobile, qui tombe par exemple sur 4° 0′, c'est-à-dire sur les points A et L, en supposant le quart-de-cercle dirigé à 4° de hauteur. Si l'on éleve la lunette de $2' \frac{1}{2}$; il coupera la transversale AB sur le milieu H de sa longueur, et il sera sur le milieu de l'arc LB ou AC ; et par là il indiquera que la hauteur est plus grande que 4 degrés, et cela de la moitié de LB ; c'est ainsi qu'on substitue les divisions d'une ligne AB qui a deux pouces de long, à celles d'une petite ligne LB, qui, à cause de son extrême petitesse, ne pourroit se diviser facilement.

2339. La hauteur AB devant être divisée en parties égales aussi bien que tous les rayons, tels que ED, etc. on se sert dans les quarts-de-cercles mobiles de plusieurs cercles concentriques, et parallèles à CE et à BD; mais dans les muraux, il est bien plus commode de ne diviser que la seule alidade AL, comme on le voit dans la figure 145; elle peut être divisée sur la hauteur en 30 parties, ce qui est très facile en lui donnant 15 à 20 lignes de hauteur, ainsi qu'au limbe du quart-de-cercle; si les transversales AB de l'instrument sont tirées de 5 en 5', l'alidade AL, en parcourant l'espace LB de 5', rencontrera la transversale AB successivement dans les points marqués 1, 2, 3, 4; lorsqu'elle sera au point 1, elle aura fait une minute ou un cinquieme de l'espace qu'il y a de L en B, et ainsi des autres minutes; on voit même que chaque intervalle d'une minute étant divisé en 6 parties égales sur l'alidade, on pourra appercevoir si l'alidade AL, au lieu de rencontrer la transversale AB au point 1, ne la rencontre qu'à un sixieme de l'intervalle qu'il y a depuis A jusqu'en 1, et si elle est à $\frac{1}{30}$ de l'intervalle qu'il y a de A en C, c'est-à-dire à 10".

2340. Les transversales AB à la rigueur ne doivent pas être divisées en parties égales, parceque AC est plus petit que LB, étant une partie d'un cercle de moindre rayon; mais cette inégalité est insensible dans la pratique; car si le point H de la ligne AB est celui qui répond à la moitié de LB, la partie AH doit être plus petite que HB d'une quantité égale seulement à la moitié de AB, multiplié par $\frac{LB - AC}{LB + AC}$, ce qui seroit aisé à démontrer. C'est pour y remédier qu'on avoit proposé des transversales circulaires (2337).

2341. La division qui est aujourd'hui la plus employée est appellée dans la plupart des auteurs *division de Nonius*, quoique Nonius n'en soit pas l'auteur (421) : mais il en avoit imaginé une qui eut beaucoup de célébrité, et qui pouvoit conduire à celle que nous avons aujourd'hui. Voyez son traité *de Crepusculis*, imprimé en 1542, et Clavius *Geom. pract.* Le véritable auteur de la nôtre dans son état actuel fut Pierre Vernier, châtelain de Dornans (ou Ornans) en Franche-Comté, qui la publia dans un petit ouvrage imprimé à Bruxelles en 1631, intitulé : *La construction, l'usage et les propriétés du cadran nouveau.* Voyez à ce sujet une dissertation du P. Pézenas qui renferme beaucoup de choses curieuses sur les instrumens de mathématiques (*Mémoires rédigés à l'Observatoire de Marseille, année* 1755, seconde partie, *pag.* 8 *et suiv.*), et les notes de Benjamin Robins sur l'Optique de Smith; je crois donc qu'il est juste de

rétablir le véritable auteur dans ses droits, et d'appeller Vernier au lieu de Nonius, la piece qui forme la division dont il s'agit (a).

2342. Le vernier est une piece de cuivre CDAB (FIG. 156), (c'est la petite piece X de la *figure* 155 qui tient à lunette, et qui est représentée séparément); on voit que la longueur CD du vernier est divisée en 20 parties égales; mais elle est placée sous une portion du limbe qui contient 21 divisions, c'est-à-dire qu'on a pris la longueur de 21 divisions du quart-de-cercle, et qu'on a divisé cette longueur en 20 parties seulement; ainsi la premiere subdivision ou la seconde ligne de la piece de vernier, en commençant au point D, qui est marquée 15, est un peu en arriere ou à la gauche de la premiere division du limbe, et cela de la vingtieme partie d'une des divisions du limbe, ce qui fait 15″. La seconde division du vernier est à gauche de la seconde division du limbe, et cela du double de la premiere différence, ou de 30″, et ainsi de suite, jusqu'à la 20ᵉ et derniere division du vernier à gauche, ou les 20 différences étant accumulées, chacune de la vingtieme partie d'une division du limbe, cette division se trouve exactement d'accord avec la 21ᵉ ligne du limbe du quart-de-cercle.

2343. Il faudra donc pousser l'alidade qui porte le vernier d'une vingtieme partie de division, ou de 15″, à droite, pour faire concourir la seconde ligne du vernier avec une des divisions du limbe; de même en la poussant de deux vingtiemes ou de 30″, il faudra regarder la seconde division de l'alidade, et ce sera celle qui con-

(a) M. Magellan se plaint avec aigreur de cette innovation (*Description des octans*, 1775, *pag.* 140); mais cette plainte est injuste, et ne pouvoit être faite que par un Portugais, c'est-à-dire un compatriote de Nonius. M. Bailly (*Hist. de l'astr.*) regarde la division de Vernier, comme étant celle de Nonius, perfectionnée, et le P. Pézenas (*Astr. des marins*, *pag.* 83) cite le P. Clavius comme ayant proposé de diviser six parties en cinq; mais ni l'un ni l'autre n'avoit pensé à en faire une petite division mobile, et je regarde comme idée très neuve celle de substituer un seul petit arc à la place des vingt grandes circonférences de Nonius, et de mettre cette division sur l'alidade mobile; c'est une découverte précieuse, à laquelle personne que Vernier ne peut avoir de droit; elle a un mérite indépendant de celui des nombres inégaux de Nonius, que M. Méguié a même abandonnés dans d'excellens instrumens; il se contente d'un grand nombre de petites parties égales, comme de 10″ en 10″, mises sur l'alidade, en sorte que ce qu'il a emprunté de Vernier n'a plus aucun rapport avec les nombres de Nonius et de Clavius; il ne laisse pas de conserver à Vernier la gloire de la premiere idée, en appellant comme nous cette petite division mobile un vernier. Par ce moyen l'on ne divise la circonférence qu'en degrés, et l'on évite de multiplier les erreurs de divisions. On divise un seul degré de 10″ en 10″, ce qui est facile avec une machine à diviser les lignes droites.

courra avec une division du limbe. Ainsi l'on jugera que le commencement D du vernier, qui est toujours l'index ou la ligne de foi, a avancé de 2 divisions ou de 30″ à droite, quand on verra que c'est la division marquée 30 sur le vernier, qui correspond exactement à une des lignes du quart-de-cercle.

2344. On peut aussi prendre 19 au lieu de 21, pour les diviser en 20 sur le vernier. Alors on emploie l'autre bout du vernier, ou la partie gauche pour servir de ligne de foi, parceque les points de concours se suivent dans un sens différent. Quelquefois on met la ligne de foi dans le milieu du vernier, alors la moitié des subdivisions se compte par le concours des lignes de la gauche, et l'autre moitié par celles de la droite.

2345. Par le moyen d'un vernier fait avec soin, l'on distingue un centieme de ligne (a); et sur le limbe d'un quart-de-cercle de 5 pieds divisé de 5 en 5′, l'on voit immédiatement 15″; l'on estime ensuite jusqu'à 3 ou 4″, à la vue; cette méthode est aujourd'hui généralement adoptée, comme la plus parfaite de toutes, et on l'emploie même pour les quarts-de-cercles mobiles, à la place du micrometre (2366).

J'ai placé au-dessous du quart-de-cercle et dans sa grandeur naturelle (FIG. 156), la plaque de cuivre qui est fixée sous la lunette. Cette plaque porte deux verniers; la ligne supérieure CD divise les cinq minutes en 20 parties, comme je viens de le dire, c'est-à-dire de 15 en 15″. La ligne inférieure AB répond aux parties d'une autre division qui n'est pas de 90°, mais de 96 parties pour le quart-de-cercle; elle est employée en Angleterre à cause de la facilité des subdivisions.

Chacune des 96 portions du quart-de-cercle vaut 56′ 15″ de la division ordinaire; elle est divisée sur le limbe en 16 parties, et l'arc du vernier AB occupant 25 de ces divisions, et étant divisé lui-même en 24, donne immédiatement des parties dont la valeur est de 8″ 47‴ $\frac{1}{2}$. De cette maniere on peut facilement construire une table de réduction qui serve à trouver par le moyen de cette seconde division les degrés, minutes et secondes, comptés à la maniere ordinaire, et avoir une même hauteur de deux manieres différentes, ce qui fait une vérification.

(a) M. Smeaton en décrivant la méthode de Hindley, horloger d'Yorck, dit qu'il croit qu'on peut aller jusqu'à la 4000ᵉ partie d'un pouce, ce qui ne fait qu'un 400ᵉ de ligne, et produit à peine une seconde sur un rayon de 4 pieds; il pense qu'on doit préférer des instrumens de cette grandeur, à cause de l'embarras et du poids de ceux qui sont plus grands (*Philos. Trans.* 1786, *pag.* 23).

Description du Micrometre.

2346. LE MICROMETRE [a] est un instrument composé de plusieurs fils placés au foyer d'une lunette, pour mesurer par leur intervalle la grandeur de l'image qu'on y apperçoit ; il y a plusieurs sortes de micrometres que je décrirai séparément, en commençant par les plus simples.

2347. La premiere idée du micrometre fut donnée par Huygens en 1659 (*Systema Saturnium*, *pag.* 82). Après avoir parlé des diametres des planetes qu'il avoit observés, il dit que Riccioli avoit trouvé le diametre de Vénus trois fois plus grand que lui ; et pour justifier sa détermination, il rend compte de la maniere dont il s'y est pris pour mesurer les diametres des planetes : voici ce qu'il en dit : « Dans les lunettes formées de deux verres convexes il y a un « endroit où l'on peut placer un objet aussi petit et aussi fin qu'on « voudra ; il y paroîtra très distinct, très bien terminé. . . . . Si à « ce foyer l'on place d'abord un anneau dont l'ouverture soit un peu « plus petite que celle de l'oculaire, on verra par cet anneau tout « le champ de la lunette, c'est-à-dire tout l'espace circulaire qu'on « apperçoit dans le ciel en regardant par cette lunette, et cet espace « sera terminé par une circonférence exacte dont le diametre est « facile à mesurer. L'horloge oscillatoire que nous avons imaginée « depuis peu est très propre à cet effet ; on sait qu'il passe un de- « gré de la sphere en 4′ de temps, ou une minute en 4″ de temps. « Si donc une étoile a employé 69″ à parcourir le champ de la lu- « nette, on sera sûr que cette lunette occupe 17′ $\frac{1}{4}$, et telle est celle « dont nous nous servons. On prendra alors une ou deux petites « plaques ou lames, dont la largeur aille en diminuant ; on percera « le tube de la lunette de chaque côté à l'endroit dont nous avons « parlé, pour y placer les petites lames en travers [b]. Lorsque l'on « voudra mesurer le diametre d'une planete on examinera quelle « largeur doit avoir cette lame pour cacher entièrement la planete, « et cette largeur étant comparée au diametre entier de l'ouverture « de l'anneau, par le moyen d'un compas très fin, fera connoître « le diametre de la planete en minutes et en secondes. »

2348. Ainsi le micrometre de Huygens ne consistoit qu'en une petite lame qu'il faisoit glisser sur le diaphragme, ou petit anneau

(a) Μικρὸς, *parvus*, parcequ'il sert à mesurer de petits angles comme d'un demi-degré.

(b) *Virgulæ*; petites lames de cuivre, ou d'une autre matiere.

qui circonscrit l'ouverture; cette lame cachoit par sa largeur l'image qu'on vouloit mesurer, et en donnoit ainsi le diametre. Auzout imagina en 1666 de renfermer l'image entre deux fils qu'on rapprochoit l'un de l'autre; les premieres observations faites avec ce nouvel instrument furent imprimées [a] en Angleterre même. (*Phil. Trans. n°.* 21). On voit une lettre d'Auzout à Oldenbourg, du 28 décembre 1666, dans laquelle il dit qu'il s'étoit occupé l'été à mesurer les diametres du Soleil et de la Lune. Townley écrivit ensuite qu'il avoit trouvé une semblable invention dans les papiers de Gascoigne (*Phil. Trans. n°.* 25); et M. Bevis assure qu'il en a trouvé la preuve dans une lettre écrite par Gascoigne en 1641, dont l'original étoit dans la bibliotheque de milord Maclesfield. Quoi qu'il en soit, il est sûr qu'Auzout inventa de son côté le micrometre et qu'il en fit usage; il publia cette invention, il en enrichit l'astronomie, et c'est à lui qu'on doit en faire honneur.

2349. Avant que de donner la description des micrometres, il faut parler des *Réticules*, qui en sont l'origine; il y en a de deux especes: le réticule de 45°, et le réticule romboïde. Le champ d'une lunette est représenté par le cercle ACBE (FIG. 138), on y place un chassis, dans lequel il y a quatre fils tendus. Le fil AB est destiné à représenter le parallele à l'équateur ou la direction du mouvement diurne des astres; le fil horaire CE, qui lui est perpendiculaire, représente un cercle horaire ou un cercle de déclinaison; et les fils obliques NO, LM, font des angles de 45° avec les deux premiers.

2350. Lorsqu'on veut mesurer la différence d'ascension droite, entre deux astres, pour connoître la position d'une planete par le moyen de celle d'une étoile, on incline le fil AB, de maniere que le premier des deux astres le suive et le parcoure exactement; et l'on observe l'heure, la minute et la seconde où cet astre passe au centre P, ou à l'intersection des fils. Quand le second astre vient à traverser la lunette à son tour, il décrit une autre ligne VFDGR, parallele à APB; on compte l'instant où il arrive en D, c'est-à-dire sur le même cercle de déclinaison CDPE, où l'on a observé le premier astre en P, et la différence des temps donne celle des ascensions droites (2505).

2351. Pour trouver la différence de déclinaison des deux astres, ou la perpendiculaire PD, comprise entre AB et VR, on compte le moment où le second astre passe en F et en G; l'intervalle de temps converti en degrés, et multiplié par le cosinus de la déclinaison de l'astre (3879) donne l'arc FDG, dont la moitié FD est égale à DP,

(a) Maniere exacte pour prendre les diametres des planetes, Paris, 1666.

à cause de l'angle FPD supposé de 45° (2507), c'est la différence de déclinaison (2137).

2352. Bradley a substitué le réticule romboïde au réticule de 45°, et c'est aujourd'hui le plus usité parmi les astronomes. Le réticule de 45° a deux inconvéniens que Bradley a voulu éviter; c'est 1°. de rendre inutile une partie du champ de la lunette; savoir, les deux arcs NCL, MEO, qui se trouvent en haut et en bas; 2°. d'embarrasser le centre P de la lunette par l'intersection de quatre fils; si un petit astre y passoit, on auroit peine à le distinguer.

2353. Le réticule de Bradley est formé d'un rombe BEDF (FIG. 147), dont l'une des diagonales est double de l'autre. Pour le tracer, nous supposerons un carré AGHC, dont les côtés AC et GH soient divisés chacun en deux parties égales, en D et en B. Du point B, l'on tire aux angles A et C les lignes BA, BC, et du point D aux angles G et H, les lignes DG, DH; ces quatre lignes formeront par leurs intersections le rombe BEDF; EF est la moitié de AC, et par conséquent la moitié de BD; si en quelque endroit de ce réticule on tire une ligne *ef* parallele à la base EF, la perpendiculaire BD sera égale à la base *ef*, comme BD est égale à AC, c'est-à-dire que la largeur d'une partie de ce rombe est toujours égale à la hauteur.

2354. Lorsqu'on veut comparer avec ce réticule une planete à une étoile, on fait en sorte que le premier des deux astres parcoure dans son mouvement diurne l'espace EF; on trouve la valeur de EF en degrés et en minutes, en convertissant l'intervalle de temps observé, et multipliant par le cosinus de la déclinaison (3879); par là on sait combien le point B est éloigné du milieu du fil EF, ou du centre de la lunette. Le second astre venant à traverser aussi la lunette, on compte exactement le temps qu'il a employé à passer de *e* en *f*, et l'on a la grandeur de *ef*, ou B*d*, et par conséquent M*d*, qui est la différence en déclinaison des deux astres (Voyez *l'exemple*, *art.* 2517).

2355. Ce réticule sert à comparer les planetes et les cometes aux étoiles fixes, qui ont à-peu-près la même déclinaison, ou bien à comparer les petites étoiles, dont on veut dresser un catalogue, à quelque étoile principale, qui est à-peu-près sur leur parallele. L'abbé de la Caille, qui s'en est servi au Cap de Bonne-Espérance en 1751, pour observer près de dix mille étoiles dans la partie australe du ciel, l'avoit fixé dans la lunette d'un quart-de-cercle. On peut également le placer dans une lunette méridienne (2391), ou dans une lunette parallatique (2402).

2356. Pour pouvoir distinguer dans l'obscurité si l'étoile a passé

au dessus ou au dessous de la ligne EF du milieu, sans éclairer les fils, on a l'attention de conserver une largeur considérable à la lame EB du réticule, ou même de la masquer entièrement, tandis que les trois autres côtés sont les plus minces qu'il soit possible. Lorsque l'étoile, après s'être cachée derriere une des lames du réticule, reparoît aussitôt de l'autre côté, l'on est assuré qu'elle est dans la partie inférieure EDF; mais s'il s'écoule plusieurs secondes sans qu'on l'apperçoive, on juge qu'elle est dans le segment supérieur EB.

Toutes les lignes ponctuées GA, AE, ne sont que des lignes auxiliaires et accessoires, que l'on trace sur une platine ronde de cuivre, destinée à former le réticule; et lorsqu'il est tracé, l'on abat toutes les parties inutiles, on ne conserve qu'un anneau circulaire BLDK, de la grandeur du champ de la lunette, et la partie romboïde BEDF; celle ci ne fait avec cet anneau circulaire BLDK qu'une seule piece, qui se place au foyer commun des deux verres. On y met, si l'on veut, deux fils BD, LK, quoiqu'à la rigueur on puisse s'en passer si la lunette est bien placée.

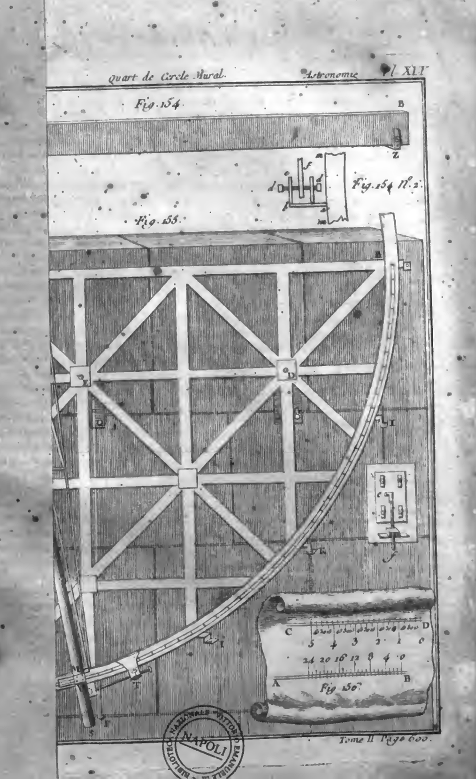
2357. Romer imagina dans le dernier siecle une espece de micrometre propre à observer les éclipses, en divisant en 12 parties égales les diametres du Soleil et de la Lune, malgré leurs changemens (*Historia acad. pag.* 145). Cette lunette, dit Horrebow, est composée de deux objectifs qu'on peut éloigner l'un de l'autre, *Elongato objectivo interiori à cratula* (a), *et contrahendo tubum, videbitur filaris cratulae quadratum esse auctius* (Horrebow *Basis astron. pag.* 88). On trouve dans le même livre de Horrebow la description de plusieurs intrumens de Romer, et en particulier de la lunette double, *Tubus reciprocus*, (*Ib. pag.* 97); on peut l'employer à corriger les divisions des instrumens, à observer les équinoxes, et à trouver deux points qui soient opposés, et en ligne droite avec l'axe d'une lunette, comme la Condamine l'a remarqué. On peut faire la même chose avec la lunette d'épreuve (2503).

2358. La Hire proposoit aussi un réticule qui changeoit de grandeur en employant deux objectifs qu'on pouvoit écarter l'un de l'autre. Il préféroit de l'employer au lieu de fils (*Mém.* 1701).

Brander, artiste d'Augsbourg, en a fait avec des lignes déliées, tracées sur du verre, dont Lambert a donné la description en 1769, et dont M. Lichtenberg fait mention dans le volume des œuvres posthumes de Mayer, pag. 105. Mais les bornes de ce livre n'admettent que la description des instrumens les plus usités.

(a) *Cratula*, c'est la boîte qui contient le réticule.

2360.


Fig. 154
B
Z
Fig. 154 N.º 2.
Fig. 155.
D
C
D
5 4 3 2 1 0
24 20 16 12 8 4 0
A
B
Fig 156

2359. Les micrometres dont on se sert le plus sont de deux sortes : les uns qu'on applique à des lunettes mobiles de 7 à 8 pieds pour mesurer des diametres, ou des différences d'ascension droite et de déclinaison ; les autres qu'on met aux quarts-de-cercle et qui sont plus composés : je commencerai donc par les premiers. Je décrirai le micrometre dont je me sers depuis 1753 ; il est presque semblable à celui qui avoit été décrit en 1738, dans l'Optique de Smith et ensuite dans l'Encyclopédie.

Le micrometre est représenté dans les figures 157 et 158, vu des deux faces ; AB figure 157, est une platine de 8 pouces de long sur environ quatre pouces de large : CD est une vis de 5 pouces sur 4 lignes $\frac{1}{2}$ de diametre, qui porte 48 filets sur chaque pouce ; c'est la partie essentielle du micrometre. Cette vis CD passe dans un écrou EF d'environ trois pouces de long, et dans le milieu on réserve une moitié d'écrou G, qui fait ressort contre la vis, pour en diminuer le jeu, et pour la nettoyer. L'écrou EF porte un chassis mobile HIKL, qui a deux pouces 8 lignes de large, et autant de hauteur ; il est contenu et guidé par le côté IK, dans une coulisse formée par une regle de cuivre AN, qui recouvre le bord de la platine du micrometre.

2360. A l'extrémité du chassis HIKL, on place une lame *m n*, fixée sur le chassis avec deux vis, et qui porte deux petits bras, pour tendre le fil mobile ou le *curseur.* Sur l'extrémité des deux petits bras, il y a deux autres pieces K et L, de 3 lignes de long sur 2 lignes de large, qui serrent les extrémités du fil ; les deux pieces KL portent le curseur dans des entailles très fines, faites à leur extrémité et sur leur épaisseur, afin que le fil KL puisse venir s'appliquer immédiatement contre le fil fixe PO pour donner le commencement de la division. Le curseur KL rase la platine du micrometre ; car dans ce micrometre, les fils qui sont d'argent ne passent point l'un devant l'autre, comme dans celui du quart-de-cercle (2375) ; ils sont seulement dans un simple contact, quand l'index marque zéro, et commence la numération. Le fil fixe OP est aussi porté sur une petite lame QR, dont les deux bras ont à leur derniere extrémité et sur leur épaisseur une très petite rainure, pour recevoir seulement l'épaisseur du fil qui est $\frac{1}{560}$ de pouce ; ainsi le fil fixe est précisément dans le même plan que le fil mobile, et peut s'y appliquer immédiatement, sans qu'il y ait aucun intervalle entre deux.

Quand on veut placer les fils sur le micrometre, on dévisse la lame *n m ;* on la courbe tant soit peu ; on serre la vis L qui presse le fil ;

la lame se redresse ensuite par son élasticité, et opere une tension suffisante dans le fil. Il en est de même du fil fixe OP.

2361. La vis CD est une piece très difficile à faire, on exige que son diametre soit très gros pour qu'elle ne se fausse pas quand on taraude, et que les filets soient très fins, pour qu'ils soient plus égaux. Un seul taraud ne suffit pas pour former les filets d'une excellente vis ; il faut pour bien corriger les inégalités des pas de vis, qu'un taraud serve à faire un écrou, ou des coussinets de filiere : dans ces coussinets on forme un second taraud ; celui-ci sert à former d'autres coussinets ; par ce progrès, les inégalités des pas de vis vont toujours en diminuant, et les diametres des vis grossissent de plus en plus. Quand la vis est faite, on doit la vérifier encore (2534), pour en connoître jusqu'aux moindres inégalités. Toutes ces précautions s'emploient rarement, mais nous avons dû les recommander ici et les décrire.

Cette vis CD est reçue en D sur la pointe d'une grosse vis, qui est fixée dans un tassau T, et qui contient la vis CD dans une situation constante. La grande vis CD est reçue par sa partie supérieure dans un collet de cuivre, fixé à l'angle de la platine ; la tête de la vis passe au travers de la boîte *c d*, qui renferme les roues de la cadrature, et porte carrément une aiguille S, et un bouton *b*, ou rosette en grénetis, qui sert à faire tourner la vis ; l'aiguille S marque sur la platine extérieure *c d*, les centiemes de tour.

2362. La boîte *c d* contient une cadrature composée de 3 roues et de 3 pignons, pour faire marquer les tours de vis que l'on voit au travers de l'ouverture *e* faite sur la boîte. La grande vis porte un pignon de 16, qui engrene dans une roue de 40 dents, laquelle a un pouce de diametre, et porte sur un pivot fixé dans le fond de la boîte. Cette roue de 40, porte un pignon de 10, qui engrene dans une roue de 50 portée également sur un pivot fixé dans le fond de la boîte ; cette roue de 50 porte un autre pignon de 10 ; celui-ci conduit une roue de 80, qui est dans le milieu du cadran, et au travers de laquelle passe la tête de la vis. Sur cette roue de 80, est fixé un cadran qui a $2\frac{3}{4}$ pouces de diametre, dont la circonférence est divisée en 100 parties, et dont les chiffres paroissent au travers de l'ouverture *e* pour marquer les tours de vis ; ce cadran ne fait qu'un tour, tandis que la vis en fait 100.

2363. Cette maniere de marquer les tours de vis est plus commode que celle de la fig. 159 (2367) ; car lorsque les pas de vis sont très fins, comme d'un quart de ligne, il est difficile de les

compter, au lieu que sur le cadran chaque division est très sensible, et le seroit encore davantage, si au lieu de diviser le cadran en 100, on le divisoit seulement en 50 parties, en lui donnant la 50ᵉ partie du mouvement de la vis : il suffiroit pour cela de réduire à 40 dents, la roue de 80.

2364. Le micrometre entier, c'est-à-dire la vis CD, les fils, et la boîte *d c* sont portés sur une platine, à laquelle on ménage un petit mouvement d'inclinaison [a], représenté dans la fig. 158. Le micrometre y paroît dans l'autre sens, c'est-à-dire par le côté de la platine fixe qui doit tenir au tuyau de la lunette, et qui regarde l'objectif; AB et CD sont deux plaques repliées, dont les ailes entrent dans les coulisses du porte-micrometre (2365); pour donner l'inclinaison, on emploie une piece EPF en demi-cercle, dont le centre G est à l'intersection des fils fixes. Ce demi-cercle est fixé par des vis E et F sur la platine mobile du micrometre; mais il a un rebord qui s'applique sur la platine fixe CA pour la contenir par son frottement; il empêche aussi que la platine mobile ne descende vers K, tandis qu'une piece H empêche qu'elle ne s'éleve, au moyen de la vis H, qui passe au travers d'une longue rainure pratiquée dans la platine fixe CDBA, mais recouverte par la piece H; cette rainure laisse à la platine mobile tout son mouvement latéral; la vis ne fait que passer au travers de la platine fixe pour entrer dans la platine mobile qui est au-delà.

La vis sans fin ON, portée sur la platine mobile, engrene dans une piece dentée L, qui est portée sur la platine fixe; et tandis que cette partie L est immobile sur la lunette, la vis NO incline le micrometre. La partie dentée étant de 16 à 17 lignes, elle donne environ 18° de mouvement, c'est-à-dire 9° de chaque côté; et cela est plus que suffisant pour faire parcourir exactement à un astre le fil du micrometre, quand la direction du fil s'écarte de celle du parallele que l'astre décrit.

2365. Ce micrometre se conserve dans une boîte; lorsqu'on veut en faire usage, on le place dans le porte-oculaire (FIG. 194). Le bout du tuyau AA entre dans le tuyau de la lunette; il porte une plaque de cuivre BB, qui a deux coulisses BC, BC, dans lesquelles s'engagent les deux rebords, ou les ailes des plaques repliées, qu'on a vues sur le micrometre en AB et CD, fig. 158 : elles y entrent à frottement dur, pour que le micrometre ne glisse pas. Le tube conique O (FIG. 194), est celui qui porte l'oculaire; il se termine par un petit œilleton E, c'est-à-dire un petit trou auquel on applique l'œil, en le

(a) J'ai vu à Londres, entre les mains du docteur Bevis, un ancien micrometre d'Hévélius, qui avoit un pareil mouvement d'inclinaison.

plaçant en E, dans un petit hémisphere concave. Ce tube O porte le verre oculaire, qui est logé et recouvert sur les bords par une vis circulaire, et ce tube est vissé sur la traverse DD, qui a dans le milieu une ouverture circulaire. Cette traverse DD porte deux petites regles de cuivre, qui glissent dans deux coulisses CD, CD, afin qu'en plaçant des oculaires de différens foyers, on puisse toujours mettre le tube O de l'oculaire à la distance convenable par rapport aux fils du micrometre; les différentes vues des observateurs, qui peuvent regarder dans une même lunette, exigeroient seules cette attention, de rendre mobile le tuyau des oculaires.

Les usages du micrometre seront expliqués dans le livre XIV, art. 2519 et suiv.

2366. Après avoir décrit le plus simple et le plus parfait de tous les micrometres, je passe à la description de ceux qu'on applique aux quarts-de-cercles, et aux secteurs astronomiques (2380), du moins suivant la méthode françoise. Cette méthode imaginée en 1714, par le chevalier de Louville, a été perfectionnée successivement par différens astronomes de l'académie. Le micrometre que je vais décrire fait partie d'un sextant de 6 pieds, dont l'abbé de la Caille se servoit avant moi, et avec lequel ce grand astronome a fait pendant dix ans ses meilleures observations.

Le micrometre est représenté séparément en AB (FIG. 159), avec toutes ses parties extérieures; la boîte porte deux bouts de tubes C et D, l'un du côté de l'œil O, l'autre du côté de la lunette. Le premier a 3 pouces $\frac{1}{3}$, il sert à recevoir le tuyau de l'oculaire; cette allonge du micrometre se termine par un rebord EF, ou platine carrée, dont les quatre oreilles sont percées, et se fixent sur le micrometre, avec quatre vis aux coins de cette embase; le bout de tuyau D a 2 $\frac{1}{2}$ pouces de longueur, plus ou moins; il est destiné à entrer dans la lunette du sextant pour l'assujettir derriere le limbe; il tient à la boîte du micrometre, aussi bien que l'autre bout de tube, par une embase et par quatre vis; il a un pouce et demi de diametre: c'est l'ouverture qu'exige une lunette ordinaire de six pieds; mais elle seroit de deux pouces et demi, si l'on employoit une lunette acromatique (2297), comme cela se fait actuellement.

2367. La boîte du micrometre a 5$\frac{1}{2}$ pouces de hauteur de G en H, 2$\frac{1}{3}$ de largeur, et 1 $\frac{1}{4}$ pouce d'épaisseur HH, elle se termine en haut et en bas par deux petites boîtes GP et HH, qui embrassent de tout côté le haut et le bas de la boîte principale, et qui y sont fixées par des vis: on voit une de ces vis en B. La partie du haut, où le dessus du micrometre est représentée séparément en V dans la

fig. 162, à côté du cadran R (FIG. 161), que l'on attache sur cette boîte.

On voit en I la plaque de l'index, qui porte vers son milieu une pointe, un trait, une fleur-de-lis, pour marquer l'élévation du fil mobile. Cette plaque tient au moyen d'une vis, sur le chassis intérieur et mobile (2378); elle monte et descend avec ce chassis, et l'on voit une rainure sur le côté MI de la boîte, où la plaque de l'index a la liberté de se mouvoir.

A côté de la plaque d'index I, on voit une autre plaque KK, fixée en dehors sur le côté de la boîte par deux vis; elle porte des divisions, qui sont de la même grandeur que les filets de la grande vis intérieure du micrometre, par exemple, de 35 sur un espace de dix lignes; et l'index I, qui monte et descend vis-à-vis de ces divisions, y fait voir le nombre des tours de vis. Les trous de cette plaque KK ont un peu plus de diametre que les vis qui y entrent, afin qu'on puisse donner du jeu à cette plaque, et faire correspondre exactement le milieu des divisions avec le concours des fils.

2368. On voit en L un trou, dans lequel on passe une clef pour corriger l'inclinaison du fil fixe (2377), s'il n'est pas parallele à l'horizon. Le trou M sert à incliner le fil mobile, pour le rendre parallele au fil fixe (2378). Au dessus de la boîte en N, il y a un troisieme trou, par lequel on éleve ou abaisse le fil fixe (2374).

2369. La boîte du micrometre est surmontée d'un cadran, ou cercle de 2 $\frac{1}{2}$ pouces de diametre, divisé en 100 parties, pour marquer les centiemes parties d'un tour de vis, au moyen de l'aiguille qui tourne avec la grande vis du micrometre. Le cadran est représenté séparément dans la fig. 161 en R; on y voit des trous en S pour la grande vis, en T pour la vis qui éleve le chassis fixe, et en *tt* pour les vis qui attachent le cadran sur le haut de la boîte. L'aiguille qui paroît sur le cadran dans la figure 159 a la facilité de se mouvoir par un frottement dur sur l'arbre de la vis, afin qu'on puisse la mettre sur le commencement de la division quand les fils sont exactement d'accord; mais pour qu'ensuite elle soit obligée de tourner avec la vis, on l'affermit contre la tête de cette grande vis par une autre petite vis de pression que l'on voit en H (FIG. 166); le frottement et la pression tiennent ainsi le collet G de l'aiguille assujetti sur la grande vis.

Au dessus de la boîte en A on voit une rosette, ou tête de cuivre en grénetis, qui entre carrément sur l'arbre de la grande vis et sert à la faire tourner; cette rosette est contenue sur l'arbre par une petite vis qui se voit au dessus et qui l'empêche de sortir: la rosette

est représentée séparément en R dans la figure 167 au dessous de l'aiguille.

2370. La boîte du micrometre, qui est destinée à s'attacher derriere le limbe d'un quart-de-cercle, se termine en avant et en arriere par deux rebords ou plaques de 6 à 7 lignes de large : on en voit une en PP (FIG 159); elle est percée de deux trous dans lesquels entrent les vis qui assujettissent sur l'instrument l'assemblage total du micrometre; ces deux rebords paroissent aussi en D fig. 160.

On voit en Q à 2 pouces environ du milieu de la boîte la trace de l'oculaire; il est placé dans un tuyau mobile qui entre dans le tube C du micrometre.

2371. Les deux fils qui doivent mesurer les intervalles célestes sont portés sur deux chassis différens, l'épaisseur intérieure de la boîte est divisée en deux parties ou deux loges par des languettes qui occupent de chaque côté toute sa hauteur, et dont on voit la coupe en E, E, (FIG. 160). Cette figure contient le plan du micrometre et de sa boîte qui est découverte par le haut; AA est le tube qui entre dans la lunette; BB celui qui reçoit le porte-oculaire; CC le tube de l'oculaire qui glisse dans le tube BB pour mettre l'oculaire à la distance convenable des fils; D et D sont les deux rebords ou plaques de 6 à 7 lignes de large, dans lesquelles passent des vis pour attacher le micrometre au sextant (2370); EE sont les deux languettes intérieures qui divisent en deux parties l'épaisseur FG de la boîte; la partie F de la capacité du micrometre qui est du côté de l'objectif reçoit le chassis fixe, et la partie G qui est vers l'oculaire est pour le chassis du curseur; *ffff* sont les vis qui tiennent les bouts de tubes fixés sur la boîte du micrometre par leurs embases (2366).

2372. Au fond de cette boîte on place un quadruple ressort qui repousse continuellement en haut le chassis du curseur, et empêche le jeu de la vis, c'est-à-dire l'inégalité qui a lieu quand elle tourne en sens contraire et qu'on appelle aussi le *temps-perdu*. Ce ressort est monté sur une plaque de cuivre HH (FIG. 164), de 26 lignes de long sur 5 lignes de large, qui remplit exactement la largeur et l'épaisseur d'une des loges de la boîte (2371); elle porte sur chacune de ses faces deux ressorts HR qui se croisent sans se toucher; chaque ressort est rivé par une extrémité sur la plaque HH, et l'autre extrémité est arrondie à l'extérieur pour soutenir et élever le chassis, sans que le frottement en soit dur et difficile; cette extrémité de chaque ressort s'élargit en R en forme de cuilleron pour occuper la largeur entiere de la coulisse, afin d'éviter le jeu ou le balottement des ressorts; les deux inférieurs portent sur le fond de la boîte; ils

sont aussi creusés en cuillerons, et leur extrémité convexe porte seule sur une plaque d'acier qui tapisse le fond de la loge.

On égalise ces 4 ressorts par le moyen d'un poids qu'on leur fait supporter horizontalement, et l'on affoiblit celui des deux ressorts qui, en résistant trop d'un côté, feroit prendre une direction oblique au chassis du micrometre ; par ce moyen le ressort pousse le chassis de bas en haut toujours verticalement.

2373. Il faut que ces ressorts soient doux et plians ; et l'on ne doit jamais faire parcourir au curseur que quelques minutes ; car le P. Liesganig dit avoir observé qu'il faut plus de parties de la vis pour un même nombre de secondes, quand le ressort est parvenu à sa plus forte tension, à cause de la plus grande résistance. Non seulement il faut plus de force, mais il faut tourner davantage. En conséquence il se contente de mettre sur une des faces du chassis mobile, deux ressorts qui fassent un frottement latéral toujours uniforme dans la boîte, et il ne met point de ressorts au dessous, à cause de l'inconvénient que je viens d'exposer ; mais cela ne remédie pas au jeu de la vis.

2374. Le chassis qui porte le fil fixe du micrometre est représenté en AA (FIG. 163) ; il a $4\frac{1}{3}$ pouces de hauteur de A en B, 2 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ de largeur AA ; il porte par en bas un ressort courbé CDC qui s'appuyant sur un ressort semblable CEC mis au fond de la boîte du micrometre, repousse continuellement ce chassis vers le haut, tandis que la partie supérieure du chassis est retenue en *f* ou par le cadran seul, ou par une équerre fixée sur la boîte du micrometre, et qui se replie sur la base de la vis, pour empêcher qu'elle ne s'élève et ne sorte par l'action du ressort CDC qui la repousse vers le haut. Cette vis *fg* passe dans une espece d'équerre *h* qui tient sur le chassis avec une vis, et un étoteau ou goupille qui entre dans un trou.

La vis supérieure *fg* sert à élever ou abaisser d'une petite quantité le chassis destiné à être fixe, et par conséquent le fil horizontal fixe HH, lorsque, par la vérification du quart-de-cercle (2552), on a trouvé que l'axe de la lunette ne fait pas un angle droit avec le rayon du commencement de la division, ou du zéro des hauteurs. C'est pour cela que nous avons fait remarquer un trou N (FIG. 159), au dessus du cadran (2368).

2375. Vers le milieu du chassis on voit le réticule ; c'est un anneau de cuivre dont le diametre extérieur RR est de 2 pouces, et l'ouverture HH de 14 lignes ; il porte deux fils à angles droits, l'un horizontal HH, et l'autre vertical VV. Cet anneau de cuivre qui porte les fils, a une épaisseur assez considérable pour passer au-delà

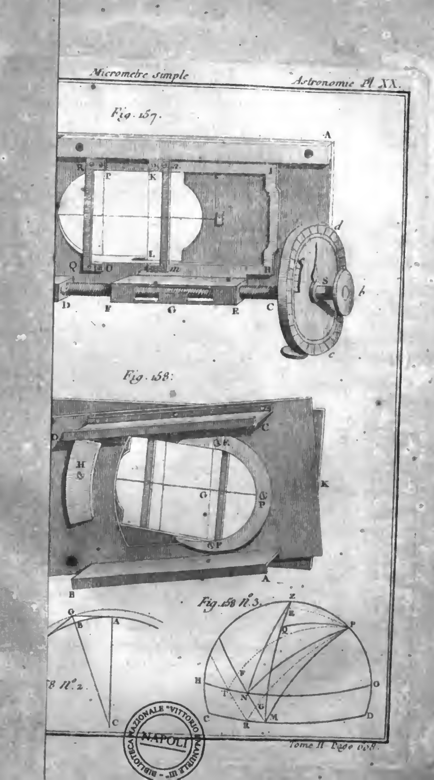
de la surface du chassis fixe AABB, afin que ces fils soient placés tout près du chassis mobile qui porte le curseur. Il ne doit y avoir qu'un intervalle suffisant pour que le curseur n'accroche pas le fil fixe en passant trop près; et pour cet effet, les fils doivent être presque noyés dans les petites rainures où ils sont placés, et ne pas déborder la surface du cercle de cuivre sur lequel ils sont tendus.

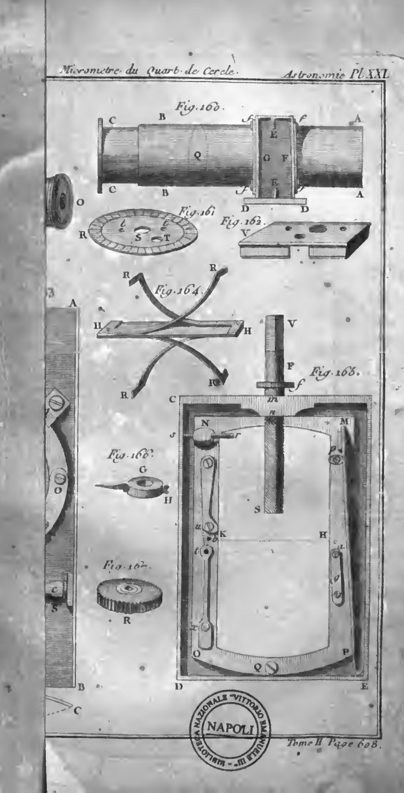
Le fil vertical VV est placé à la surface de l'anneau la plus voisine de l'oculaire (c'est le côté opposé à celui qu'on voit dans la figure); il passe par les trous *u u* pour être serré par ses extrémités sous les pieces de cuivre F et G, qui sont elles-mêmes serrées avec des vis contre le cercle du réticule; c'est la pression de ces vis qui tient le fil tendu. A l'égard du fil horizontal HH, il passe aussi par des trous K et L, et ses extrémités sont reprises et arrêtées sous les mêmes pieces de cuivre qui sont serrées avec d'autres vis en O et en P. Mais on a une attention de plus à l'égard du fil horizontal, qui est le plus important dans un micrometre : il faut que ce fil soit tendu très exactement, et pour cela on le fait passer aussi par le trou *i* d'une autre piece de cuivre QL, fixée en Q, et qui fait ressort par son extrémité; le fil ayant passé sur ce ressort est arrêté en P, et le ressort L qui tend à s'élever au dessus du chassis, retire le fil et le maintient toujours tendu.

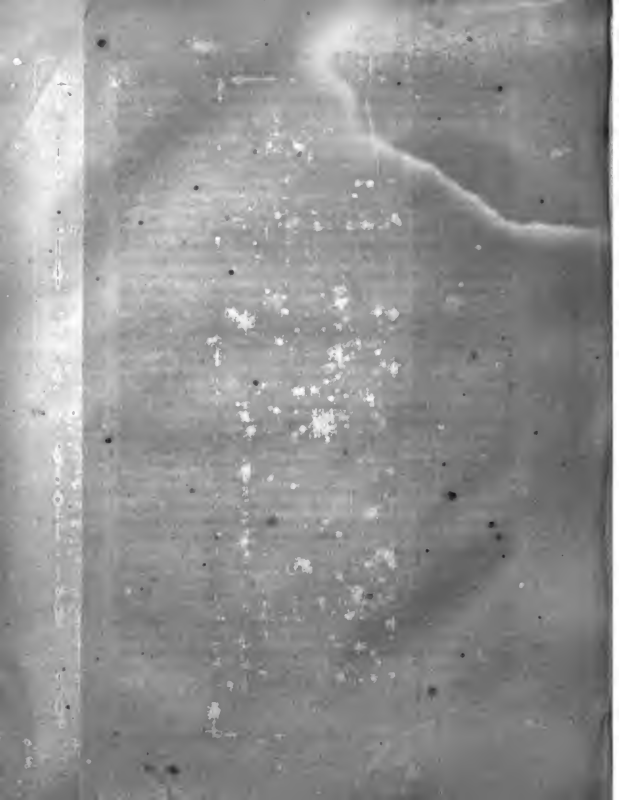
2376. Le réticule entier RR a la liberté de tourner un peu sur la plaque du chassis fixe; il est retenu seulement par deux pieces *d d* qui appuient sur le réticule sans l'empêcher de tourner; on peut y substituer deux vis, qui traverseroient l'épaisseur de l'anneau vers *dd* dans des trous allongés. Il est aussi contenu par un écrou *e* qui appuie sur sa partie inférieure; mais en même temps cet écrou *e* porte un étoteau ou une cheville de cuivre, qui entre dans une petite rainure faite de haut en bas sur le bord du réticule; l'écrou *e* est mis en mouvement par la vis ST qui est tangente au réticule, et il oblige le réticule à tourner de quelques degrés. C'est ainsi qu'on redresse le fil HH s'il se trouve n'être pas bien horizontal, ce qui doit se vérifier avec soin (2550).

2377. La vis ST, tangente du réticule, est arrêtée par son pied en T dans une base ou espece de crapaudine sur laquelle elle tourne, et par sa tête en S, au moyen d'une embase *c*, qui est arrêtée contre la paroi AB du grand chassis, renforcée dans cet endroit d'une petite épaisseur de cuivre. Quand le chassis est dans la boîte du micrometre, et qu'on veut incliner le réticule par le moyen de cette vis ST, on passe une clef ou un carré de fer par un trou marqué L dans la fig. 159, sur le côté de la boîte du micrometre, et qui répond

à


Fig. 157.
A
R
P
K
I
L
Q
O
m
H
d
S
b
D
F
G
E
C
c
Fig. 158:
D
C
H
G
K
P
A
B
Fig. 158 N.° 3.
Z
P
Q
H
F
T
N
G
O
C
M
D
R
G
B
A
58 N.° 2.
C


Fig. 160.
Fig. 161
Fig. 162.
Fig. 164.
Fig. 168.
Fig. 166.
Fig. 167.



à la tête de cette vis, dans laquelle il y a un trou carré pour y introduire la clé (2368).

2378. Le chassis mobile, ou le chassis du curseur se voit de grandeur naturelle dans la fig. 165 : il est plus évidé que l'autre chassis, parcequ'il ne porte qu'un fil destiné à monter et à descendre, et qu'il ne doit point embarasser l'ouverture du réticule de la fig. 163. Le chassis du curseur a 3 $\frac{1}{4}$ pouces de hauteur de C en D, 2 pouces 2 lignes de largeur de D en E, 15 lignes d'ouverture de H en K, et 5 lignes d'épaisseur. Le dessus est renforcé par un groupe *mn*, qui est une piece soudée sous le chassis, et qui a 3 lignes d'épaisseur, pour recevoir la grande vis VS du micrometre, destinée à mouvoir le curseur : cette vis a une embase *f* qui l'empêche de sortir de la boîte, une partie arrondie F qui reçoit l'aiguille représentée dans la fig. 166, et une tête carrée V, qui reçoit la rosette R de la fig. 167, pour mouvoir le curseur. Le chassis est encore garni par en bas d'une semelle ou plaque d'acier poli ED, sur laquelle agissent les ressorts de la fig. 164, afin qu'ils ne se grippent pas sur le cuivre; le bas de la boîte HH (FIG. 159) est également tapissé d'une semelle d'acier poli, sur laquelle portent les ressorts. Au dedans du grand chassis CDE (FIG. 165) il y a un autre chassis MNOP qui porte le curseur, et qu'on incline un peu lorsqu'il est nécessaire, pour rendre le curseur horizontal et parallele au fil fixe (2550). Ce chassis intérieur et mobile tourne autour d'une vis Q; il est continuellement poussé vers la gauche par un ressort coudé PM, qui appuie contre une goupille ou sur une piece de cuivre *p* fixée sur le chassis mobile; ce chassis porte sur la gauche un écrou N qui est mobile dans son trou ou sur son axe; une vis *sr* qui passe dans cet écrou repousse le chassis vers la droite pour incliner le curseur HK; cette vis a une embase qui l'arrête contre la paroi CD du chassis; pour la faire jouer on se sert d'une clé qui passe dans un trou, dont nous avons parlé (2368); ce trou est à côté de la boîte du micrometre en M (FIG. 159). Il faut qu'il y ait aussi une vis *p* qui assujettisse le second chassis sur le premier, sans l'empêcher de tourner par l'effet de la vis *sr*.

Le fil horizontal HK est porté sur deux petites plaques qui font une épaisseur au chassis intérieur MNOP, et qui font saillie d'une ou de deux lignes du côté de l'objectif (nous regardons ce chassis par le côté de l'oculaire), pour aller joindre de plus près les fils du réticule qui font aussi saillie, mais du côté de l'oculaire (2375) : par ce moyen le curseur glisse très près de la surface des fils fixes, quoique les chassis qui les portent soient séparés par des languettes assez

épaisses (2371). Les deux extrémités du curseur HK passent dans des trous *a* et *b* du chassis, pour venir s'arrêter sous les pieces de cuivre serrées par des vis *a* et *u*; mais l'une des extrémités du fil passe en *t* dans le trou d'une piece de cuivre qui fait ressort, et de là va passer sous la piece *u* où elle est arrêtée, tandis que le ressort *t* éleve sans cesse la boucle *btu*, et exerce sur le fil une tension qui lui est nécessaire : nous l'avons déja remarqué (2375), en parlant du fil horizontal fixe de la fig. 163; mais tout cela suppose que l'on emploie des fils d'argent; car si l'on emploie des fils de soie pris sur les cocons, il suffit de les tendre avec de la cire. On est obligé de mettre au foyer des lunettes acromatiques des fils d'argent laminés très minces, et qui se présentent à l'œil par leur épaisseur; afin qu'ils aient assez de force, et que cependant ils ne cachent pas trop long-temps les petites étoiles.

Le chassis mobile est aussi percé sur le côté de trois petits trous, pour recevoir les vis qui tiennent la piece de l'index représentée en I (fig. 159).

On verra les vérifications et l'usage des micrometres que nous venons de décrire dans le Livre suivant (2550 *et suiv.*)

2379. Il y a une espece de micrometre dont la précision est plus grande que celle de tous les autres pour la mesure des objets très petits; c'est un prisme de crystal de roche, mobile dans l'intérieur d'une lunette. Voyez *le recueil de Mémoires de M. l'abbé Rochon*, 1783, *pag.* 170, *et les Œuvres de Boscovich*, *Tom. II*, *pag.* 324. M. Herschel a fait aussi un micrometre pour mesurer les angles de situation; il y a un anneau qui porte le fil mobile et tourne par un pignon, avec un cadran dans le même plan, pour marquer les angles que le fil mobile fait avec le fil fixe, parallele à l'équateur.

M. Smeaton a exécuté en Angleterre un micrometre équatorial, fort utile, où il y a deux curseurs et deux vis; il a $3^{\circ}\frac{1}{2}$ de chan et 11 fils horaires; l'oculaire est mobile à droite et à gauche, en haut et en bas : ce micrometre peut servir à comparer des astres éloignés de plusieurs degrés en déclinaison; M. Aubert en a un dont il est très satisfait; M. Smeaton a donné des observations faites avec cet instrument (*Philos. Trans*, 1787, *pag.* 318).

Description d'un grand Secteur.

2380. Les observations exactes et scrupuleuses qui ont été faites depuis 1725, pour l'aberration et pour la figure de la Terre (2661, 2817), exigeoient des instrumens qui pussent faire distinguer une

seconde, c'est-à-dire des instrumens de 10 ou 12 pieds de rayon; et comme ces observations se font toujours vers le zénit ou à 3 ou 4 degrés tout au plus, on n'a besoin dans ces sortes d'instrumens que d'un très petit arc, c'est pourquoi on les appelle *secteurs*, en anglois *zénit sector.* Picard employa en 1670 un secteur de dix pieds (2658), et Hooke un de 36 pieds (2799); mais le premier secteur qui ait été fait, de la grandeur et de la bonté nécessaires pour des observations aussi délicates, est celui que Graham fit en 1725 pour Molyneux (2817) : il fut suivi bientôt après d'un autre pour Bradley, avec lequel ce grand astronome découvrit l'aberration et la nutation; ce secteur est à l'Observatoire de Greenwich. En 1735 Graham en fit faire un autre de 9 pieds pour la mesure de la Terre en Laponie; Maupertuis en a donné la description en 1740, dans son livre intitulé : *Degré du méridien* entre Paris et Amiens. Ce secteur est actuellement chez M. le Mounier à Paris. M. Bird en a fait un pour le nouvel Observatoire d'Oxford, qui est le plus complet pour la commodité et l'exactitude; il y en a un à Richmond et un à Manheim, l'un et l'autre de Sisson, mais ils sont moins parfaits. Beccaria proposoit d'en faire un qui ne fût composé que de trois lunettes, dont une verticale et deux horizontales contre-pointées. *Gradus Taurinensis, pag.* 114. Il y a aussi de grands secteurs à Rome, à Turin et à Milan.

2381. Entre les différens secteurs qui ont été construits, celui dont la Condamine nous donne la description (*Mesure des trois prem. deg.* 1751, *pag.* 110) est des plus simples; il a servi pour une des plus grandes opérations qu'on ait jamais faites avec un pareil instrument; cela me suffit pour le préférer à celui qui est décrit dans le livre de Maupertuis : dans ce dernier on trouve plus d'art, un plus grand nombre de pieces, peut-être plus de commodités pour les observateurs; mais puisque l'on peut s'en passer, ce que nous allons dire est suffisant pour les besoins de l'astronomie. On peut consulter à ce sujet les ouvrages sur la figure de la Terre de Bouguer, Cassini, Boscovich, Liesganig, Beccaria.

2382. Le secteur que l'on voit dans la fig. 168, est composé de trois pieces principales en fer ou en cuivre, assemblées étroitement l'une avec l'autre; savoir, un grand rayon vertical DC, une traverse AB, placée horizontalement au bas de ce rayon, et une piece G, qui sert à la suspension, en même temps qu'elle porte le centre de l'instrument. Le limbe ou l'arc du secteur est une regle de cuivre AB, qui a 2 pieds de long sur un pouce et demi de hauteur et 3 lignes d'épaisseur; elle est appliquée avec des clous de cuivre sur une

bande de fer, garnie et fortifiée par derriere d'une regle de chan *ab;* on peut se dispenser de donner au limbe une courbure circulaire, pourvu que sa largeur du haut en bas soit suffisante pour contenir la courbure d'un arc de cercle de 7 à 8 degrés.

Ce limbe du secteur est attaché par le milieu avec des tenons et des vis, sur l'extrémité inférieure C d'une regle plate CD de 12 pieds de long, large de 3 pouces, épaisse de 2 lignes; la figure est brisée dans le milieu, et l'on doit suppléer d'imagination une longueur trois fois aussi grande que celle de la planche, pour que toutes les parties de la figure soient proportionnées. La regle CD est de deux pieces, chacune de plus de six pieds, qui sont unies l'une sur l'autre dans une longueur de quelques pouces, avec des tenons ou especes de pieds carrés, fixés sur l'une des barres, et qui passent au travers de l'autre pour recevoir par derriere des clavettes chassées à coups de marteau. Cette regle de fer qui forme le rayon de l'instrument, a par derriere une autre regle de chan, c'est-à-dire qui lui est perpendiculairement adossée et unie par plusieurs équerres de fer, pour en prévenir la flexion qui est d'une très grande conséquence dans ces instrumens (2596).

2383. La barre de fer qui forme le rayon s'élargit vers le haut, et reçoit sur sa face antérieure, limée en retraite, c'est-à-dire diminuée d'épaisseur, une piece de cuivre EFG, qui y est appliquée avec trois fortes vis que l'on voit en *e;* cette piece de cuivre est percée vers E d'un trou rond, disposé pour recevoir un cylindre de cuivre, tourné avec soin, et qui sert de centre à l'instrument; il est semblable à celui de la figure 150.

La tête G de la piece de suspension est arrondie en forme de globe, et portée dans un collier de fer attaché à une forte poutre au plancher de l'observatoire, de maniere cependant que la lunette du secteur n'en soit pas embarrassée au zénit; ce collier peut être mis à l'extrémité d'une potence de fer, ou traverser d'une poutre à l'autre; il porte l'instrument, en lui conservant la liberté de se mouvoir en G, comme le Graphometre d'un arpenteur tourne sur son genou.

2384. La regle de fer sur laquelle le limbe AB est rivé, porte à sa partie inférieure deux oreilles ou deux pieces en saillie MM, comme des tenons plats qui servent à retenir le secteur dans une situation fixe, et non pas à le porter; ces deux oreilles sont reçues librement dans les rainures ou coulisses de deux tasseaux de fer *mm*, enchâssés dans un fort madrier de bois OO; et lorsque cette piece de bois est à-peu-près dans la situation convenable, on peut, avec les vis qui sont dans les tasseaux, faire avancer tant soit peu le

limbe de l'instrument, et l'arrêter sur le point qui est nécessaire pour observer l'étoile dont on a besoin.

Le madrier ou la poutre OO doit avoir un mouvement du nord au sud, pour qu'on puisse changer la direction de la lunette, et l'incliner à 4° de chaque côté du zénit; mais lorsqu'elle est à la place nécessaire pour une observation, elle doit être arrêtée avec des crampons de fer RS, BS, en forme d'étriers ou d'équerres doubles, sur un banc, ou établi QQ fixé en Terre, ou arrêté d'une maniere inébranlable.

Chacun de ces étriers RS, BS, a trois vis, une par dessus en *r*, pour comprimer et arrêter la piece de bois OO, les deux autres devant et derriere, pour la mouvoir, afin de caler l'instrument, et le mettre dans le méridien (2598) : on voit en SS les vis de régie qui sont à la partie antérieure de chacun des deux étriers.

La lunette TV du secteur est attachée derriere le limbe, parallèlement au rayon DC; elle est embrassée par des fourchettes de fer XX, rivées sur le rayon DC. Au bas de la lunette est le micrometre V, semblable à celui dont on vient de voir la description (2366 *et suiv.*).

Sur le limbe AB, la Condamine avoit fait tracer en 1739 un arc, dont le centre est en E, et sur cet arc on avoit porté une ouverture de compas égale à la dix-septieme partie du rayon, ce qui faisoit 3° 22′ 15″, parcequ'on n'avoit besoin que d'observer l'étoile ε d'Orion qui étoit à 1° 40′ ½ du zénit de Tarqui. Dans celui de Greenwich, Sisson a pris la 8e partie du rayon, pour faire 7° ½; il est divisé de 5 en 5′. Chaque pas de la vis fait 34″, et il y a un rénvoi pour marquer le nombre des tours de la vis (2362). En prenant d'autres parties aliquotes du rayon, comme un vingtieme, etc. suivant les arcs qu'on vouloit observer dans le Ciel, M. de la Condamine faisoit la même chose qu'avec un instrument qui eût été bien divisé en minutes; l'opération étoit plus facile et plus exacte.

2385. C'est une chose très essentielle et très délicate que la suspension du fil dans un secteur; la suspension qui se fait avec une boucle qui passe sur une aiguille (FIG. 150), est la plus simple, mais le fil y est suspendu autour du centre, plutôt qu'au centre même; et il est dangereux que le frottement du fil sur l'aiguille, ou contre le cylindre du centre, ne gêne la liberté du fil à plomb; on en a vu un exemple dans les observations importantes, qu'on devoit faire en 1761, à Sainte-Hélene, et cette méthode a peut-être nui à l'exactitude des observations de la Caille (2180).

Lorsque je vis le secteur de Bradley qui est à l'Observatoire royal

de Greenwich, il y avoit une lame au centre, dans laquelle étoit une légere entaille, et le fil à plomb se logeoit dans l'entaille qui étoit le centre même de la division; mais il est à craindre qu'un tel centre ne soit sujet à varier, et que cette entaille faite dans une plaque très mince, ne soit pas constamment et exactement à sa véritable place; et cela est difficile à vérifier, quand on n'a pas un point dans lequel on puisse placer une des pointes du compas. Il est aussi dangereux que le fil à plomb ne soit gêné dans cette entaille, et qu'il n'y prenne une courbure qui causeroit de l'erreur dans la mesure des angles; mais, en 1768, M. Maskelyne a fait mettre le centre sur l'axe même du mouvement, en même temps qu'il a fait faire une nouvelle division par Sisson; elle est sur un limbe de fer, afin que la dilatation soit proportionelle à celle de la lunette, dont le limbe est en fer; mais on a inséré de petits clous en or pour recevoir les points de division.

2386. La meilleure suspension pour le fil d'un secteur est celle où le fil ne touche point au centre, mais où le centre tourne, sans cesser de répondre au fil; c'est ainsi que Bird l'avoit pratiquée dans un beau secteur que j'ai vu à Londres en 1763, destiné pour les observations qui devoient régler les limites du Maryland et de la Pensilvanie: dans ce secteur de Bird, la piece de suspension S (FIG. 170) restant immobile, le limbe et le corps entier du secteur tournent sur un axe qui forme le centre. On voit en A l'un des pivots de cet axe; au centre de ce pivot est un point qui est le centre même de la division du limbe du secteur; ce pivot tourne sur des coussinets BB, à-peu-près comme une lunette meridienne (2389); le fil à plomb SP est suspendu en S, où il est serré sous une vis de pression, et il passe sur le centre A, dont il est extrêmement proche, sans le toucher; l'instrument tourne sur son pivot, sans que le centre A cesse de répondre au fil à plomb, et l'on a soin d'examiner avec un microscope, à chaque observation, si le fil répond exactement au centre. La piece de cuivre, qui porte le fil en S, est mobile dans une coulisse, au moyen d'une vis V qui sert à conduire le fil vis-à-vis du centre A, si l'on apperçoit qu'il n'y réponde pas exactement. Au haut de la lunette on place un miroir incliné pour éclairer les fils; il est percé dans la partie qui répond à l'objectif, pour laisser voir les étoiles au travers.

La vérification d'un secteur se fait comme celle du quart-de-cercle (2556), en retournant le limbe; les usages en seront expliqués art. 2595 et suiv., et les avantages qu'on en a retirés, art. 2661 et 2817.

Description de l'instrument des passages, ou Lunette méridienne.

2387. La nécessité où sont les astronomes d'observer sans cesse les différences d'ascension droite entre les planetes et les étoiles (871), leur a fait chercher un instrument qui pût être placé bien exactement dans le méridien; le quart-de-cercle mural (2328), quelque soin qu'on prenne à le dresser exactement, ne sauroit avoir un plan assez régulier et assez parfait, pour que la lunette décrive le méridien, à 5″ près, du zénit jusqu'à l'horizon; et l'erreur est souvent de 7 à 8 secondes de temps. Pour obtenir de la précision dans les passages au méridien, il faut recourir à une lunette montée sur un axe qui soit tourné avec grand soin; c'est ce que nous appellons INSTRUMENT DES PASSAGES, ou lunette méridienne, en anglois *transit*. L'opération du tour étant par sa nature la plus exacte qu'il y ait dans les arts, un instrument fait sur le tour est aussi le plus parfait.

2388. Le premier dont on ait parlé, ce me semble, est celui de Romer, qu'il décrivit lui même en 1700 (*Miscell. Berolin. Tom.* 3, *pag.* 276; Horrebow, *Basis astronomiae*, 1735, *pag.* 49). Romer s'étoit fait, en 1689, à son retour en Danemarck, un observatoire, dans lequel il avoit placé plusieurs instrumens, entre autres une lunette fixée à angles droits sur un axe de 5 pieds de long et d'un pouce de diametre, avec un arc pour indiquer les hauteurs, et un poids pour soutenir le milieu de l'axe et empêcher la flexion (2396), et depuis 1692 il s'en servit avec succès. Halley fit faire, en 1721, un pareil instrument, que l'on conserve encore à Greenwich, mais dont on ne fait plus d'usage; l'axe est de fer et la lunette a environ cinq pied de long. Graham, vers l'an 1735, en ayant fait construire de plus parfaits, M. le Monnier en donna la description dans son histoire céleste en 1741. Celui que je vais décrire, avoit été construit en 1760, pour la Caille, qui s'en est servi pendant deux ans; mais il y en a de beaucoup plus considérables actuellement.

2389. L'AXE AB (FIG. 174), a 2 pieds et demi de long [(a)], la lunette CD a 4 pieds de long sur 18 lignes de diametre. Les deux extrémités de l'axe ou les deux pivots A et B, sur lesquels tourne l'axe,

(a) Il y a des lunettes méridiennes dont l'axe a quatre pieds, à Greenwich, à Oxford, à Richmond, à Manheim, à Blenheim et à Dublin; les lunettes ont 8 pieds, et sont acromatiques; celle d'Oxford a 10 pieds, et 4 pouces d'ouverture, mesure d'Angleterre.

sont deux cylindres de 9 lignes de diametre sur autant de longueur; ils sont formés d'une composition de cuivre et d'étain, plus dure que les métaux naturels, et moins sujette à être rongée par le frottement et par la rouille. L'axe est formé de deux cônes de cuivre AE, FB, qui ont chacun 13 pouces de longueur, et dont le diametre décroît depuis 28 lignes jusqu'à 11 lignes, c'est-à-dire que près des pivots l'axe n'a que 11 lignes de diametre. Ces deux cônes sont assemblés à vis, et soudés dans un noyau ou forte piece de cuivre G, qui a deux pouces et demi de large et trois pouces de long: cette piece est percée pour laisser passer la lunette au travers.

2390. Le dé ou la masse G sert de noyau à toute la machine; il assemble les deux cônes AE, FB qui composent l'axe, il tient les deux porte-lunettes ou les deux canons S, T, de 15 à 16 pouces, dont chacun a une base carrée, fixée par 4 vis sur le dé; ces canons sont fendus de deux côtés sur un espace de 8 pouces, pour laisser passer plus aisément le tuyau de la lunette; mais lorsque le tuyau est entré, on resserre l'extrémité de chacun des porte-lunettes avec un brasselet ou collier de cuivre, qui se serre par des vis en K et en H. Ces porte-lunettes servent à empêcher que la lunette ne vacille dans le dé, et qu'elle ne se courbe sur sa longueur.

2391. Si la lunette n'étoit pas bien en équilibre sur le milieu de son axe, en sorte qu'elle fût plus pesante par une extrémité que par l'autre, on desserreroit les vis des porte-lunettes, et on repousseroit le tuyau vers le côté trop léger: de même, si le fil vertical de la lunette se trouvoit un peu oblique à la verticale, on seroit obligé de desserrer les vis et de tourner un peu le tuyau, jusqu'à ce que le fil fût exactement vertical.

On place dans cette lunette, au foyer des deux verres, un réticule composé de deux fils qui se croisent à angles droits, ou bien un réticule de 45° (2349), ou enfin un réticule romboïde (2353).

Pour diriger la lunette méridienne à la hauteur donnée où l'on veut observer un astre, on a fixé un demi-cercle AN sur l'un des supports; ce demi-cercle a 8 pouces et demi de diametre, et il est divisé en degrés; l'alidade O fixée sur l'axe MQ, se termine par un vernier qui sous-divise le degré en douze parties, et nous fait distinguer cinq minutes; cette alidade est serrée sur l'axe par une vis de pression, que l'on peut lâcher, si l'on est obligé de mettre cette alidade plus exactement sur la division. Cette alidade, quand elle est longue, peut éprouver quelque variation. M. Maskelyne l'a remplacée à Greenwich par un miroir placé sur l'axe, et une pinnule qui glisse sur les divisions; quand l'image de la planete paroît dans le milieu du



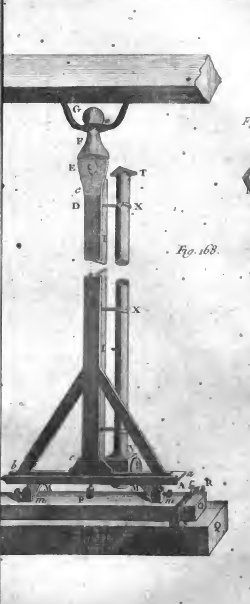

G
F
E
T
e
D
X
I
Fig. 168.
X
I
b
c
a
A
R
m
P
n
Q


Fig. 170.
S
V
A
P



du miroir, on est sûr qu'elle est bien sur le point qui indique la hauteur de la lunette.

2392. Les supports ou coussinets, dans lesquels tourne l'axe de la lunette, sont quelquefois composés de deux plans, quelquefois circulaires comme les pivots; ils sont faits d'une composition d'étain et d'antimoine, plus douce que celle des pivots; on y met une goutte d'huile, ou un peu de suif, pour adoucir le frottement. A Blenheim les coussinets sont de crystal.

On donne à l'un des supports B un petit mouvement du haut en bas, dans une coulisse, au moyen d'une vis V qui peut élever et abaisser le pivot de l'axe, afin de placer cet axe dans une situation parfaitement horizontale, et de l'y ramener lorsqu'il a pu s'en écarter par le mouvement des pieces de maçonnerie ou de charpente, qui portent l'instrument (2609).

On voit séparément dans la fig. 172, le mouvement vertical du support; la vis VR passe dans un écrou T qui est fixé sur le montant; elle passe dans un collet X qui est percé cylindriquement de la grosseur de la vis; sous le collet X il y a une base fixée à la vis, et qui oblige le collet X de monter avec la vis. Pour obliger le collet X de descendre aussi avec la vis, il y a un canon de cuivre chaussé carrément sur la tige de la vis, dont la base s'appuie sur X, et qui est arrêté en V au-dessus de la tige par une vis de pression qui entre dans la tige.

Le collet X est fixé sur une piece de cuivre qui glisse de haut en bas, dans la grande piece du support où elle est logée, le long d'une rainure en queue d'aronde, c'est-à-dire dont les deux faces sont entaillées en sens contraire, ou dont les côtés sont angulaires; cette piece de cuivre porte le coussinet de métal engagé fixement dans une autre rainure, faite dans cette piece de cuivre qui porte le collet X du support.

2393. Il faut aussi qu'un des supports ait la facilité de se mouvoir horizontalement d'une petite quantité, en avant ou en arriere, comme on le voit dans la fig. 173, qui représente un des pivots sur sa base horizontale. La vis A, aussi horizontale et perpendiculaire à l'axe, est destinée à pousser l'axe, pour mettre la lunette dans le plan du méridien; car elle s'en écarte souvent par l'action de la chaleur sur les murs. Mais pour que les supports ne vacillent point, on a recours à la pratique suivante: on compose la base du support de deux plaques, dont l'une peut glisser horizontalement sur l'autre; la plaque mobile F, dont le plan est FG, est arrêtée sur l'autre par quatre vis qui passent dans des trous ovales, en sorte qu'elle ait

la liberté d'avancer ou de reculer d'une ligne, lorsqu'on lâche les 4 vis de chaque côté, mais en même temps qu'elle puisse être assujettie et fixée, en resserrant les vis qui la tiennent sur la plaque immobile BCDE. Celle-ci est scellée en plomb, dans la base de pierre ou de fer qui porte tout l'instrument; un ressort placé en F pousse sans cesse la platine FG, pour l'appliquer contre la tête de la vis AG, qui sert à la repousser en arriere lorsque cela est nécessaire, mais qui ne pourroit la retirer, puisqu'elle n'entre pas dans la base du support. A la place du ressort F on peut mettre une vis opposée à la vis A, et qui pousse dans une direction contraire; alors on est obligé de faire jouer à la fois les deux vis G et F, pour rétablir l'instrument dans le méridien. On ne fait ce changement que dans le cas où il est devenu nécessaire par une variation de 2 à 3″ de temps; car si le changement est plus petit, il vaut mieux le calculer, et en tenir compte dans les observations (2610).

Lorsqu'on place l'instrument dans le méridien pour la premiere fois, il faut que les deux bases P et R, des supports (FIG. 174) soient assemblées par une regle de fer, fixée avec des vis sur l'une et l'autre; et quand l'on aura un mouvement un peu considérable à donner au support mobile P, il faudra y remettre la regle de fer, pour que les deux supports marchent ensemble, et soient toujours perpendiculaires à l'axe.

2394. Pour pouvoir fixer la lunette à une hauteur invariable pendant la durée d'une observation, on emploie quelquefois une vis de pression, avec un collet qui embrasse l'axe près d'un de ses supports; mais tout ce qui peut forcer l'axe étant d'une conséquence dangereuse, j'aime mieux la méthode suivante. Au-dessous de l'axe de la lunette méridienne, on place un autre axe ou rouleau qui peut n'être qu'en bois, et qui tient sur un chassis horizontal que l'on peut avancer ou reculer; on met perpendiculairement à ce rouleau une verge ou tringle de bois qui vient joindre la lunette près des oculaires, où elle entre dans un carré fixé sur la lunette; on peut la contenir dans le carré avec une vis de pression; ou bien on fera seulement reposer la lunette sur l'extrémité de la tringle de bois, et cette tringle sera mobile dans le rouleau de bois, et pourra s'y arrêter par une vis de pression.

La partie d'un observatoire qui répond au-dessus de la lunette méridienne, doit être ouverte dans le sens du méridien, et l'ouverture fermée par une trappe *t* que l'on voit au-dessus de la lunette. Afin d'ouvrir aisément cette trappe, on peut la faire soutenir par une tringle, dont l'extrémité inférieure porte sur un levier PL, fort

près du point d'appui autour duquel ce levier tourne dans la muraille; quand il est relevé et accroché contre le mur, la tringle se trouve élevée, et tient la trappe *t* ouverte. Une large ouverture comme de trois pieds, est plus convenable qu'une ouverture étroite; aussi M. Maskelyne a fait élargir toutes ses trapes, chacune est fermée avec des volets qui glissent sur les côtés avec des poulies: ces volets sont formés de 4 pieces de chaque côté, afin qu'on n'ouvre que la partie où l'on veut regarder. La barre de fer qui assemble le faîte du comble est assez mince pour ne pas empêcher les observations au zénit.

2395. On ajoute quelquefois à la lunette méridienne une machine pour éclairer les fils; c'est un collet de bois qui environne l'axe vers Q ou F sans y toucher, et qui est porté par un bras de fer qui part du mur voisin; autour de ce collet tourne un autre cercle ou collet de bois qui porte un bras assez long pour atteindre l'objectif C de la lunette, et porter une lanterne; on adapte à l'extrémité de la lunette un réfléchisseur; c'est un carton ou une plaque de cuivre blanchie, qui réfléchit la lumiere sur l'objectif: le carton doit être percé d'un trou suffisant pour admetre les rayons de l'astre, tandis que la partie environnante réfléchit ceux de la lanterne; ce réfléchisseur s'incline à volonté sur la petite tringle qui lui sert de pied, afin de donner à l'objectif plus ou moins de lumiere.

M. Maskelyne à Greenwich, éclaire les fils par un miroir de métal qui a $\frac{4}{10}$ de pouce de diametre, et qui est placé au milieu de l'ouverture de la lunette, à une certaine distance de l'objectif. M. Ramsden éclaire les fils par un miroir incliné, qui est dans l'intérieur du tube, et qui reçoit la lumiere par l'intérieur de l'axe qui est percé dans la moitié de sa longueur; il l'a pratiqué ainsi à Blenheim, etc. La lumiere passe au travers d'un prisme composé, que l'on fait mouvoir avec une tringle, pour donner plus ou moins de lumiere; une des extrémités est tout-à-fait transparente, et l'autre tout-à-fait obscure.

2396. Lorsqu'une lunette méridienne n'a que 4 pieds et l'axe $2\frac{1}{2}$, comme dans la description précédente, le poids n'est pas considérable; il n'y a pas d'inconvénient sensible dans le frottement des pivots sur leurs coussinets. Mais dans un instrument dont la lunette a 8 ou 10 pieds, le poids, le frottement et l'usure méritent une attention: on suspend l'axe en M et en Q vers le milieu des deux bras, par des crochets de bois, qui portent l'axe de l'instrument; chacun de ces crochets est attaché supérieurement à l'extrémité d'un levier mobile, dont l'autre extrémité est chargée d'un poids; ces deux

poids ne font pas tout-à-fait équilibre avec l'instrument; mais quelques onces de plus suffiroient pour le tenir en l'air; par ce moyen les pivots ne portent sur leurs coussinets qu'avec une force de quelques onces, et ces parties délicates qu'il importe de conserver avec soin dans toute leur intégrité ne sont exposées presque à aucun frottement. Bradley qui a employé cet artifice à l'imitation de Romer (2388), l'avoit appliqué même à l'ancien instrument de Halley (2388).

2397. Quand on veut faire servir une lunette méridienne en voyage, on place la piece de fer où tiennent les deux supports sur un axe vertical; cet axe tourne en bas dans une crapaudine, et en haut dans un collet mobile, qui donne la facilité de le placer; on en trouvera la figure dans l'Histoire céleste de M. le Monnier.

2398. La nécessité de rendre l'axe de la lunette méridienne exactement horizontal, exige que nous parlions ici du niveau qu'on emploie à cet usage. On peut se servir d'un fil à plomb suspendu en C (FIG. 174), à une petite tête de cuivre fixée au haut de la lunette; quand elle est verticale, on fait tomber le fil vis-à-vis d'un point placé au bas de la lunette, sur une autre petite tête de cuivre en L.

On peut aussi employer un niveau formé par un fil à plomb avec 2 pieds qu'on place sur les pivots A et B; mais si l'on considere qu'un cheveu, qui est à-peu-près la 35ᵉ partie d'une ligne, occupe 8″ sur un rayon de 5 pieds : on verra qu'il est bien difficile de placer un axe à 5″ près, avec le fil à plomb.

2399. LE NIVEAU à bulle d'air, représenté dans la fig. 175, est un instrument plus commode et qui peut être plus exact; mais il est aussi très difficile à bien faire. La regle de bois BA est destinée à s'appuyer sur les pivots de l'instrument; pour cela les pieds B et A sont garnis de cuivre, arrondis comme les tourillons de l'axe, pour s'y appuyer. Un tube de cuivre FE renferme un tube de verre, dans lequel on met de l'esprit de vin ou de l'éther. Le tube de cuivre est retenu en D et en C dans deux pieces de cuivre, dont l'une fait charniere en D, tandis que l'autre C est percée pour introduire une vis qui entre dans la regle; la tête de la vis, quand on la tourne, fait baisser la partie C du niveau, tandis qu'un ressort, placé dessous le tube, tend à l'élever, et l'applique sans cesse contre la tête de la vis. On fait aussi des niveaux qui se suspendent sur des crochets aux deux pivots de l'axe.

Dans les niveaux à bulle d'air, plus la bulle est longue, plus elle est sensible, et plus son mouvement est prompt. M. Chezy a observé, dans un niveau fait par Langlois, que la bulle changeoit de longueur

lorsqu'il faisoit plus ou moins chaud, et que sa marche devenoit différente, à cause des irrégularités intérieures du tube; il a cherché les moyens de dresser la surface intérieure du tube; il y a réussi avec un cylindre de verre, dressé et arrondi dans un demi-cylindre de cuivre; il fait tourner ce cylindre de verre dans le tube qui doit servir de niveau, avec de l'éméri très fin qui ait employé une minute à descendre dans l'eau, de trois pouces de hauteur. M. Chezy emploie de l'éméri de plus en plus fin, et quand le tube est adouci, il colle du papier sur le cylindre de verre, et avec du tripoli il acheve de polir l'intérieur du tube. Par ce moyen il est parvenu à faire un niveau d'un pied, dont la bulle d'air a 9 pouces et un tiers, et parcourt uniformément une ligne pour chaque seconde d'inclinaison: il l'auroit fait encore plus sensible s'il eût voulu; mais il a mieux aimé ne lui donner que ce degré de sensibilité. Il travaille ses tubes avec un cylindre de verre plus court que le tube, et c'est ce qui donne une courbure longitudinale à l'intérieur du tube, parcequ'alors le tube est plus usé vers le milieu que vers les bords (*Mém. présentés à l'acad, Tom. V, pag.* 254).

Pour être sûr qu'un niveau est bien sensible et qu'il est bien régulier, on place le tube, aussitôt qu'il est rempli, sur des supports fixés dans une regle que l'on peut incliner par le moyen d'une vis dont la régularité soit éprouvée (2361); on fait tourner la vis lentement et par degrés égaux, et l'on voit si la marche de la bulle est uniforme, et si elle ne va point d'un mouvement accéléré et par soubresauts; quand le tube est inégal, on le tourne sur différens points de sa surface, et l'on choisit le côté le plus régulier: c'est tout ce qu'on peut faire de mieux, lorsqu'on est forcé d'employer des tubes qui ne sont pas réguliers.

Il importe que l'éther qu'on emploie dans les niveaux soit très bien rectifié; sans cela, il est sujet à deux inconvéniens. Quand on agite le tube, l'éther se divise en plusieurs bulles, qui ne se réunissent ensuite que difficilement. L'éther se décompose avec le temps, et produit de très petites gouttes d'une substance huileuse qui s'attachent au tube, et arrêtent la marche de la bulle: ces inconvéniens me feroient choisir l'esprit de vin par préférence à l'éther. Bird mettoit quelquefois des niveaux au lieu de fils à plomb sur ses petits quarts-de-cercles; mais quand le Soleil en dilate la bulle, elle change de figure, et il en résulte des erreurs qui ont été jusqu'à 7″ de temps, suivant M. Messier (*Mém. acad.* 1783). M. Ramsden rejette absolument l'usage des niveaux, et il ne se sert que du fil à plomb (2603). Nous donnerons l'usage et les vérifications du niveau (2616).

Description de la Machine parallatique.

2400. LA MACHINE PARALLATIQUE, appellée aussi *Lunette parallatique*, est destinée à suivre le parallele d'un astre, ou son mouvement diurne d'orient en occident, en décrivant le même parallele. Lorsque l'astre est placé une fois sur le fil de la lunette, il le décrit sans s'en écarter, et à quelque heure du jour qu'on dirige la lunette vers l'astre, on voit toujours celui-ci parcourir le fil de la lunette. Pour remplir cet objet, il ne s'agit que de placer la lunette sur un axe qui soit parallele à l'axe du monde, et qui tourne sur lui-même dans le sens et dans la position du mouvement diurne; lorsque cet axe tourne, il emporte avec lui la lunette, et par ce moyen elle accompagne l'astre dans sa révolution journaliere, qui se fait autour du même axe. Plusieurs instrumens anciens avoient aussi un pareil mouvement (2281); mais la plus ancienne machine parallatique dans le goût de celles que nous employons, me paroît être celle qui fut décrite en 1626 par Scheiner (*Rosa Ursina, pag.* 347); il l'appelle *Instrumentum Telioscopicum*, et en attribue l'invention au P. Gruenberger; elle fut d'un très grand usage pour observer les taches du Soleil; Dominique Cassini le pere s'en servit beaucoup; Cassini le fils la perfectionna, et en donna la description (*Mémoires de* 1721).

2401. Cet instrument s'appelle *parallatique*, parce qu'il est destiné à suivre le parallele d'un astre; car je distingue ce nom de celui de parallactique; ce dernier est consacré à l'instrument dont se servit Ptolemée pour observer les parallaxes (2278). Je vais décrire une lunette parallatique, de la grandeur et de la forme la plus usitée à Paris, avec tous les détails nécessaires pour qu'on puisse l'exécuter ailleurs; mais on peut bien en faire de plus grandes, et il n'y a point de charpentier qui ne fît une machine parallatique de 6 pieds de haut, dont on se serviroit avec avantage pour porter une lunette de dix pieds avec son micrometre.

Le pied est formé de 3 pieces de bois; un montant AB placé verticalement, d'environ 2 pieds de haut, 2 pouces et demi de largeur, et 18 lignes d'épaisseur, est assemblé d'équerre avec une traverse DE, de 22 pouces de long sur 2 pouces et demi de largeur et 15 lignes d'épaisseur; cet assemblage est maintenu par deux arcs-boutans FE, FD, de 15 à 16 pouces de long sur 15 lignes d'écarrissage.

Une autre piece BK, est encore assemblée d'équerre à tenon et à mortoise, dans la traverse DE, et maintenue par un autre arc-bou-

tant qui va de F en H (mais qui est masqué dans la figure par la piece FE) ; la partie BKN a 20 pouces de long sur 10 lignes d'écarrissage. Cet assemblage, composé des trois pieces AB, BK, DE, avec leurs arcs-boutans, forme le pied de la machine; la regle BKN est destinée à être mise le long d'une ligne méridienne.

2402. L'axe CYS est la partie essentielle de l'instrument : il est de bois, et il a 15 lignes de diamotre, il fait avec la base KB, un angle égal à la hauteur du pole. L'extrémité supérieure A de la regle verticale ou du montant BA, porte un coussinet en forme de demi-cylindre concave de cuivre, incliné dans la direction de l'axe, pour recevoir le collet Y qui est logé dans la concavité de ce coussinet, et recouvert d'un autre demi-cylindre de cuivre, qui l'embrasse exactement. Celui-ci porte deux oreilles que l'on fixe par 4 vis sur les oreilles du coussinet, ou demi-cylindre inférieur; ces deux gouttieres de cuivre forment un collet de deux ou trois pouces de long, dans lequel l'axe tourne par un frottement doux; il importe que les pieces ne grippent point, et que la lunette ne fasse point de soubresauts, comme cela arriveroit si tout étoit en bois; il faut que le frottement soit assez fort pour que la lunette reste en place sans tourner autour de l'axe, ou par son poids, ou par de petits coups de vents. A l'autre extrémité de l'axe il y a une crapaudine C, ou concavité hémisphérique, pour recevoir le pivot de l'axe, qui se termine ordinairement par une tetine, ou espece de petite boule de matiere dure, qui tourne facilement.

2403. Au-delà du collet Y, par lequel l'axe repose sur le montant BA, cet axe porte deux renforts ou platines de cuivre, qui font comme une mâchoire, de 3 pouces de long, pour recevoir et serrer le demi-cercle VZ, qui doit servir de charniere, en même temps qu'il représentera le cercle horaire sur lequel se marquent les déclinaisons, et les angles que fait la lunette avec l'axe CY. Le centre S du demi-cercle VZ est traversé par un axe ou petit cylindre de cuivre, portant une rosette qui en fait la tête ou la base, et dont l'autre extrémité se termine en vis; on serre cette vis par un écrou, en mettant une platine ou rosette mince entre deux, pour fixer le demi-cercle, et l'arrêter entre les deux plaques, ou dans la mâchoire qui termine l'axe CS. A mesure qu'on serre cette vis, les deux plaques de la mâchoire sont poussées en sens contraire entre les deux rosettes, et contre le plan du demi-cercle, ce qui sert à le fixer plus ou moins fortement, suivant le besoin. On peut aussi rendre le cylindre du centre plus court que l'épaisseur des mâchoires, en lui laissant un quart de ligne de tirage; alors on introduit une vis dans son extré-

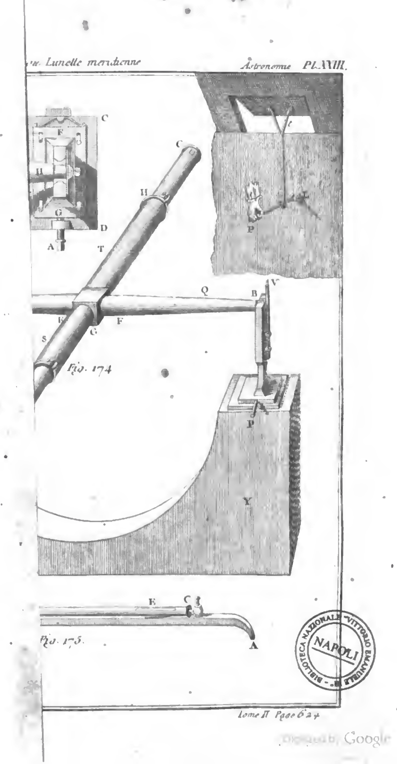
mité, la tête de la vis sert de rosette, et presse le centre contre la mâchoire. Afin que la rosette ne se dévisse pas, on ajuste un pied ou une goupille contre la tête de l'axe S, pour entrer dans la mâchoire. Le diametre VT du demi-cercle entre dans une coulisse de cuivre, où il est pris par deux vis T et V, et cette coulisse forme par-dessus une gouttiere de cuivre de 8 pouces, qui est fixée par quatre vis sur la gouttiere de bois LL, destinée à recevoir la lunette; cette gouttiere peut être taillée en dedans en forme d'angle droit, pour admettre des lunettes de différentes grosseurs, dont les tuyaux sont carrés.

On divise en degrés le demi-cercle TZV, qui n'a que deux pouces un quart de rayon; mais on place vis-à-vis de sa division un arc Z qui forme un vernier; il embrasse 11° du demi-cercle, et il est divisé en 12 parties (2342), de sorte qu'on apperçoit aisément les minutes de cinq en cinq; le demi-cercle TZV est évidé ou creusé circulairement en forme de rainure à jour Z, au travers de laquelle passe la vis de pression; par ce moyen le demi-cercle a la liberté de tourner, lorsque la vis ne l'arrête pas entre les pieces de la mâchoire.

2404. L'extrémité inférieure de l'axe YC, avant que d'être reçue dans la regle BK, traverse par le centre un cercle OC, de trois pouces de rayon, destiné à représenter l'équateur, et à marquer les distances au méridien. Ce cercle équinoxial est de cuivre, son plan est perpendiculaire à l'axe; il est soutenu en K sur les deux côtés de la regle BK, par deux supports de cuivre coudés, qui tiennent avec des vis sur la regle BK, et sur lesquels le cercle est arrêté par six vis. Ces supports ont deux empattemens chacun, pour se visser sur la regle NB, et trois empattemens pour s'appliquer contre le plan de l'équateur, et le contenir exactement.

On divise ce cercle équinoxial en heures, c'est-à-dire qu'on met 0^h à la partie supérieure du cercle; on met 1 heure à 15° de là, tant à droite qu'à gauche, 2^h à 30°, etc.; ainsi le temps y est marqué de 4 en 4 minutes; mais au moyen d'un vernier, qui est sur l'alidade CO, on y apperçoit aisément un tiers de minute, c'est-à-dire 20″ de temps. Pour cet effet, on prend sur l'alidade une portion de cercle qui embrasse 11 divisions de l'équateur, et l'on divise cet arc en douze parties; cela forme un vernier (2343) qui donne les 20″.

Quand la lunette est dirigée dans le méridien, l'index de l'alidade O répond à la partie supérieure du cercle C qui représente l'équateur, et marque zéro pour l'angle horaire ou pour la distance au méridien, parcequ'il marque le point où l'équateur, représenté par le cercle C, est coupé par le méridien du lieu; mais si l'on fait faire un


...e Lunette meridienne
Astronomie PL.XVIII.
C
F
H
G
D
A
T
C
H
Q
B
V
P
P
E
G
F
S
Fig. 174
Y
E
C
Fig. 175.
A
Tome II Page 624

un quart de tour à l'axe CY, et par conséquent à la lunette LL, l'index O marquera 6 heures sur le même cercle; il en est ainsi des autres angles horaires. Ce cercle équatorial est fort commode pour trouver les astres dans le crépuscule, et même pendant le jour (2623).

2405. Sur la regle DE l'on ajoute aussi deux pieces de bois EN, DN, en retour d'équerre de cinq pouces de long, qui servent à empêcher le déversement de la machine. Ces deux alonges sont traversées par des vis N, N, qui sont nécessaires pour caler la machine, c'est-à-dire pour remettre la regle AB dans une position verticale, ou pour que l'axe soit dirigé vers le pole; on applique aussi pour le même effet une troisieme vis à caler, à l'extrémité méridionale N de la regle BKN, pour élever ou abaisser la machine du nord au sud, quand l'axe est trop incliné, et ne se dirige pas à la hauteur du pole; les deux autres vis servent aussi à redresser l'axe d'orient en occident, pour qu'il soit exactement dans le plan du méridien. Ces vis doivent se terminer en pointes, ou porter sur des coquilles, pour que la machine ne charie pas quand on les tourne; si elles sont un peu longues, elles peuvent servir pour placer l'instrument à différentes latitudes, comme nous le dirons bientôt.

2406. On ajoute quelquefois deux niveaux à bulle d'air P, Q (2399); le premier sert à reconnoître si la regle qui doit être verticale AB, n'incline point vers l'orient ou vers l'occident. Le niveau Q sert à reconnoître et à corriger l'inclinaison qu'elle pourroit avoir du nord au sud. On y supplée facilement avec un niveau ordinaire en forme d'équerre, qui porte un fil à plomb, et qu'on présente sur les deux regles DE et BK, lorsqu'on veut disposer une lunette parallatique; on suppose que ces regles sont bien d'équerre avec la piece verticale AB.

2407. La regle BK étant placée sur une méridienne, et AB étant exactement verticale, si l'angle ACB est parfaitement égal à la hauteur du pole, par exemple, de 48° 50′ pour Paris, l'axe CY se trouve dirigé vers le pole du monde, et représente l'axe de la Terre. De là il suit que si l'on transportoit cette machine à 25 lieues de Paris, du côté du nord, il faudroit relever d'un degré l'axe CY, c'est-à-dire éloigner la regle AB de la ligne verticale, du côté du midi; la regle NB ne seroit plus horizontale, mais cela est indifférent. Pour se ménager cette facilité, on adapte au bas de la regle AB un arc de cuivre R, de quelques degrés; on place en haut une petite piece de cuivre *r*, de laquelle pend un fil à plomb sur les divisions de l'arc R, en sorte que le point de suspension de ce fil soit en même temps le centre de ces divisions : lorsque ce fil à plomb marque zéro sur l'arc R, la

regle AB lui est parallele, et se trouve être verticale; mais il marque 1 ou 2 degrés, lorsque la regle AB est inclinée de la même quantité : alors l'axe AC est disposé pour une latitude différente. Le niveau Q ne peut servir dans ce cas-là, mais le fil à plomb *r*R en tient lieu.

2408. La tringle LX sert à maintenir la lunette dans la situation qu'elle doit avoir en déclinaison. Quelquefois une vis IW engrene dans les dentelures du demi-cercle TZV, qui pour lors est taraudé ou strié sur sa circonférence. Cette vis sert à donner un petit mouvement lent à la lunette LL; quelquefois aussi on met un engrenage pareil en Y, pour que l'axe ne tourne pas par le poids de la lunette ou l'impulsion du vent; mais alors on augmente beaucoup le prix de l'instrument.

On place une lunette de quatre à cinq pieds sur la machine que nous venons de décrire : on assujettit cette lunette sur la gouttiere LL avec des brides ou colliers; le tuyau est de bois, ordinairement carré, terminé aux deux extrémités par des fretes de cuivre, ou boîtes carrées, qui assemblent et fortifient les pieces de bois, et qui portent les verres. Quand la lunette est perpendiculaire à l'axe SYC, elle décrit un cercle perpendiculaire à l'axe du monde, c'est-à-dire l'équateur; ainsi dans ce cas-là, on suivroit un astre qui seroit dans l'équateur, avec la lunette arrêtée à angles droits sur son axe SC. Si l'astre est plus près du pole boréal, ou qu'il ait, par exemple, 30° de déclinaison boréale, on incline la lunette, en la faisant tourner sur son centre S, jusqu'à ce qu'elle se dirige à 60° du pole, ou qu'elle fasse avec SC un angle de 60° du côté de Z; ainsi, de quel côté que tourne l'axe avec sa lunette, celle-ci étant toujours à 30° de l'équateur ou à 60° du pole, décrira nécessairement le parallele d'une étoile qui auroit 30° de déclinaison; alors le demi-cercle marquera 30° en Z de la même maniere qu'il marquoit zéro dans le cas où la lunette étoit perpendiculaire à son axe, et qu'elle se dirigeoit dans l'équateur. Les vérifications et l'usage de la lunette parallatique se trouveront dans le Livre suivant (2618).

Description de l'Equatorial.

2409. L'EQUATORIAL est un instrument de même espece que la lunette parallatique, composé de deux cercles qui représentent l'équateur et le cercle de déclinaison; on y ajoute un quart-de-cercle, qui sert à élever l'équateur pour la latitude du lieu, et quelquefois un cercle qui sert de base à toute la machine.

Cet instrument a par conséquent du rapport avec le cadran équinoxial et l'anneau astronomique (2283), mais dans sa forme actuelle il est moderne, et le plus ancien que j'aye vu a été fait à Lunéville, vers 1735, par Vayringe, artiste, né en 1685, près de Longuyon, du côté de Luxembourg; il étoit d'abord serrurier, il devint ensuite horloger, et enfin professeur de physique expérimentale à l'académie que le duc Léopold, mort en 1729, avoit établie à Lunéville (*Bexon, Hist. de Lorraine*, 1777, *Tom. I*). Vayringe mourut en 1746. J'ai un petit équatorial de 7 à 8 pouces de diametre qui porte son nom, et peut être regardé comme le principe de ceux qu'on a faits depuis. Il ne porte point de date, mais il doit être antérieur à l'année 1737, temps où les ducs de Lorraine quitterent Lunéville.

Short accrédita ces instrumens en Angleterre, lorsqu'il en eut fait exécuter un, dont la description se trouve dans les transactions de 1749. Il y en a une autre par Nairne, dans les transactions de 1771.

2410. Sur un pied de bois AA (Planche xxv, fig. 177) est placé un cercle horizontal C mobile, divisé en degrés. Sur ce cercle est placée une platine D, fixée à un axe conique vertical E. Au dessus de la platine s'élevent perpendiculairement deux quarts-de-cercle G, G, l'un desquels est divisé en degrés pour marquer les latitudes. Ce sont ces deux quarts-de-cercles qui soutiennent le cercle de l'équateur H, avec son cercle horaire R, qui est au dessous. L'axe de son mouvement, qui est placé de 12 à 12 heures, passe par les centres des deux quarts-de-cercles, et porte une alidade I, qui marque la hauteur du pole sur les divisions du quart-de-cercle.

L'équateur est divisé en heures et minutes, et sur un cercle de 7 pouces de diametre, divisé en demi-degrés, le vernier peut indiquer 12″ de temps. Le commencement des divisions doit être sur la méridienne, quoique dans la figure on ait mis les XII sur le côté pour faire voir le vernier qui subdivise les minutes. A la partie supérieure de la plaque équatoriale sont situés les deux supports MN, qui soutiennent l'axe parallele à l'équateur, avec lequel tourne la lunette, et sur lequel est fixé le demi-cercle O des déclinaisons. Le contre-poids Q est placé à la partie inférieure pour faire équilibre avec le poids de la lunette, de même que les poids R contre-balancent la totalité de l'instrument, quand il tourne autour de l'axe de l'équateur pour changer de latitude, et le font rester dans toutes les positions où on le met.

Les quatre mouvemens de cette machine peuvent se faire lentement par le moyen des vis S, T, V, W, qui engrenent dans les stries ou dentelures de chaque cercle. Et quand on veut avoir un

mouvement prompt, on fait désengrener les vis. *Description and use of à new constructed equatorial telescope, or portable observatory, made by M. Edward Nairne (Philos. Trans. vol. LXI, 1771). Description and use of the new invented equatorial instrument, by P. and. J. Dollond. Description of a new universal equatoreal made by Ramsden.* Cette derniere est de M. de Mackensie; elle a été faite vers 1779. M. Ramsden, à Londres, fait des instrumens semblables, dont les cercles ont 10 pouces de diametre; ceux de sept pouces coûtent soixante guinées, ou soixante louis. On y distingue les minutes une à une; la lunette grossit depuis 40 jusqu'à 80 fois. Le plus grand équatorial que je connoisse est celui de Richmond, où il y a un cercle de déclinaison de 2½ pieds de diametre; M. Troughton en a fait un pour le Portugal en 1787, dont le cercle de déclinaison a 20 pouces, et le cercle azimutal 34 pouces; il a coûté 260 guinées, ou 6700 livres: mais M. Ramsden en construit un pour M. le chevalier Schuckburgh, où le cercle de déclinaison a 4 pieds de diametre, et dont l'axe est formé par six grandes colonnes.

2411. M. Dollond a décrit dans les transactions de 1779, p. 332, un moyen de trouver, par l'instrument même, l'effet des réfractions: c'est un petit quart-de-cercle avec un niveau sphérique, par le moyen duquel on apperçoit la hauteur et l'angle parallactique de l'astre auquel la lunette est dirigée. Un verre concave et un verre convexe de même courbure étant placés devant l'objectif, si l'on en fait mouvoir un verticalement, on change la position de l'image, et, par le moyen d'une échelle qui est sur l'instrument, on peut faire venir l'astre au même point que s'il n'y avoit pas de réfraction. Quand le quart-de-cercle qui est vers l'oculaire est placé verticalement, il indique la hauteur de l'astre, et l'on peut prendre dans la table des réfractions celle qui convient à cette hauteur, pour placer le verre mobile à la distance convenable.

M. Ramsden avoit déja imaginé un moyen de produire le même effet; en voici la description d'après l'Ouvrage que j'ai cité.

Un petit cercle *a*, appellé cercle des réfractions, placé vers l'oculaire, se meut avec une vis, il est divisé en demi-minutes; une révolution entiere de ce cercle répond à 3′ 18″ de réfraction, qui a lieu vers 16° de hauteur: le mouvement de ce cercle éleve le centre des fils de la lunette dans le vertical, de la quantité de la réfraction.

Un quart-de-cercle *b* d'un pouce et demi de rayon, porte des divisions sur ses deux faces; d'un côté sont les degrés de hauteur de l'objet, de l'autre les minutes et les secondes de réfraction pour chaque hauteur.

Un petit niveau sphérique *d* s'ajuste en partie par un pignon qui fait tourner tout l'appareil, et en partie par l'index du quart-de-cercle; on place le cercle de réfraction sur les minutes et secondes que l'index désigne sur le limbe du quart-de-cercle. S'il y a plus de 3′ 18″ que contient la révolution entiere du cercle, on le met sur le nombre de minutes et de secondes qu'il y a de plus que les 3′ 18″ prises une ou plusieurs fois; alors la croisée des fils paroîtra élevée dans le vertical de cet excédent de réfraction.

Nous parlerons des vérifications de l'équatorial, art. 2621. M. Ramsden se sert d'un oculaire prismatique *oc*, pour regarder de côté quand l'astre est trop élevé, et il trouve ce moyen bien préférable aux miroirs inclinés qu'on y a aussi employés.

2412. L'équatorial peut se placer à-peu-près très facilement; car dès que la base est horizontale au moyen du niveau F, et l'axe monté sur la latitude du lieu, on place la lunette sur la déclinaison de l'astre; on tourne le pied, et en même temps la lunette le long de l'équateur, jusqu'à ce que l'astre soit dans la lunette : alors on a l'angle horaire de l'astre et la direction de la méridienne, sauf les vérifications des différentes parties de l'instrument, qui se font comme pour la lunette parallatique (art. 2618).

2413. M. le président de Saron a fait exécuter par Mégnié un équatorial où la lunette est placée d'une maniere plus commode, comme on le voit dans la Planche XXVI, fig. 178. Sur une base AB fixée horizontalement, s'élevent deux montans CD, entre lesquels tourne le demi-cercle GF qui représente le méridien, où se marquent les latitudes terrestres, et que l'on dispose suivant la latitude du lieu, de maniere que le cercle EQ, qui est fixé perpendiculairement sur ce méridien, soit parallele à l'équateur dans le lieu où l'on établit l'instrument.

L'axe HX est destiné à porter la lunette qui est fixée à son extrémité X; cet axe tourne dans une gouttiere ou un canon, dont le dessous est plan et appliqué sur l'équateur, et tourne au centre de celui-ci, par le moyen d'une queue ou d'un petit axe qui est perpendiculaire au centre de l'équateur, et entre dans un des rayons du demi-cercle du méridien.

A l'autre extrémité de l'axe XH est fixé perpendiculairement un cercle horaire IK, qui tourne avec l'axe de la lunette; une alidade M portée par la gouttiere, et qui est fixe comme elle, marque les déclinaisons sur ce cercle IK, à mesure que ce cercle tourne du nord au sud. Par cette disposition, la lunette peut faire tout le tour du Ciel avec le cercle horaire IK, et se diriger vers le pole sans être

embarrassée par le support CD ; et ce qui est impossible dans les autres instrumens de cette espece, elle peut aller entre le pole et le zénit vers les étoiles circompolaires lorsqu'elles sont au dessus du pole : nous parlerons de ses vérifications (2622).

2414. LE SECTEUR ÉQUATORIAL de Graham est un instrument de même espece, dont l'arc de déclinaison est d'un plus grand rayon et d'un moindre nombre de degrés. *Voyez* l'Optique de Smith, art. 887, l'Encyclopédie, et les Ephémérides de Milan pour 1778; on n'en fait pas assez d'usage, pour que j'aye cru devoir en mettre ici la description.

Description du Télescope.

2415. LE TÉLESCOPE (a) est un instrument composé de deux miroirs de métal et d'un oculaire à réfraction, disposés pour bien voir les objets éloignés. Quoiqu'en latin le mot de *telescopium* s'applique également aux lunettes d'approche, sa signification est bornée en françois aux instrumens à réflexion. La premiere idée du télescope vint au P. Mersenne, en 1639, comme on le voit par les lettres de Descartes; mais ce fut Jacques Gregory (*Opt. promota, Londini*, 1663) qui approfondit cette matiere. Newton perfectionna l'invention vers 1672, et acquit le mérite d'inventeur, comme on le voit dans les Transactions philosophiques, n°. 80 et suiv., et dans son Optique. J'ai vu au college de la Trinité à Cambridge le premier télescope que Newton fit exécuter. Hadley, vers 1720, fut le premier qui réussit complètement (*Philos. Trans.* 1723, *n*°. 376.

Un miroir concave RR (FIG. 179) (b), dont la courbure fait partie

(a) Τῆλε, *procul*, σκοπέω, *considero*.

(b) Les miroirs des télescopes sont composés de 20 parties de cuivre rouge, 9 d'étain, et 8 d'arsénic blanc, suivant Passement (*Construction d'un télescope*, 1738); ou 2 parties de cuivre, une de laiton et une d'étain, suivant Hadley : on les polit avec l'émeril et la potée d'étain (Smith, art. 796). On trouve dans le Nautical almanac de 1787, une nouvelle composition pour les miroirs, par M. Edwards, 32 parties de cuivre rouge, 15 d'étain, une de cuivre jaune, une d'argent et une d'arsénic. C'est de toutes les compositions celle qui est la plus blanche, la plus dure, et qui réfléchit le mieux la lumiere; elle procure, à pareille ouverture, autant de lumiere qu'il y en a dans les lunettes acromatiques, tandis que les télescopes ordinaires n'en ont pas le quart (2431). Mais cette composition n'est pas bonne pour de très grands miroirs, parcequ'elle est trop cassante; M. Herschel en a perdu plusieurs pour avoir voulu les rendre trop durs, entre autres un miroir de 4 pieds, qui pesoit plus de deux milliers. M. l'abbé Rochon a fait, en 1787, un miroir avec de la platine, et son télescope surpasse ceux qu'on avoit faits avec les autres compositions. On trouve aussi dans le Nautical almanac de 1787, une méthode pour polir les miroirs, et leur donner une figure parabolique.

d'une sphere de 4 pieds de rayon, a son foyer F éloigné de 2 pieds de la surface du miroir; les rayons paralleles SR, SR, qui arrivent d'un astre ou d'un point lumineux, sont réfléchis de R en F, et ils se réunissent au foyer F; au-delà de ce point de réunion, ils vont en divergeant; on les reçoit sur un petit miroir concave HH, de 3 pouces de foyer, dont le foyer G soit éloigné du foyer F d'une quantité qui se trouve par cette proportion : le foyer du grand miroir est à celui du petit, comme ce dernier est à l'intervalle FG qu'il doit y avoir entre les deux foyers. Dans notre exemple on dira : 24 pouces sont à 3, comme 3 sont à $\frac{3}{8}$ de pouce, qui est l'intervalle FG. Dans cet état, les rayons tombant en H sur le petit miroir, vont se réunir au point C, où est placé le foyer de l'oculaire D, en supposant qu'il n'y ait qu'un seul oculaire. Ces rayons partant du point C, traversent l'oculaire D, et arrivent à l'œil O paralleles entre eux; c'est ce qui est nécessaire à un œil bien constitué, pour voir distinctement un point lumineux. Dans les télescopes ordinaires il y a deux oculaires, dont le premier reçoit les rayons du petit miroir avant leur réunion, et les rassemble au foyer du second oculaire.

2416. Dans les télescopes newtoniens, le petit miroir HH est un miroir plan, incliné de 45°, et qui réfléchit les rayons à l'œil placé sur le côté du télescope; on voit le miroir en M (FIG. 183), et l'oculaire dans le tube OL.

M. Herschel à imaginé, au mois de novembre 1786, de supprimer ce petit miroir, en inclinant un peu le grand miroir pour renvoyer l'image directement sur les oculaires, qui sont placés à côté du tube, et dirigés vers le grand miroir. Cela augmente la lumiere, et l'aberration des rayons n'en est pas sensiblement augmentée. C'est ce qu'il appelle *front view*.

2417. La quantité dont le télescope grossit, est exprimée par le carré du foyer du grand miroir, divisé par le produit des foyers du petit miroir et de l'oculaire; ainsi, dans l'exemple précédent, si l'on suppose en D un oculaire de 2 pouces de foyer, on divisera le carré de 24 pouces par le produit de 3 et de 2, l'on aura 96; et ce télescope grossira 96 fois le diametre de l'objet. S'il y a deux oculaires, il faut une formule plus compliquée pour calculer l'amplification.

Dans le télescope newtonien on divise simplement le foyer du grand miroir par le foyer de l oculaire, comme dans les lunettes ordinaires (2289), et l'on a la force amplificative.

2418. On se sert ordinairement de deux oculaires dans un télescope, pour avoir plus d'ouverture; l'oculaire qui est du côté de l'ob-

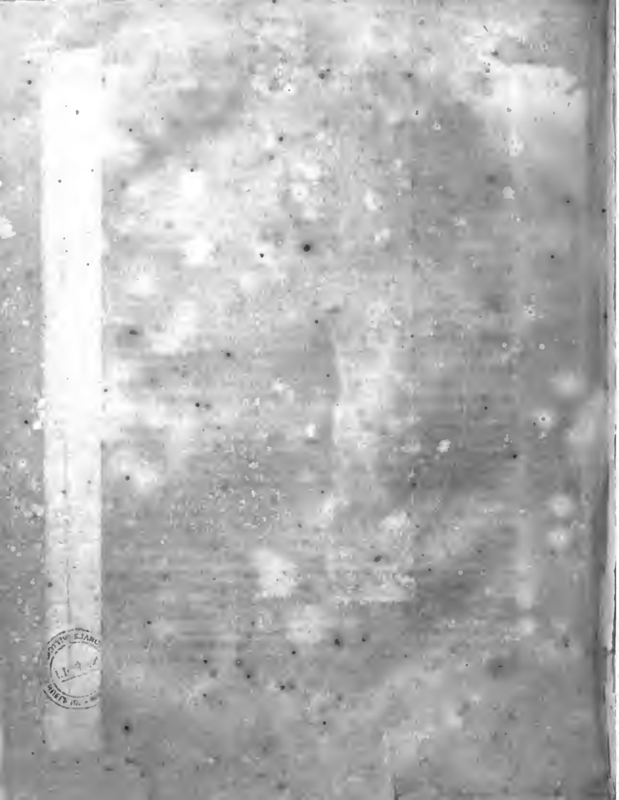
jet, est large et d'un plus long foyer; il rassemble dans un plus petit espace, les rayons venus de divers points de l'objet, tandis que ceux qui viennent d'un seul et même point de l'objet, sont rassemblés en un point au foyer d'un second oculaire plus petit, qui les transforme en autant de faisceaux de rayons paralleles entre eux, qu'il y a de points dans l'objet. Quant aux rayons venus de divers points, le petit oculaire fait converger ces divers faisceaux sous un plus grand angle, d'où résulte l'amplification ou le grossissement. On choisit pour oculaire un ménisque, ou un verre concave du côté de l'œil, et convexe du côté de l'objet, parceque les rayons qui passent sur ses bords, sont moins obliques à sa surface, qu'ils ne le seroient dans une lentille biconvexe.

2419. Pour connoître le champ d'un télescope newtonien, ou l'étendue de l'objet qu'il embrasse, il faut savoir combien la largeur du petit miroir occupe de minutes de degré, par rapport au milieu du grand miroir; et l'on dira pour cet effet : la distance du grand miroir au petit est à la largeur du petit miroir, comme le rayon est à la tangente de l'angle qui exprime le champ du télescope. Je suppose que l'ouverture des oculaires n'est pas moindre que la largeur du petit miroir, car cela restreindroit le champ; c'est ce qui arrive dans les télescopes grégoriens : le trou du grand miroir ne pouvant être fort large, le champ du télescope est limité par les oculaires.

2420. Le télescope grégorien est représenté avec sa monture et son pied dans la fig. 180; ABCD est un tuyau de cuivre ou de bois; AB la place du grand miroir, CD l'ouverture qui reçoit les rayons; E la place du petit miroir qui est au-dedans du tube; EFG la tringle qui sert à rapprocher le petit miroir du grand, pour que le télescope serve aux différentes vues, et aux différentes distances des objets. Le tuyau P des oculaires entre à vis dans la base AB du grand tuyau; O est la place de l'œil. HH est une piece de cuivre qui est représentée séparément en *hh* (FIG. 182); elle se termine par deux rainures, dans lesquelles passent des vis qui la fixent sur le tuyau du télescope; cette piece porte une petite boule de cuivre I, qui est serrée dans la concavité KK du genou (FIG. 180), recouverte d'une calotte de cuivre, qui est percée pour laisser passer et mouvoir la tige I; cette calotte est serrée par trois vis, dont deux paroissent en K, et donnent un frottement dur à la boule qui porte le télescope. La tige du pied se termine en bas par une vis N que l'on serre en dessous, au moyen d'un écrou, ou que l'on visse dans la base LL du pied. Sous cette base il y a 3 pieds LM, LM, qui tournent à charniere

pour

Fig. 176.



pour pouvoir se rapprocher de la tige N, et se placer commodément dans une boîte. On verra dans la figure 188 une monture plus composée pour le pied d'un télescope (2424).

2421. Le petit miroir du télescope est représenté séparément en Q (FIG. 181), vu par derriere, et porté à l'extrémité d'une tige de cuivre pour le faire mouvoir; cette tige passe dans un écrou, auquel tient une piece de cuivre SR, qui s'applique contre la paroi intérieure du télescope où elle glisse dans une rainure ou coulisse faite en queue d'aronde; elle reçoit son mouvement par la tringle extérieure EFG (FIG. 180), au moyen d'un écrou qui sort du tuyau vers le point E, et que l'on voit encore mieux en G (FIG. 183, n° 2). Cet écrou passe au travers de la piece SR (FIG. 181), et au dedans du télescope, il se termine par un collet dans lequel on fait passer une pince X, qui l'empêche de quitter le trou de la piece SR.

Dans les télescopes qui portent un micrometre objectif (2439), on est obligé d'avoir en E un vernier (2342) pour reconnoître facilement et en tout temps la situation du petit miroir; cette division est représentée, figure 183, n°. 2, de la grandeur convenable à un télescope d'un pied. AB est une piece de cuivre fixée à l'extérieur du tuyau, à l'endroit où répond le petit miroir; elle est divisée sur un espace de 2 pouces en vingtiemes de pouce; pour subdiviser ces 20es de pouce chacune en 25 parties, on a pris 24 divisions sur AB qu'on a partagées en 25, comme on le voit de C en D sur une piece de cuivre qui se meut avec le petit miroir, par le moyen de l'écrou G qui se meut dans le rainure HI. Afin d'empêcher que cet écrou ne vacille, on le fait passer au travers d'une piece KL qui recouvre la largeur de la rainure, et sur laquelle est fixé par deux vis le vernier CD. Dans les petits télescopes à la main, on produit le mouvement par une piece en spirale *sp*, qui se voit à gauche du télescope.

2422. Le grand miroir du télescope est contenu dans la culasse du tuyau par un couvercle de cuivre vissé, et par une piece de cuivre T (FIG. 180), triangulaire et un peu convexe, qui fait ressort sur le miroir sans le gêner dans sa situation. Quelquefois aussi l'on fixe dans l'intérieur du couvercle 3 petits ressorts qui pressent le miroir quand on ferme le tuyau : autrefois on y mettoit des vis de pression qui passoient au travers du couvercle ; mais on a reconnu que ces vis pouvoient quelquefois forcer le miroir, lui faire prendre une situation gênée, et rendre les objets confus. Pour s'assurer que le miroir n'est pas gêné, on regarde une étoile, et déplaçant un peu l'oculaire, on élargit l'image; il faut alors que tous les côtés soient égaux.

2423. A l'extrémité du tuyau des oculaires on place un petit œilleton, ou une piece concave comme une coquille, dans laquelle se loge le globe de l'œil; au fond de la concavité est un petit trou qui répond à la prunelle de l'œil; cet œilleton empêche que l'œil ne reçoive les rayons extérieurs, et l'oblige de se placer toujours sur l'axe du télescope où la vision est plus distincte : on voit en OL (FIG. 183) le tube des oculaires sur un télescope newtonien avec son œilleton ; on y voit aussi la vis V qui fait mouvoir le petit miroir M (2421).

2424. Dans les télescopes de 3 à 4 pieds, l'on pratique souvent une autre espece de pied ou de support destiné à leur donner des mouvemens doux et réglés par le moyen des vis de rappel; on en voit le dessin dans la fig. 188. RR est un demi-cercle de cuivre, fixé sur le tuyau du télescope par 4 bras perpendiculaires au plan du demi-cercle, qui reçoivent chacun une vis pour les attacher au tuyau; ce demi-cercle tourne sur un axe X, et il est reçu dans l'épaisseur d'une mâchoire XZ, dont les deux pieces forment une charniere; après quoi elle se termine par une tige qui descend jusques dans celle du pied, c'est-à-dire de X en Y; la base *ef* est d'une seule piece avec la tige XZ. Le demi-cercle RR est garni sur l'épaisseur de sa circonférence de filets égaux à ceux de la vis V, qui engrene dans cette circonférence et l'oblige à tourner; ce qui fait mouvoir verticalement le télescope, pour suivre les astres qui montent ou qui descendent.

2425. Outre le mouvement lent que cette vis V procure au demi-cercle RR, et par conséquent au télescope, on est maître de donner un mouvement prompt au télescope en faisant désengrener la vis V; pour cela on desserre la vis *a*, on l'éleve au dessus de son point d'appui *e*; cette vis demeurant ainsi sans action, le chassis *cbd*, qui porte l'autre vis V, n'est plus pressé contre le demi-cercle, et parceque le même chassis n'est plus soutenu alors que par une charniere portée par la base *ef*, et dans laquelle il tourne à frottement dur, on l'abaisse facilement avec la main; la vis V se trouve ainsi totalement libre, et le télescope en état de tourner à la main aussi promptement que l'on veut.

2426. Pour pouvoir donner au télescope un mouvement horizontal, on se sert d'un canon ou cylindre creux qui entre dans le pied Y du télescope, et qui porte une base *ghk* : ce canon intérieur reçoit la tige XZ dont nous avons parlé, et il est reçu lui-même dans le pied de l'instrument, où on l'arrête par le moyen d'une vis de pression *m*. L'extrémité de la base *khg* porte un écrou cylindrique

g, mobile autour d'un axe ; au travers de l'écrou passe une vis de rappel *gf*, fixée en *f* dans un petit cylindre qui tourne sur la piece *ef*, à cause des différentes inclinaisons de la vis *gf*. Cette vis de rappel, en tournant dans l'écrou *g*, oblige l'extrémité *f* de la piece *ef* de se rapprocher du point *g*, en tournant dans le canon intérieur de la piece *ghκ*; celle-ci est arrêtée par la vis *m*, lorsqu'on veut donner le mouvement lent par le moyen de la vis *gf*. Si l'on veut donner un mouvement prompt à tout le télescope, horizontalement, on lâche la vis de pression *m*; alors le canon de la piece *ghκ* tourne librement dans le pied Y, et emporte avec lui le pivot ou la tige XZ liée à ce canon par la vis *fg*, et par conséquent obligée d'en suivre les mouvemens.

LE CHERCHEUR EE (FIG. 188), en Anglois *Finder*, est une petite lunette que l'on met sur un télescope.* Comme elle a un grand champ, elle sert à trouver facilement les astres que l'on veut observer.

2427. Les télescopes de 32 pouces de longueur, qui sont ceux dont on fait le plus d'usage, ont le foyer du grand miroir de deux pieds, le diametre 5 pouces, le foyer du petit miroir concave 3 pouces, ou 1 pouce ½, suivant que l'on veut faire grossir plus ou moins; le diametre du petit miroir, qui est égal au diametre du trou fait dans le grand miroir, a ordinairement un pouce ; le tuyau des oculaires en renferme deux, l'un de 4 pouces et l'autre de deux pouces de foyer, placés à 3 pouces l'un de l'autre ; mais quand on veut grossir davantage les objets, on a un plus fort équipage ou un tuyau de rechange, dont les deux oculaires sont de 3 pouces et de 14 lignes de foyer, placés à 2 pouces l'un de l'autre ; l'œil se place environ à 6 lignes du dernier oculaire.

2428. On verra dans la table ci-jointe les ouvertures que Short donnoit, en 1763, à ses télescopes, depuis qu'il étoit parvenu à leur donner une forme assez approchante de la parabole, pour que les aberrations fussent insensibles malgré de fort grandes ouvertures : ces dimensions sont en pouces et en centiemes de pouces, mesure d'Angleterre (2650); la troisieme colonne de cette table fait voir quel foyer Short avoit coutume de donner aux

Foyer du grand Miroir.	Ouverture du grand Miroir.	Foyer du petit Miroir.	Amplification.
pouces.	*pouces.*	*pouces.*	
12	3, 30	1 et 2	110
24	5, 57	2 et 4 ½	300
36	7, 70	2 ½ et 6	400
48	9, 50	3 et 7	500
144	21, 50	4 ½ et 12	1200

petits miroirs de ses télescopes grégoriens [a]; il y a deux foyers différens pour le petit miroir, afin de grossir plus ou moins. Le télescope de 144 pouces, ou 12 pieds de foyer, a été exécuté trois fois ; celui de milord Marlborough, qu'il a donné à l'Observatoire d'Oxford, a été long-temps le plus grand et le meilleur qui eût jamais été fait ; il y en a un à Edimbourg de même grandeur, mais il n'est pas aussi bon ; celui qu'il avoit fait pour l'Espagne fit naufrage.

2429. Mais M. Herschel, qui depuis 1772 s'occupoit à faire des lunettes et des télescopes, a fait, en 1782, des progrès extraordinaires dans cette partie ; il a exécuté un télescope de 20 pieds, qui peut grossir 6000 fois (*Philos. Trans.* 1782, *p.* 173), quoiqu'ordinairement il ne le fasse grossir que 2 à 300 ; enfin, en 1788, il a exécuté un télescope de 40 pieds anglois, qui a 4 pieds d'ouverture [b]. M. l'abbé Rochon a fait faire à la Muette, par M. Carochez, en 1787, un télescope de 22 pieds, qui a très bien réussi, et qui peut aller de pair avec ceux de M. Herschel de même dimension. Les télescopes de 7 pieds, que l'on peut avoir chez M. Herschel, ont 6 pouces d'ouverture, et coûtent cent louis ; la monture est ingénieuse et légere ; l'observateur les transporte avec la plus grande facilité : ses télescopes de 20 pieds ont 18 $\frac{3}{4}$ pouces d'ouverture, mesure d'Angleterre.

2430. Un télescope grégorien peut se mettre sous la forme newtonienne (2416), en y substituant un petit miroir plan, et faisant au tuyau une ouverture latérale ; alors on voit les objets plus clairs, parcequ'on diminue la dispersion des rayons qui se fait sur le petit miroir ; mais le télescope grossit moins (2417).

2431. C'est le petit miroir et les oculaires d'un télescope qui font grossir les objets ; mais la partie essentielle du télescope consiste dans la quantité de rayons que reçoit le grand miroir : ainsi c'est l'ouverture du télescope qui décide principalement de sa force et de sa perfection ; d'où il suit que plus on augmentera les ouvertures, plus on perfectionnera le télescope. Il est inutile en général de faire grossir

(a) J'ai vu chez M. Aubert, à Londres, un télescope extraordinaire de Short, qui a 6 pouces d'ouverture, quoiqu'il n'ait que 18 pouces de foyer.

(b) On ira peut-être encore plus loin, comme je l'avois prédit dans la premiere édition de ce livre (art. 1940) ; mais ce miroir de 40 pieds, qui a 4 pieds de diametre, pese deux milliers ; il falloit 20 hommes pour le tourner sur sa forme avant que M. H. eut imaginé une machine pour cet effet ; lorsqu'il est monté, le tout pese 40 milliers : je l'ai vu avec étonnement au mois d'août 1788 ; il donne tant de lumiere, que la nébuleuse d'orion (837) y répand une clarté semblable à celle du plein midi. Il pourra se faire que ce télescope termine moins bien les objets ; mais cette grande lumiere sera une chose précieuse dans bien des cas.

beaucoup un télescope, celui de 7 à 8 pieds, qui pourroit grossir mille fois, en y mettant un petit miroir et des oculaires d'un court foyer, donne plus de distinction et de clarté, quand on se contente de le faire grossir 100 fois; mais s'il a beaucoup de lumiere et de perfection, on peut le faire grossir beaucoup plus. Les télescopes ne rendent pas autant de lumiere par réflexion que les lunettes en transmettent (M. Bailly, *Mém.* 1771, *pag.* 631; M. de Buffon, *Mém.* 1747); cependant on les préfere souvent à cause de la grande ouverture qu'on peut leur donner.

2432. Quelquefois on emploie un petit miroir convexe au lieu du miroir concave HH (FIG. 179), et c'est ce qu'on appelle télescope de *Cassegrain;* on met le petit miroir HH plus près de l'œil que n'est le foyer F du grand miroir; les rayons réfléchis RF atteignent le petit miroir avant leur réunion, et le télescope est plus court (*Smith, Tom. II, pag.* 151, *édit. d'Avignon*).

2433. Pour juger de la bonté d'un télescope, on y met un oculaire d'un très court foyer, c'est-à-dire, on le force, autant qu'il est possible, pourvu qu'on voie distinctement Saturne et Jupiter, et qu'on leur trouve assez de lumiere lorsque l'air est pur et tranquille; on cherche alors par expérience (2435) combien le télescope amplifie ou grossit les objets; et l'on voit par-là s'il approche beaucoup de la perfection des bons télescopes que nous avons cités (2427, 2429).

2434. Si plusieurs télescopes de même sorte ont à peu près la même longueur, ou s'ils sont de différentes especes et qu'ils grossissent également, on jugera de l'avantage qu'ils peuvent avoir l'un sur l'autre en lisant la même écriture avec les différens télescopes.

On voit dans l'Optique de Smith, qu'avec les télescopes de 4 pouces de foyer on voyoit les satellites de Jupiter, et on lisoit les Transactions philosophiques dont le caractere est le même que celui de cet ouvrage, à 125 pieds de distance; on les lisoit à 160 pieds avec 6 pouces, à 220 avec 9 pouces, à 500 pieds avec 15 pouces; et Maclaurin assure qu'on avoit vu plusieurs fois les 5 satellites de Saturne ensemble, avec un télescope de 15 pouces de foyer, comme Cassini les avoit vus quelquefois avec une bonne lunette de 17 pieds.

2435. Le moyen dont Hauxsbée se servoit pour déterminer par expérience la force amplificative de son télescope de $3\frac{1}{4}$ pieds de foyer, est rapporté dans Smith, et il suffit réellement pour ces sortes d'expériences. Ayant placé un cercle de papier d'un pouce de diametre à la distance de 2674 pouces de l'oculaire dans la direction

ne doit pas être réellement sphérique; ils ne supporteroient pas des ouvertures aussi larges; ils auroient des aberrations et une confusion trop sensibles.

2438. On peut regarder comme une dépendance du télescope le *Polémoscope* (a) d'Hévélius (*Selenog, pag.* 28); c'est un instrument qui a deux réflexions et deux réfractions, il sert à observer les objets situés ou derriere l'observateur, ou de côté; on en applique quelquefois à des instrumens d'astronomie, pour observer au zénit d'une maniere plus commode, comme on emploie des miroirs plans dans les instrumens de la marine, pour faire toucher en apparence les images des deux objets dont on observe la distance (2458). Ramsden en fait avec des lentilles prismatiques (2411); il trouve que malgré leur épaisseur, la réfraction fait perdre moins de rayons que la réflexion suivie d'une réfraction.

Héliometre ou Micrometre objectif.

2439. L'HÉLIOMETRE, ou micrometre objectif, est une des plus belles inventions modernes, aussi bien que celle des verres acromatiques. Bouguer est le premier qui nous ait appris la maniere de faire un micrometre objectif, (*Mém. acd.* 1748). Il l'appella HÉLIOMETRE, ou *Astrometre*, parceque cet instrument lui servit d'abord à mesurer exactement le diametre du soleil.

On voit dans la fig. 186, un héliometre monté sur un bout de tuyau A qui fait l'extrémité d'une lunette de 18 pieds, dont je me suis servi depuis 1753; B est un des deux objectifs de 18 pieds de foyer; il est logé dans une feuillure circulaire de cuivre, collé avec du mastic et recouvert par deux têtes de vis C et D; le verre mobile E qui est égal à l'autre, de même ouverture et de même foyer, est porté dans un chassis FGHI mobile entre deux coulisses K et K, formées en queue d'aronde; ce chassis est taraudé en L et reçoit une vis NMLO dont la tête est arrêtée en M sur la platine fixe. Lorsqu'on tourne la tête de la vis par le moyen de la rosette N, le chassis qui porte le verre E est obligé de s'approcher du verre dormant B, ou de remonter vers L jusqu'à ce qu'il rencontre l'extrémité de la vis en O; c'est le terme de son plus grand écartement. Le chassis mobile porte sur le côté en I un trait de burin qui sert d'index, et qui marque sur une petite échelle P les tours de la vis, et l'écartement des deux objectifs.

Le chassis mobile est évidé entre L et O pour qu'il soit plus lé-

(a) Ce mot vient de πόλεμος, *multus*.

ger ; mais afin que la vis ne se rouille pas à l'humidité de l'air, on la recouvre d'une plaque de cuivre qui tient avec deux vis sur les coulisses K, K ; on doit aussi recouvrir l'intervalle EB qui est entre les deux verres, avec un papier noir ou un morceau de drap, pour empêcher l'introduction des rayons, qui nuiroient à l'observation en ne passant point au travers des objectifs.

2440. L'effet du micrometre objectif, consiste à donner deux lunettes dans un seul tuyau et avec un seul oculaire ; le cercle RRR marque la largeur du tuyau de la lunette vers l'objectif, ce tuyau va en diminuant vers l'oculaire, où l'on peut le rétrécir à volonté ; car l'on n'a pas besoin d'avoir un grand champ dans cette sorte de lunette.

On voit dans la fig. 185, un cercle AAA qui représente le champ de la lunette ou le cercle visible au foyer commun des deux objectifs et de l'oculaire ; ST est un cercle qui représente l'image du soleil formée par l'un des objectifs de l'héliometre ; RV est l'image que donne l'autre objectif. Quand on veut mesurer le diametre du soleil on approche l'un de l'autre les deux verres jusqu'à ce que les deux images se touchent en un point T ; et la distance des centres des deux objectifs, évaluée en secondes (2532), donne la distance des deux centres C et B, c'est-à-dire le diametre du soleil ; cet écartement des objectifs est toujours égal au diametre de l'image qui se forme à leur foyer.

Lorsqu'un héliometre est fort long, il seroit très utile de pouvoir approcher ou éloigner les objectifs l'un de l'autre, sans cesser de regarder dans la lunette ; cela se peut faire avec une tringle qui se termineroit par un pignon et qui engreneroit dans une roue de chan fixée sur la vis : j'en ai donné la figure *Mém. de* 1754.

2441. L'invention de Bouguer a trois avantages considérables sur les micrometres ordinaires (2360) ; elle donne un moyen d'observer le diametre d'un astre malgré le mouvement diurne ; en effet, un astre qui est sur les fils d'un micrometre n'y reste qu'un instant, et il faudroit pouvoir observer les deux bords et les deux fils à la fois, ce qui est très difficile ; aulieu qu'avec l'héliometre, quand les deux images se touchent, elles restent toujours en contact, quel que soit le mouvement de la sphere, celui de la lunette, ou de l'œil ; et l'on a tout le temps de vérifier et de constater l'exactitude de la mesure. Les micrometres ordinaires ne peuvent s'appliquer à de grandes lunettes pour mesurer les diametres du Soleil ou de la Lune, parceque le champ de ces lunettes ne contient pas 30′ de diametre ; mais le micrometre objectif mesure les astres lors même

que


EQUATORIAL.
Astronomie Pl. XXV.
Art. 2409.
T. II. Pag. 640.
P
O
Q
H
K
N
V
W
G
E
D
S
C
F
G
A
A
B

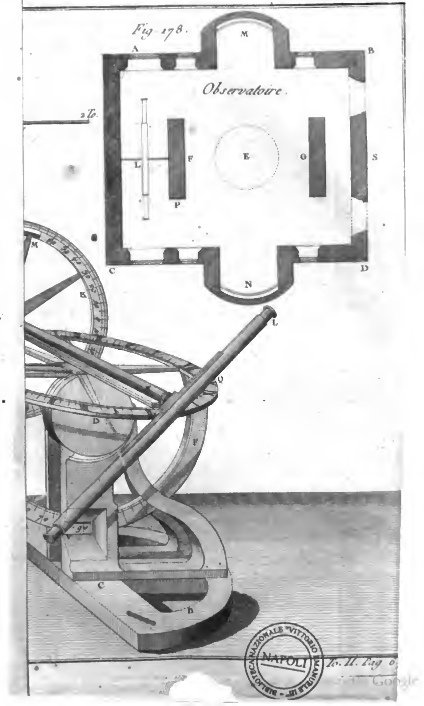

Fig. 178.
Observatoire.
A
B
C
D
M
N
E
F
L
O
P
S
2 To.
M
K
L
Q
D
F
C
B

Fig. 179

Fig. 180

Fig. 181.

Fig. 182.

Fig. 184

que le champ de la lunette n'en contient qu'une petite partie. Enfin les micrometres nous font voir les deux bords du Soleil ou de la Lune sur les bords de la lunette; au lieu que le micrometre objectif nous les donne toujours au centre et sur l'axe même de la lunette, où l'on peut faire toucher les deux images. On verra la vérification et l'usage de cet héliometre (2519 et suiv.).

Héliometre appliqué au Télescope.

2442. L'INVENTION de l'héliometre fait par Bouguer, fut appliquée en Angleterre aux télescopes, en 1754, d'une maniere un peu différente; elle consiste à partager un objectif en deux parties égales, que l'on fait mouvoir en sens contraire, et que l'on place à l'extrémité d'un télescope; Short et Dollond furent les premiers qui en firent construire, et ils en attribuerent la premiere invention à Savery; Short assure que cette invention avoit été déposée en 1743 à la société royale, (*Philos. Trans. tom.* 48; *Mémoires de Marseille, année* 1755); mais du moins elle ne fut répandue et employée en Angleterre qu'après Bouguer, c'est à-peu-près ce qui étoit arrivé à l'occasion du micrometre d'Auzout (2348).

Les demi-cercles ABC, DEF (FIG. 187), représentent les deux moitiés de l'objectif, qui se meuvent parallèlement le long de la ligne AF; le segment ABC est fixé sur une platine de cuivre AGHI, et le segment DEF sur une autre platine KLMN; ces deux platines se terminent chacune par une crémaillere HI et MN, dont les dentures se regardent: un pignon fixé vers P, sous un coq à l'extrémité de la monture de l'héliometre, ou de la platine qui lui sert de base, engrene dans les deux crémailleres, en sorte que l'une montant, l'autre est forcée de descendre; par ce moyen elles ont des mouvemens égaux en sens contraire, et les centres des deux portions d'objectifs sont toujours l'un et l'autre à même distance de l'axe du télescope. On fait tourner le pignon P par le moyen d'une tringle Q (FIG. 188).

Les deux platines AGH, KLM, qui portent les verres, glissent sur une platine fixe et plus grande OSSQQRRO, qui forme l'assemblage, et qui s'adapte au télescope; cette platine du fond porte deux coulisses RR, SS, entre lesquelles se meuvent les deux platines mobiles; ces deux coulisses doivent être parfaitement paralleles à la ligne AF, sur laquelle se meuvent les deux verres. Afin que les centres des verres soient toujours maintenus sur cette même ligne AF. Le coq ou la chappe de cuivre TT fixée sur la grande platine,

et qui porte le pignon P, reçoit aussi les crémailleres des deux platines et les assujettit contre le pignon, pour empêcher qu'elles ne s'écartent l'une de l'autre. Le mouvement se communique aux deux crémailleres par le moyen du pignon qui est en P; et les divisions qu'on y voit marquent le mouvement des verres: la regle Y est divisée en pouces et en dixiemes de pouces anglois; chaque trait qu'on voit sur le bord de cette regle marque un vingtieme de pouce; le vernier X doit occuper 24 divisions de la regle Y, et être divisé en 25 parties: par ce moyen elle subdivise en 25 chaque vingtieme de pouce, c'est-à-dire qu'elle donne en cinq centiemes parties de pouce, la distance d'un verre à l'autre.

2443. Le vernier X, est attaché sur l'une des platines mobiles XAGHI par deux vis *g g*, qui passent dans des ouvertures ovales, pour avoir la facilité de faire concourir et coïncider les divisions, quand les verres sont bien d'accord et ne donnent qu'une seule image de l'ojet; mais ces vis *g g* doivent être serrées dans l'usage ordinaire du micrometre objectif Le vernier porte aussi une oreille *h*, perpendiculaire à son plan, qui sert d'écrou à la vis V; celle-ci tourne dans une oreille *x*, fixée à la platine mobile et qui arrête le collet de la vis, de sorte que quand la vis tourne, l'écrou *h* est obligé de se mouvoir et entraîne avec lui l'arc de vernier; on s'en sert lorsqu'on est obligé de lui donner un petit mouvement pour accorder l'index avec la réunion des images (2454).

Lorsque les deux segmens de verre concourent ensemble pour ne former qu'un seul verre, un seul centre, une seule image, ils sont compris l'un et l'autre dans la circonférence L*a*BG*f*, qui désigne l'ouverture du télescope, et celle de la grande platine fixe OOQQ, sur laquelle glissent les deux platines des verres. Quand les deux verres sont éloignés du centre du télescope, comme on le voit dans la figure, il n'y a plus qu'une portion CB*a*, DE*f*, de chaque verre qui réponde à l'ouverture du télescope, et par laquelle on puisse voir les objets; ce sont ces deux parties de chaque demi-cercle qu'on a teinté plus fortement dans la figure.

Les verres sont arrêtés sur leurs platines, chacun par trois petites équerres doubles, de cuivre, où il y a des vis et un ressort à chacune: une des vis de chaque équerre *e d*, sert à la fixer sur la platine; la seconde *e*, sert à contenir le verre horizontalement; la troisieme *d* à presser sur le verre pour l'assujettir sur la platine; les vis qui retiennent les verres horizontalement, c'est-à-dire parallèlement à la platine, telles que *e e*, buttent contre des ressorts *m m* qui entourent la circonférence des verres, et les retiennent par leur épais-

seur ; ces ressorts font une pression modérée et constante, qui ne gêne point les verres. Les équerres A et F, n'ont point de vis pour presser horizontalement, parcequ'il suffit que les verres soient pressés d'un côté par les équerres C et D, qui ont chacune dans leur montant une vis horizontale ou parallele aux platines, et qui presse aussi contre des ressorts, comme les vis des équerres B et E.

Les verres sont appuyés le long de leur diametre ou de la ligne YF contre de petites lames de cuivre mises de chan ou sur leur épaisseur, et soudées sur le bord intérieur de chacune des platines mobiles; pour que cette épaisseur de deux petites lames ne forme pas une distance entre les centres des deux verres, on peut les user chacun de l'épaisseur d'une de ces lames, afin qu'étant l'un vis-à-vis de l'autre, quoique séparés par l'épaisseur des deux lames, ils ne fassent qu'un seul objectif: il est vrai qu'alors une petite partie de cet objectif est interceptée le long du diametre ; mais les objets sont encore assez visibles et assez distincts.

2444. Le télescope garni de son héliometre ou micrometre objectif, est représenté dans la fig. 188 ; CD est la platine fixe du micrometre (2442), vue par dessous ; EE est le *Chercheur* (2426) ; G est la vis qui sert à changer la distance du petit miroir (2421) ; HH est la circonférence de l'extrémité du tube du télescope, qui est dentée pour procurer le mouvement de rotation de l'héliometre. La platine de celui-ci porte un collet circulaire ou un bout de tuyau qui est soudé de chan, et que l'on insere dans l'extrémité B du télescope ; ce collet répond exactement à l'ouverture circulaire *fLaG* de la fig. 187 : il y a un autre collet H qui embrasse le tuyau du télescope à quelques lignes de son extrémité, il y est fixé par des vis, et il porte un cercle ou espece de roue, dont une partie est dentée et le reste plein ; cette roue sert à retenir le micrometre par le moyen de trois crochets, comme L, K, qui sont fixés à la grande platine du micrometre et viennent reprendre par dessous la roue dentée en tournant librement sur sa circonférence ; il y a deux de ces crochets qui comme L, sont arrêtés par leur base à la platine du micrometre, chacun au moyen d'une vis M, qui passe dans la platine, et par leur rebord N viennent embrasser la roue dentée qui est fixée au tube du télescope. On en voit un *ln* (FIG. 192).

Le troisieme crochet en double équerre, que l'on voit en K, est plus composé, parcequ'il sert au mouvement de rotation que doit avoir le micrometre ; il renferme une petite roue ou pignon, dont un pivot est arrêté dans la platine du micrometre; l'autre pivot se termine par une tige d'acier taillée carrément, qui passe hors de

la chappe ou du tenon, et sur laquelle on place une clé O, pour faire tourner la petite roue au moyen d'une tringle PQ.

2445. La chappe qui est représentée en K dans la fig. 188, se voit séparément en R (FIG. 189). La partie S est celle qui tient à la platine du micrometre; la partie R contient le pignon, et la tige T est celle où l'on place la clé. Cette clé brisée, qui sert à donner le mouvement, est aussi exprimée à part dans la fig. 190; c'est une espece de charniere double, formée comme la lampe de Cardan par deux axes qui se croisent à angles droits, et qui sont mobiles chacun sur ses pivots; c'est ainsi que l'on suspend les boussoles, pour leur donner la liberté de se mouvoir en tout sens; et c'est ce qu'on appelle *lampe de Cardan*. Le premier de ces deux axes AX, sert à faire tourner le micrometre, et l'autre axe qui lui est perpendiculaire sert au mouvement de la clé et de la tige qui s'étend jusqu'à la main de l'observateur. Lorsqu'on tourne la clé et qu'on fait tourner le pignon contenu dans la chappe R (FIG. 189), la roue dentée VX étant arrêtée sur le télescope et ne pouvant avoir aucun mouvement, le pignon est obligé de changer de place en roulant sur la circonférence VX, et il fait tourner la platine entiere du micrometre sur laquelle le pignon est fixé: par ce moyen l'on place la ligne des centres sur laquelle se meuvent les deux verres, dans la direction de l'objet que l'on veut mesurer, à quelle inclinaison que ce soit; par exemple, pour mesurer la distance de Vénus au bord du Soleil, qui en est le plus proche (2133).

2446. Pour connoître l'inclinaison que donne au micrometre le mouvement du pignon R (FIG. 189), sur la circonférence dentée V X, le bord de l'équerre se termine en biseau ou plan incliné et tranchant, et porte un trait qui sert d'index, et marque sur les divisions de la circonférence VX les degrés d'inclinaison de la ligne qu'on mesure, par rapport à l'horizon. On est obligé de connoître cette inclinaison quand on mesure les diametres de la Lune, parceque la ligne des cornes est plus ou moins inclinée à l'horizon; ce qui produit une réfraction plus ou moins grande sur le diametre de la Lune (2248).

2447. Le télescope que nous venons de décrire avec son micrometre objectif, est celui que le P. Pézenas fit faire à Londres vers 1755, pour l'observatoire de la marine de Marseille; il a deux pieds de foyer, et l'objectif en a 40; nous allons en décrire un autre de Dollond, fait en 1760, qui n'a qu'un pied de foyer.

Le micrometre objectif que Dollond avoit coutume d'appliquer à ses télescopes d'un pied, est représenté dans la fig. 193: il est vu

par dedans; ce qui fait qu'on ne distingue pas les deux platines mobiles. Le cercle AB a 2 pouces 5 lignes de diametre, mesure de Paris, et les verres C, D, 23 lignes d'ouverture lorsqu'ils sont réunis. Le cercle de cuivre ES forme un rebord de 4 lignes, ce petit bout de tuyau entre dans celui du télescope, et la platine fixe du micrometre est arrêtée par plusieurs vis sur ce bout de tuyau qui s'ajuste au télescope.

Les deux vis G, H, sont à 14 lignes de distance l'une de l'autre, elles ont 18 lignes de longueur et 3 lignes de diametre, et elles portent 42 pas ou filets sur chaque pouce. Ces vis sont appuyées par leur base sur deux pointes I et K, fixées dans des tenons qui tiennent sur la plaque fixe du micrometre: elles passent ensuite dans des écrous L, M, mobiles, qui conduisent chacun une des deux platines mobiles du micrometre au travers d'une longue ouverture pratiquée dans la platine fixe pour laisser passer les écrous; ces deux vis tournent à contre-sens, pour qu'un des écrous puisse monter pendant que l'autre descend.

2448. Chaque tour de vis est divisé en 35 parties par le moyen de l'aiguille qui tourne sur le cadran N, et qui est fixée carrément sur la tête d'une des vis X. Au dedans de la boîte OP, chaque vis porte une roue dentée de 54 dents; ces roues ont 13 lignes de diametre, elles engrenent l'une dans l'autre, afin qu'une vis ne puisse tourner sans l'autre, et que les deux mouvemens soient contraires, mais égaux.

Pour pouvoir faire marquer les tours de vis sur le cadran Q, on a placé un engrenage tel que la roue dont on voit une portion en Q, par une ouverture de la boîte, fasse un tour quand l'aiguille N en fait 25; et comme cette roue est divisée en 25 parties, chacune marque un tour des vis G et H.

2449. Chaque écrou L, M, est précédé par une lame en forme de petit écrou plus mince, qui sert à nettoyer la vis, et à diminuer le jeu, en faisant ressort contre les pas de la vis.

Les vis G et H que nous avons représentées à découvert, pour en faire voir la situation et le jeu, sont recouvertes chacune par une petite boîte de cuivre représentée séparément en X (FIG. 191), qui tient avec plusieurs vis sur le tenon I ou K, et sur la boîte OP qui renferme la cadrature.

2450. Le grand miroir du télescope a 8 pouces $\frac{2}{3}$ de foyer, 2 pouces $\frac{1}{3}$ d'ouverture, et un trou de 9 lignes; le petit miroir à 9 lignes de diametre, 18 lignes de foyer, il est à 10 pouces $\frac{1}{4}$ du grand miroir, quand on regarde sans héliometre, et 5 lignes plus près

quand il y est. L'oculaire a 3 pouces 7 lignes de foyer, il est placé à 9 lignes de la surface du grand miroir, du côté de l'œil; le diaphragme est placé 17 lignes plus près de l'œil, il a 6 lignes d'ouverture; le petit oculaire qui a 9 lignes de foyer, est à 2 pouces $\frac{1}{3}$ de l'autre oculaire, il a 7 lignes d'ouverture; les deux oculaires ensemble équivalent à un seul qui auroit six lignes de foyer. L'équipage le plus fort à deux oculaires de 2 pouces 4 lignes et de 10 lig. $\frac{1}{2}$ de foyer, à 25 lignes l'un de l'autre; ils équivalent ensemble à un oculaire de 3 lignes de foyer. L'œilleton est à 9 lignes du dernier oculaire dans l'équipage le plus foible, et à 6 lignes dans l'équipage le plus fort. L'objectif CD qui sert de micrometre, a 10 ou 12 pieds de foyer.

2451. Cet objectif détermine seul la valeur des angles que l'on mesure, par la distance des deux moitiés, comparée à la longueur focale de cet objectif; il est vrai que les miroirs accourcissent cette longueur du foyer, puisqu'un objectif de 40 pieds se réduit à un telescope de 2 pieds; mais les miroirs ne font qu'abréger le chemin que les rayons ont à faire pour se réunir, sans changer l'angle que les rayons font entre eux; ainsi l'écartement des deux moitiés d'objectif sera le même pour mesurer le diametre du Soleil, que si ces verres étoient employés à former un simple héliometre (2440) en forme de lunette ordinaire (*Mém. de Marseille* 1755, *pag.* 93).

2452. De là vient l'avantage d'appliquer à l'héliometre un objectif d'un très long foyer; les images y sont plus grandes, plus distinctes, plus lumineuses, et par conséquent plus aisées à mesurer exactement; la distance des objectifs étant plus grande, ils auront plus d'espace à parcourir pour mesurer les angles; un cinq centieme de pouce, qui est à-peu-près la plus petite quantité dont on puisse s'assurer sur une division, ne répond qu'à 51‴ avec un objectif de 40 pieds.

2453. Comme il est fort difficile d'employer, de faire mouvoir et d'essayer une lunette de 40 pieds, Short se servoit d'un télescope; en effet les objectifs étant adaptés à un télescope qui en raccourcit le foyer, on juge de la bonté du verre par la netteté avec laquelle on voit l'objet, et l'on estime la longueur de son foyer par la quantité dont il faut rapprocher le petit miroir du grand, pour voir distinctement, lorsque l'objectif y est adapté.

2454. On doit s'assurer dans un micrometre objectif que les deux moitiés de verres sont bien disposées sur leurs platines, qu'elles sont bien dans le même plan, qu'elles ne sont ni trop éloignées ni trop voisines de l'axe du mouvement. Pour cela il faut voir si quand

elles sont réunies en un seul objectif, elles forment une seule image sans aucune duplicité ni confusion; pour cela on regarde une petite étoile, les deux verres étant d'abord écartés, on la voit aussitôt double; mais en rapprochant les deux verres, les deux étoiles doivent se réunir en une seule, qui soit exactement de même grandeur que chacune des deux étoiles que l'on voyoit auparavant; si on les apperçoit passer l'une à côté de l'autre sans se toucher ou sans se confondre parfaitement, on en conclut que les verres ont besoin d'être un peu changés par le moyen des vis de pression : on verra par diverses épreuves s'il faut les serrer ou les relâcher, les éloigner ou les rapprocher.

2455. Le plus grand inconvénient du micrometre objectif dans le télescope, est la parallaxe optique des objets que l'on regarde : je suppose que les deux images du Soleil se touchent parfaitement lorsqu'elles sont au milieu du champ et sur l'axe même du télescope; les deux bords se quitteront lorsque le Soleil s'éloignera du milieu, ou que l'œil de l'observateur changera, parceque le rayon visuel passera entre les deux images; quelquefois même il arrive que sans changer la situation de l'œil ni de l'objet, on voit les deux bords de l'objet se mordre et se quitter alternativement. Pour éviter, autant qu'il est possible, le danger de cette parallaxe, il faut avoir une croisée de fils au foyer des verres, et n'observer le contact des objets que quand on les voit très près de cette croisée, c'est-à-dire au milieu du champ du télescope; il faut aussi mettre à l'extrémité du tuyau des oculaires un *œilleton* ou un très petit trou, qui assujettisse l'œil au même point, afin qu'on ne puisse jamais voir l'objet obliquement.

2456. Il arrive aussi, par l'effet de la chaleur sur un tuyau de métal, que le diametre du Soleil paroît plus grand après midi, parcequ'il fait plus chaud, et l'on est obligé alors de rapprocher le petit miroir du grand, pour rendre les images plus nettes, et retrouver dans le diametre du Soleil les mêmes parties. Ainsi le même nombre de parties ne vaut pas toujours le même nombre de secondes, et il faut tenir compte de cette différence dans les comparaisons que l'on fait entre le diametre du Soleil et les autres quantités mesurées, ou ne comparer entre elles que des mesures faites à un même degré de chaleur. *Mém. présentés à l'acad.* V. 375.

2457. J'aurois voulu parler ici de l'instrument à réflexion qui sert à observer sur mer, dont l'idée fut donnée par Hooke et Newton, et que Hadley exécuta en 1731; mais ce livre n'est déja que trop long; j'indiquerai seulement (4175) les auteurs qui en ont parlé.

Je terminerai ma description en annonçant celle que M. Vince, habile professeur à Cambridge, se propose de publier, et qui sera bien plus étendue et plus complete.

Des Horloges astronomiques.

2458. Pour connoître le temps vrai d'une observation (960), l'on n'avoit autrefois d'autre moyen que d'observer la hauteur du Soleil ou d'une étoile (1033). Ce fut vers l'an 1300 que l'usage des horloges à roues dentées commença de se répandre (Voyez *le Traité d'Horlogerie* de M. le Paute, horloger du Roi, 1755, *in*-4°., chez Samson); on les connoissoit cependant dès l'an 1120; *Journ. des Sav.*, 1782, *pag.* 182.

2459. Dans les observations de Waltherus, faites vers l'an 1500, et publiées par Schoner en 1544, on lit (*pag.* 50) que l'horloge dont il se servoit étoit très bien réglée; que d'un midi à l'autre elle se retrouvoit parfaitement d'accord avec le Soleil, et que les temps marqués sur l'horloge étoient presque les mêmes que ceux qu'on tiroit du calcul. Je crois qu'il ne faut entendre ceci que de la précision d'environ une minute.

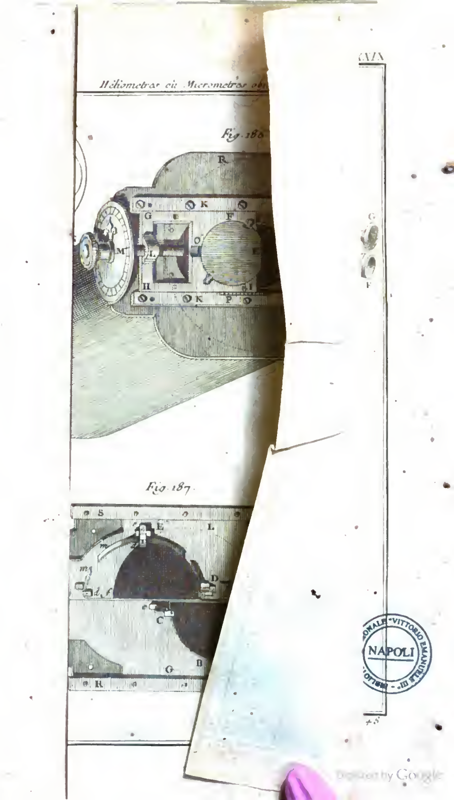
Tycho-Brahé avoit 4 horloges qui marquoient les minutes et les secondes de temps; la plus grosse n'avoit que trois roues, dont la premiere et la plus grande avoit 3 pieds de diametre, et 1200 dents; on se servoit toujours de deux horloges à la fois. Hévélius employa aussi les meilleures horloges de son temps; mais ces machines étoient bien imparfaites avant l'usage du pendule.

2460. Galilée apperçut que la durée des oscillations d'un pendule étoit constante et dépendoit de sa longueur; Edward Bernard prétend que les Arabes le savoient; Huygens imagina, en 1656, d'employer ce régulateur pour les horloges (498); on prétend que Vincent Galilée, fils, l'avoit fait à Venise dès 1649; mais cette heureuse découverte ne fut connue et utile qu'après les idées de Huygens (*Horologium oscillatorium*, 1673).

2461. Je n'entrerai pas ici dans le détail de la construction des horloges à pendule [a], il faut en voir la description dans les Traités d'horlogerie de M. Thioust, du P. Alexandre, de M. le Paute et de M. Berthoud; *Essai sur l'horlogerie*, 1773, 2 *vol. in*-4°. Je dirai seu-

(a) Bien des personnes les appellent simplement des *Pendules*, en prenant la partie pour le tout; mais le pendule n'est que le régulateur de l'horloge (FIG. 197); et les astronomes plus exacts dans l'usage des termes, disent souvent une *Horloge à pendule*, et non pas simplement une *Pendule*.

lement


Héliometres ou Micrometres ob
Fig. 186
Fig. 187
R
K
G
F
M
L
H
I
K
P
S
E
L
D
C
G
B
R

C
E
E
G
A
R
F
R
X N
Z
d
V
a
c
b
f
e
g
k
h
m
Fig. 191.
Y
X
Fig. 193.
A
E
Verre
D
C
Verre
G
L
O
Q
H
K
X
N
M
B
S
P



lement que, pour avoir une bonne horloge à secondes, la plus simple de toutes, on peut se contenter de 4 roues qui aient 120, 100, 60, 30 dents, et de 3 pignons de 10 ailes chacun. L'échappement de Graham est préféré par beaucoup d'horlogers, parcequ'il a la propriété de conserver l'huile; les *échappemens libres* de M. le Roy, perfectionnés ensuite en Angleterre, sont employés actuellement par tous ceux qui aspirent à une extrême précision.

2462. LES VERGES DE PENDULE qui ne sont composées que d'une simple regle de fer, s'alongent d'environ un cinquieme de ligne pour 30° du thermometre, en sorte qu'étant réglées en été, elles peuvent avancer en hiver de 20″ par jour; il est donc important pour un astronome d'avoir une verge de pendule qui soit composée de maniere à corriger cette dilatation des métaux; on trouvera plusieurs méthodes pour cet effet dans les livres que je viens de citer; voici celle que Harrison imagina dès 1726, et qui est sans contredit la plus sûre de toutes celles qui ont été proposées. Graham l'exécuta en 1740 pour milord Macclesfield: toutes les horloges des astronomes sont composées sur ce principe; M. le Paute, M. Berthoud, M. Robin, M. Janvier, à Paris, en ont fait un grand nombre; et elles réussissent de la maniere la plus complete (2465).

2463. Le pendule composé de 9 verges est représenté dans la figure 197, où il est supposé coupé par le milieu, à cause de sa trop grande hauteur; le ressort de suspension SR [a], a 27 lignes depuis la goupille R jusqu'à la goupille S; mais le point où est serré le ressort, dans une pince de la cage du mouvement, est 5 $\frac{1}{2}$ lignes plus bas que la goupille R. La traverse AA étant de cuivre, et les verges de fer AB arrêtées chacune par un écrou au dessus de la traverse de cuivre, il y a 5 $\frac{1}{2}$ lignes de cuivre en S, depuis la goupille qui passe au travers du ressort jusqu'au dessus de la traverse AA. De là il se trouve 33 pouces 2 lignes de fer jusqu'au bas de la traverse inférieure de cuivre BB où les verges de fer sont également arrêtées; le chassis extérieur AABB est suspendu au ressort RS. Les verges de cuivre 1, 1, sont assemblées par une traverse DD de cuivre, qui porte simplement sur la premiere traverse BB; depuis le dessous de la traverse inférieure de cuivre BB jusqu'au sommet des verges de cuivre, 1, 1, il y a 32 pouces 3 lignes; c'est sur le sommet, ou à l'extrémité supérieure de ces premieres verges, qu'est appuyé le dessous de la traverse de cuivre FF, qui assemble le second chassis composé des verges de fer, 2, 2. Le sommet des verges 1, 1, n'est point arrêté

(a) La suspension à couteaux est encore préférable, suivant de très habiles horlogers.

dans la traverse, il est reçu seulement dans deux petites concavités pratiquées dans son épaisseur. Les verges de fer marquées 2, 2, sont vissées et goupillées dans la traverse FF, de même que dans la traverse inférieure de cuivre OO. A compter du dessous de la traverse FF, il y a 31 pouces 7 lig. de fer jusqu'au milieu de la traverse inférieure OO, où elles sont goupillées pour former avec la traverse supérieure un second chassis au dedans du premier. Depuis le milieu de l'épaisseur de la traverse OO jusqu'au milieu de la troisieme traverse supérieure GG, qui est appuyée sur les verges de cuivre 3, 3, il y a 31 pouces 5 lignes de cuivre; ces secondes verges de cuivre 3, 3 sont goupillées dans leur base OO, et elles supportent en haut le dessous de la traverse GG, où elles entrent dans deux petites cavités. A cette même traverse GG est goupillée la verge de fer PE, qui descend en passant librement dans les traverses inférieures, et qui porte la lentille; elle a 39 pouces $\frac{1}{4}$ jusqu'au bord inférieur de la lentille; mais sur cette longueur il y a 35 $\frac{3}{4}$ pouces de fer, et 3 $\frac{1}{2}$ de cuivre, à cause d'une piece de cuivre LLMM, dont nous allons parler. Le diametre CE de la lentille est de 6 pouces 11 lignes, son épaisseur 1 pouce 10 lignes $\frac{1}{2}$; elle pese 14 livres $\frac{1}{2}$, et la verge composée en pese 5 $\frac{1}{2}$; le total est de 20 livres.

Lorsque la verge PC s'allonge de 10 parties, la lentille doit descendre d'autant; mais elle est remontée environ de 15 par les verges 3, 3 de cuivre qui se dilatent par en haut et élevent la traverse GG. En même temps la base OO, suspendue à des verges de fer 2, 2, descend de 10; mais les verges de cuivre 1, 1, se dilatant par en haut, font remonter la seconde traverse FF de 15, et par conséquent le sommet des verges 2, 2 qui y sont attachées par en haut. Il est vrai que le chassis extérieur, par ses verges de fer AB s'alonge encore par en bas de dix parties, et il y a trois alongemens par en bas qui font environ 30; mais il y a deux alongemens par en haut, qui font aussi 30; donc tout est compensé, et la lentille restera à la même hauteur.

2464. Suivant les expériences de M. Berthoud, la dilatation du cuivre est à celle de l'acier, comme 121 est à 74 (2652); en conséquence de ce rapport, il composoit des pendules semblables avec 1297 lignes d'acier et 293 de cuivre [a]; mais les proportions sont un peu différentes dans celui que je viens de décrire. La lentille est tenue par dessous, et a la liberté de se dilater vers le haut, ce qui exige une compensation; il y a de plus un ressort de suspension RS

(a) M. Emery a employé du zinc qui se dilate davantage, et il ne faut que cinq verges.

dont il faut corriger la dilatation ; c'est par expérience qu'il a fallu trouver les dimensions précédentes ; mais elles peuvent varier un peu à cause de l'épaisseur ou du diametre de la lentille, ou parce-que le métal des verges sera plus ou moins forgé et plus ou moins dilatable ; ainsi, quand un pendule est construit sur ces principes, il faut, pour être assuré de son exactitude, le mettre en expérience ou par le moyen d'une étuve, ou par un examen fait en hiver et en été, afin que l'effet des huiles soit compris dans l'effet du compensateur. On peut rendre d'abord les chassis plus longs que je ne l'ai dit, et diminuer ensuite les verges intérieures de cuivre 3, 3, si l'on trouve que la correction soit trop forte, et que le pendule avance quand il fait chaud. Lorsque la différence n'est plus que d'environ 1″ par jour, on peut achever de régler la compensation par la piece suivante.

La verge de fer PE, qui porte la lentille, est terminée par une chappe de cuivre qui la reçoit, et s'y adapte avec une goupille CC ou LL ; cette chappe de cuivre est taraudée en E, et supporte la lentille ; lorsqu'on observe que le pendule composé retarde en été, ou qu'il s'alonge dans une étuve avec un pyrometre, on en est quitte pour mettre la goupille un peu plus bas, par exemple, en MM ; alors la verge qui porte la lentille se trouve avoir une partie CM en fer, substituée à une égale longueur de cuivre ; par conséquent la dilatation totale devient un peu moindre : cette derniere partie de la correction est extrêmement sensible ; car en élevant de 3 pouces la place de la goupille, on ne fera retarder que d'une seconde par jour le pendule de l'hiver à l'été ; ainsi l'on corrigera facilement une erreur d'un dixieme de seconde. Avec le zinc qui se dilate beaucoup plus, on peut simplifier le compensateur ; M. Smeaton m'a fait voir à Londres un pendule à demi-secondes, où 6 $\frac{1}{2}$ pouces de zinc suffisoient pour opérer la compensation.

2465. Short, à l'occasion du passage de Mercure, observé en 1753, assure qu'il avoit trouvé par plusieurs observations que son horloge n'avoit pas varié de plus d'une seconde depuis le 22 février jusqu'au 6 mai (*Philos. Trans.* 1753, *pag.* 200), en sorte qu'avec un pendule semblable, il est possible d'avoir une exactitude qui jusqu'alors paroissoit incroyable. Il y a des astronomes d'Angleterre qui m'ont assuré qu'on faisoit des horloges à pendule qui ne varioient pas de plus de 5″ par année (a) ; mais cela ne me paroît pas

(a) Les montres même ont déja une exactitude inconcevable ; Arnold et M. Emery en ont fait, en 1786, qui ne varient pas d'une seconde dans un voyage de cent lieues.

encore assez constaté ; les huiles qu'on est obligé d'employer suffisent, par leur altération, pour empêcher une semblable précision. M. le comte de Bruhl, grand amateur et parfait connoisseur en horlogerie, m'a fait voir à Londres le journal de la marche de deux pendules de Mudge, un des plus célebres horlogers de Londres: dans l'une il y avoit une demi-seconde par jour de l'hiver à l'été, et dans l'autre une seconde ; M. Aubert a une pendule de Shelton, qui varie aussi de près d'une seconde par jour dans les saisons extrêmes. Picard, en 1671, avoit une horloge qui ne s'écartoit pas de 1″ en deux mois (*Voyage d'Uranibourg*, art. vij). Mais quelle que fût dès ce temps-là l'habileté des horlogers de Paris, on ne pouvoit avoir une semblable exactitude que par un hasard bien singulier, ou une égalité de température qui est fort rare ; actuellement l'exactitude de nos horloges est une suite nécessaire des principes sur lesquels elles sont construites; mais elle ne va pas aussi loin. M. Emery a bien vu deux horloges battre la même seconde pendant trois mois, mais elles étoient très voisines, et probablement le plancher transmettoit les vibrations.

Lorsqu'on aura perfectionné les horloges à pendule, au point d'être assuré d'une ou deux secondes par année, on aura peut-être un moyen de rechercher les petites inégalités de la rotation de la Terre (949).

2466. Lorsqu'un astronome est seul pour compter les secondes en observant, il est bon, pour ne pas se tromper, de regarder le cadran des secondes avant et après l'observation. Il est encore important de s'accoutumer à compter si aisément, qu'on puisse marcher, observer, écrire, et même parler, sans cesser de compter les secondes, et sans s'y tromper.

2467. Lorsqu'on a une horloge dont l'échappement a peu de chûte, et qui fait trop peu de bruit pour qu'on puisse en entendre les vibrations d'un peu loin, il faut nécessairement avoir un *compteur* ou *valet*, c'est-à-dire une espece d'horloge à timbre, composée grossièrement d'un pendule à secondes et de trois roues. La roue qui porte la poulie du poids engrene dans la roue d'échappement ; l'arbre de l'échappement porte une autre roue garnie de chevilles des deux côtés ; ces chevilles levent alternativement de chaque côté la queue d'un des marteaux des secondes ; cette roue porte sur son plan un coq ou un bras, qui à chaque tour, c'est-à-dire à chaque minute, rencontre la queue du marteau des minutes qui frappe sur un second timbre, et, par ce coup double, averfit que la minute commence : c'est ainsi que l'on peut compter de loin les vibrations

de l'horloge astronomique, aussitôt que le compteur est d'accord avec l'horloge à pendule.

2468. On a souvent proposé de faire servir les horloges à conduire une lunette, pour suivre les astres aisément malgré le mouvement diurne; cela seroit très utile pour dessiner la figure des taches de la Lune, pour observer les parallaxes (1649), pour avoir toujours un astre au centre même de la lunette, etc. Il y a un instrument semblable de Graham, qui est décrit dans l'Optique de Smith; Passement en avoit exécuté plusieurs; on les appelle HÉLIOSTATES. Il y en a un dans le cabinet de physique du roi, près du château de la Muette; M. le président de Saron en a un. M. Ramsden a le projet d'en construire un d'une espece toute nouvelle, pour éviter l'usage du temps dans les mesures astronomiques.

2469. Pour placer les principaux instrumens que je viens de décrire, on peut construire un observatoire à-peu-près de la maniere suivante. Un carré ABCD (FIG. 178), d'environ 12 à 15 pieds en tout sens, suffit pour la cage du bâtiment; un avant-corps en M sert à placer un quart-de-cercle mobile de 3 pieds, pour prendre des hauteurs correspondantes du côté du midi, à l'orient et à l'occident. Un avant-corps N sert pour en prendre du côté du nord avec un autre quart-de-cercle mobile, ou avec le même, en le changeant de place. Vers le mur AC est une lunette méridienne de 5 à 6 pieds, qui doit tourner du midi au nord, pour observer les passages des deux côtés.

Sur un mur G, un mural de 7 à 8 pieds de rayon est fixé dans le méridien avec des fenêtres ou des trapes, pour observer les hauteurs méridiennes depuis le zénit jusqu'à l'horizon. On peut transporter le mural en F, pour observer au nord, à moins que le mur ne soit isolé pour mettre le mural sur les deux faces, comme à l'école militaire, ou qu'il ne tourne sur un axe, comme à Bleinheim. Au centre E de l'observatoire (ou au dehors du carré, pour avoir plus de solidité), est une tour plus élevée que le reste de l'observatoire, surmontée d'un toit tournant, pour y placer une lunette acromatique de 3 à 4 pieds, montée sur un pied parallatique ou sur un équatorial, pour observer les éclipses et les cometes dans toutes les parties du Ciel. Les endroits EMN doivent être couverts par des toits tournans, de forme conique, en bois ou en fer-blanc, mobiles sur des roulettes; une fenêtre en forme de trape longue et étroite s'ouvre depuis le sommet jusqu'à la base, et on la tourne du côté où l'on veut observer. A Greenwich le toit tourne sur 12 roulettes de 8 pouces, dont les axes sont tous enfilés par un cercle de bois, qui ne tient ni au toit ni à la

base ; on placera en P la pendule et le compteur. Si l'on avoit un grand secteur (2380), il faudroit le placer dans une autre piece adossée en S à l'observatoire.

Une dépense de vingt mille livres en instrumens peut suffire pour assortir complètement un observatoire dans le goût de celui que je viens de décrire ; mais avec deux ou trois mille livres, on se procureroit ce qui est nécessaire pour travailler très utilement aux observations ordinaires.

LIVRE QUATORZIEME.

DE L'USAGE DES INSTRUMENS,

ET DE LA PRATIQUE DES OBSERVATIONS.

LES descriptions contenues dans le livre précédent ont dû faire connoître à-peu-près l'usage des instrumens d'astronomie. Cependant, comme la pratique des observations exige un grand nombre d'attentions pour vérifier et pour employer ces instrumens, j'ai cru devoir en traiter séparément dans ce XIV[e] livre ; je suivrai le même ordre que dans le précédent [a].

Des Observations qui se font à la Lunette simple.

2470. L'ON observe avec une lunette simple (2288) les éclipses de Lune et de Soleil, celles des étoiles, celles des satellites de Jupiter. Dans toutes ces observations en général, on peut employer également les télescopes (2415); car puisqu'il s'agit seulement de bien voir des astres, il est indifférent qu'on y emploie un télescope ou une lunette d'approche, si l'un et l'autre grossissent également ; il est vrai que les télescopes sont plus aisés à manier; mais les lunettes sont plus faciles à faire, durent plus long-temps, donnent plus de lumiere, et sont plus communes que les télescopes.

2471. Hévélius avertit les astronomes de ne pas employer pour les éclipses de Lune des lunettes de 8 à 10 pied, sou au-delà, parceque les bords de la pénombre y étant agrandis, elle y paroît trop mal terminée (*Selenog. pag.* 468), et la grande lumiere de l'instrument empêche de distinguer une petite obscurité. On a vu la raison de cette difficulté que l'on trouve à bien observer les éclipses de Lune (1768); c'est ce qui fait qu'on y emploie des lunettes de 4 à 5 pieds seulement, dont l'ouverture soit petite. On est persuadé communément qu'il est difficile de faire cette observation mieux qu'à

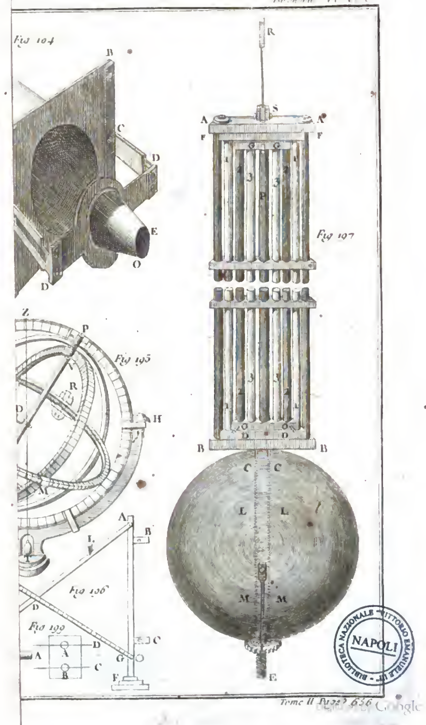
(a) On trouvera des détails utiles sur cette matiere dans les *Lettres sur l'astronomie pratique*, par M. Darquier, chez Didot, 1786, *in*-8°.

une minute près; cependant le P. Hell assure qu'on parvient à trouver la différence des méridiens à 4 ou 5″ près, par le moyen d'une éclipse de Lune; pour cela il faut observer le moment où l'ombre arrive à une des taches de la Lune; et il ne suffit pas de considérer l'ombre à l'endroit seul qui est le plus près de la tache, mais il faut que l'œil en parcoure la circonférence et la courbure, pour voir si elle forme un arc non interrompu, passant au bord de la tache que l'on veut observer; il faut aussi tâcher de choisir un terme de l'ombre, c'est-à-dire une circonférence d'un certain degré d'obscurité, pour employer une ombre de la même densité pendant toute la durée de l'observation: on doit choisir les taches les plus grandes pour observer l'immersion de leurs bords, ce qui est plus facile que d'estimer le milieu de la tache; enfin il faut observer au moins vingt ou trente taches différentes, dans leurs immersions et dans leurs émersions. On a le passage de chacune par le milieu de l'ombre, et si les mêmes taches ont été observées dans un autre pays, on a autant de fois la différence des méridiens. Il n'y a que le commencement et la fin, l'immersion, et l'émersion qui donnent le vrai milieu de l'éclipse.

2472. Le P. Hell trouve par ce moyen que l'éclipse de Lune du 22 novembre 1760, observée à Paris par M. Messier, avec un excellent télescope de 30 pouces de foyer, et à Vienne avec une simple lunette de 5 pieds, donna 56′ 13″ pour la différence des méridiens, ce qui étoit assez juste, comme on le sait d'ailleurs; mais l'éclipse parut commencer 4′ 7″ plutôt avec la petite lunette du P. Hell, qu'avec le fort télescope dont on se servoit à Paris: par la même raison, elle finissoit 4′ 7″ plus tard; en sorte qu'on a 8′ ¼ de différence entre le résultat du commencement et celui de la fin, quand on les considere séparément, pour en conclure la différence des méridiens en temps; mais le milieu est toujours le même, et le résultat moyen du P. Hell est à 7″ près celui que nous avons eu d'ailleurs par un grand nombre de bonnes observations, qui est 56′ 6″. Il en est de même des satellites de Jupiter (2493, 3041); il peut y avoir quelque chose à rabattre d'une précision si singuliere, cependant la méthode que nous venons d'expliquer mérite l'attention des astronomes (*Éphém. de Vienne* 1764).

2473. On observe aussi les phases ou les segmens éclairés, par le moyen du micrometre, pour déduire le milieu par deux phases égales; quand on a ainsi le milieu d'une éclipse observée en deux endroits, la différence des temps est celle des deux méridiens.

2474. Lorsqu'on se sert d'une lunette pour observer le Soleil, il est


Fig. 194
B
C
D
E
O
D
R
S
A
A
F
F
1
2
3
3
2
1
P
Fig. 197
3
3
2
2
1
1
D
D
B
B
C
C
L
L
M
M
E
Z
P
Fig. 195
R
D
H
M
A
B
L
Fig. 196
D
Fig. 199
A
A
D
B
C
C
G
F

est nécessaire d'employer quelque moyen pour se garantir de sa trop grande lumiere ; je dois avertir à cette occasion que le travail de ceux qui commencent à observer, est fort dangereux pour la vue, lorsqu'on néglige les attentions qui servent à la ménager. Le P. Scheiner raconte (*Rosa ursina*, *pag.* 69), que le premier inventeur des lunettes ayant voulu observer souvent le Soleil, contracta une inflammation des yeux qui lui coûta la vie. Galilée et Cassini devinrent aveugles sur la fin de leur vie; il est très ordinaire de voir des astronomes dont la vue s'est affoiblie, moins par l'usage d'observer que par leur négligence à prendre les précautions convenables; au contraire J. de l'Isle a vécu jusqu'à 80 ans, et il lisoit le jour et la nuit sans lunettes.

Il est important de ne pas fatiguer ses yeux par une trop forte ou trop longue attention, et de les laisser reposer avant que de faire une observation délicate, de ne pas regarder la Lune long-temps, et surtout de ne jamais recevoir dans l'œil la lumiere du Soleil, à moins qu'elle ne soit suffisamment affoiblie, ou par les vapeurs, ou par un corps obscur.

2475. Il est essentiel que le tuyau d'une lunette soit intérieurement noirci, d'un noir qui soit mat, comme le noir de fumée, et ne réfléchisse point de lumiere ; car les rayons dispersés affoibliroient l'image qui se forme au foyer par les rayons directs. Les tuyaux de bois formés par quatre planches minces bien assemblées sont plus légers et sujets à moins d'inconvéniens que les tuyaux de fer-blanc, et on les noircit facilement avant de les assembler.

2476. Cassini, dans son Instruction générale pour les voyageurs (*Observ. astron.*, *pag.* 57), avertit de se préparer toujours la veille aux observations importantes, comme si l'on vouloit observer la même chose à la même heure, afin que s'il y a quelque difficulté dans l'usage des instrumens, à cause de la situation de l'astre, de l'incommodité du lieu, ou du défaut des instrumens, on puisse de bonne heure y apporter remede ; on reconnoît quelquefois l'importance de cet avis après l'avoir négligé.

On doit encore avertir les observateurs d'être toujours à leur aise, les observations en sont meilleures; il faut avoir une chaise dont le dossier soit mobile avec un cercle denté, pour se coucher de maniere que la tête soit appuyée, et l'œil précisément contre la lunette sans aucun effort. Il est important aussi de ne pas veiller trop long-temps, à moins qu'on n'ait la facilité de dormir long-temps ensuite[a].

(a) M. Herschel a dormi 26 heures de suite après avoir veillé trois jours et trois nuits; mais il est rare qu'on ait une force pareille, et il ne faut pas en abuser.

2477. Scheiner avoit employé, pour observer le Soleil, une lunette qu'il appelloit *Hélioscopium*, dont l'objectif et l'oculaire étoient d'un verre coloré; Hévélius en parle aussi (*Selenog. pag.* 23). Un objectif verd a l'avantage de diminuer la couronne lumineuse qui borde les objets à cause des rayons colorés (2297); on trouvoit le Soleil mieux terminé, et le diametre plus petit de 5″ qu'avec un objectif blanc; mais il est très difficile d'avoir du verre coloré assez parfait pour former un bon objectif (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 449). On a proposé aussi de se servir de plusieurs toiles d'araignées, couchées légèrement les unes sur les autres à l'extrémité du tuyau de l'objectif; ces toiles forment une espece de voile transparent, qui intercepte une partie de la lumiere, et dispense de l'usage des verres noirs qu'on met devant l'oculaire ou entre l'œil et la lunette (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 454).

Les verres colorés en rouge, en jaune, en bleu ou en verd, sont en usage pour regarder le Soleil; cependant on doit craindre l'irrégularité qu'il y a presque toujours dans la matiere et dans l'épaisseur de ces sortes de verres; on y apperçoit des défectuosités monstrueuses quand on met ces verres sur l'objectif (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 451). Il vaut mieux employer des morceaux de glace de miroir, que l'on peut enfumer soi-même (2479). On les éprouve en les plaçant sur l'objectif de la lunette, et l'on n'admet que ceux dont l'interposition n'altere point l'image du Soleil. Au reste l'erreur résultante de l'imperfection des verres colorés devient insensible, quand on les met entre l'œil et la lunette.

2478. J'ai vu employer en Angleterre, en 1763, un autre *Hélioscope*, pour affoiblir la lumiere du Soleil; cet instrument est formé de 4 petites glaces, qui par derriere ne sont point polies, renfermées dans une boîte de cuivre bien noircie, que l'on adapte audevant des oculaires du télescope; elles sont placées de maniere que l'image du Soleil arrive à l'œil après 4 réflexions, qui suffisent pour obscurcir le Soleil, de maniere que l'œil puisse en supporter la lumiere; cet instrument a l'avantage de donner au Soleil une couleur blanche; mais lorsqu'il y a des nuages, et que le temps est changeant, on est obligé d'y substituer un verre fumé, dans lequel il y ait des parties plus ou moins transparentes : voici donc la méthode que j'ai coutume de suivre.

2479. Je prends deux morceaux d'une glace mince, mais bien travaillée et bien égale d'épaisseur; je passe un des morceaux légèrement, mais à plusieurs reprises, sur la fumée d'une chandelle ou d'une lampe, jusqu'à ce que dans certains endroits du verre je

ne voye plus rien que la flamme de la lumiere, mais que dans d'autres endroits du verre j'apperçoive un peu les objets environnans. J'applique une bordure de carte sur le verre qui est enfumé, je le recouvre avec le verre qui ne l'est pas, et j'assujettis les bords avec de la cire à cacheter ou avec du fil; cette méthode m'a paru préférable à celle des verres colorés. Cependant M. Maskelyne emploie deux prismes colorés, qui glissent l'un sur l'autre, et avec lesquels on se procure différens degrés d'obscurité.

2480. Huygens dit, à la fin de son *Systema saturnium*, que pour observer les diametres de Vénus et de Mercure, on ne doit pas négliger d'enfumer un peu l'oculaire de la lunette, pour que le disque soit mieux terminé; en effet la surabondance de lumiere fait qu'on a peine à voir leur disque bien rond, et l'on apperçoit difficilement sans cette précaution les phases de Mercure.

2481. Pour observer les éclipses de Soleil, on peut employer différentes méthodes : la plus ancienne consistoit à recevoir l'image du Soleil sur un tableau dans l'obscurité. Galilée attribuoit cette idée à un de ses éleves, Benoît Castelli (3226). Scheiner, Gassendi, Hévélius, de l'Isle, etc. s'en sont servis. Pour cet effet, on a une lunette mobile sur un genou, et qui passe au travers d'une fenêtre, dont la lumiere est interceptée; on attache à la lunette un carton perpendiculairement à la direction du tuyau; sur ce tableau on trace un cercle de la grandeur de l'image du Soleil; on tâche de contenir toujours cette image en dedans du cercle, en faisant avancer la lunette; on divise le diametre de ce cercle en 48 parties égales, par le moyen de 23 cercles concentriques, pour y voir la grandeur de l'éclipse à chaque quart de doigt. On peut marquer sur ce cercle, que remplit l'image du Soleil, les points où se terminent les cornes de l'éclipse, à chaque fois qu'on observe la grandeur de l'éclipse, et l'on pourroit en conclure même la grandeur du diametre de la Lune (*Hév. selen. pag.* 102).

2482. Si l'on divise le cercle du tableau en degrés, et qu'on suspende entre la lunette et le tableau un fil vertical dont l'ombre vienne tomber sur le centre du cercle, on aura la situation des cornes de l'éclipse par rapport au vertical; d'où l'on peut conclure leur situation à l'égard de l'écliptique, par le calcul de l'angle parallactique, et le lieu même de la Lune.

2483. Lorsqu'on emploie, pour observer une éclipse de Soleil, une lunette garnie d'un micrometre (2359), on peut faire trois sortes d'observations. L'on peut déterminer la grandeur de l'éclipse ou la partie éclairée, de momens à autres; il faut environ 4 minutes,

si l'on est seul, pour chaque observation, c'est-à-dire pour déterminer le temps de l'observation, pour l'écrire et se préparer à la suivante. L'héliometre ou micrometre objectif, est sur-tout très utile pour observer la grandeur de l'éclipse; ces observations se calculent comme celles du commencement et de la fin d'une éclipse (1971).

2484. L'on peut aussi mesurer avec ces instrumens la distance des cornes; il est même utile de faire alternativement ces deux opérations, mesurer la grandeur de l'éclipse, puis la distance des cornes, ensuite la grandeur de l'éclipse, etc. C'est ainsi qu'en prenant des parties proportionnelles, on trouvera pour un même instant et la grandeur de l'éclipse, et la distance des cornes; il y auroit encore plus d'exactitude si deux observateurs faisoient chacun de leur côté une des deux observations, en sorte que l'un observât continuellement la grandeur de l'éclipse, et l'autre toujours la distance des cornes: on opere plus vîte et mieux lorsqu'on ne change point d'opération. La méthode pour trouver la distance des centres par celle des cornes, a été expliquée (1987); mais cette maniere d'observer n'est pas assez usitée pour que j'aye cru devoir en détailler les calculs; cependant elle est devenue précieuse depuis qu'elle a paru indiquer l'inflexion des rayons solaires (1992).

2485. Enfin l'on peut observer une éclipse de Soleil avec un quart-de-cercle, comme Cassini le pratiqua dans le dernier siecle, et marquer à l'horloge l'instant du passage, tant au fil vertical qu'au fil horizontal, des bords du Soleil et de la Lune, et des cornes de l'éclipse; on en déduira les différences de hauteur et d'azimut (2123), la distance des cornes, et par conséquent la distance des centres du Soleil et de la Lune, de deux manieres différentes, soit par les passages des bords, soit par ceux des cornes de l'éclipse. On a ainsi l'avantage d'éviter l'inégalité des réfractions, qui est fâcheuse dans les petites hauteurs, et de faciliter les réductions qui dépendent des parallaxes, parceque la parallaxe de hauteur est la plus facile à calculer (1629).

2486. La principale difficulté de cette méthode est le changement de situation des cornes, qui arrive pendant l'intervalle de leurs passages au même fil, il est absolument nécessaire d'en tenir compte; pour cela on fait une table des différences de hauteurs observées successivement plusieurs fois entre la premiere corne et la seconde; on voit par là combien cette différence de hauteur augmente à chaque minute de temps à mesure que l'éclipse croît, et s'il s'est écoulé une minute entre les passages des deux cornes, on diminue de la quantité trouvée la différence de hauteur observée, pour avoir

celle qui auroit eu lieu si ces deux cornes avoient été observées au même instant, ou qu'elles eussent été stationaires, et à même distance l'une de l'autre, pendant tout l'intervalle de temps qu'il y a eu du passage de la premiere à celui de la seconde.

Quand on a trouvé la distance des centres et l'angle que fait cette ligne avec le cercle de latitude, par le moyen de l'angle parallactique, on peut en conclure la différence de longitude et de latitude apparente entre la Lune et le Soleil (2130), et enfin la conjonction vraie avec la latitude vraie au moment de la conjonction (1976).

2487. Pour observer le commencement et la fin d'une éclipse de Soleil ou d'étoile par la Lune, on choisit les plus longues lunettes, qui sont communément celles de 18 pieds, ou les lunettes acromatiques de 3 pieds, et les télescopes de 2 pieds de foyer; on ne sauroit examiner avec trop d'attention cet instant unique où le Soleil commence à paroître entamé, celui où il cesse de l'être; le moment où une étoile disparoît, et celui où elle sort comme un éclair de dessous le disque de la Lune; on en conclut ensuite le temps de la conjonction (1971).

2488. Les éclipses annulaires, sont celles qui offrent les phénomenes les plus singuliers; Maclaurin, en rapportant l'observation qu'il fit de l'éclipse annulaire de 1737 (*Philos. Trans. n°.* 447), assure que la plupart de ceux qui observerent cette éclipse avec des lunettes, apperçurent, lorsque l'anneau se ferma, et que la Lune se trouva entièrement sur le Soleil, une lumiere partagée en différentes taches irrégulieres proche du point de contact; que le bord de la Lune y parut dentelé, que ces parties irrégulieres y paroissoient en mouvement; que quand les deux disques se toucherent, ils semblerent s'entremêler et couler l'un dans l'autre, comme deux gouttes d'eau qui se rencontrent et se rassemblent; Maclaurin 15″ avant que l'anneau se fermât, apperçut comme un point de lumiere, pâle, mais fort sensible, près du bord de la Lune, qui alloit toucher le Soleil; et ce point lumineux parut jeter deux rayons vers les cornes de la Lune à l'instant où l'anneau se ferma : le lord Alberdour vit une ligne étroite de lumiere sur le bord obscur de la Lune, soit avant que l'anneau se fermât, soit après que le bord de la Lune eût passé au-delà du Soleil.

Ces phénomenes devroient, ce semble, avoir lieu toutes les fois que l'on observe le commencement d'une éclipse de Soleil; il ne faudroit que s'y bien préparer, et ils nous avertiroient probablement de l'instant si difficile à saisir, où l'éclipse va commencer; cependant je ne crois pas que jusqu'ici aucun astronome ait jamais observé le

véritable commencement d'une éclipse de Soleil; comme l'on ne sait qu'à-peu-près le point où le Soleil va paroître entamé, on n'y apperçoit l'impression de la Lune, que lorsqu'elle est déja au moins de deux secondes.

2489. On peut conclure plus exactement le moment où une éclipse a commencé, par la distance des cornes mesurées quelques instans après le commencement, pourvu que l'on sache par le calcul combien la Lune se rapproche du Soleil en une minute de temps. Cette distance des cornes augmente fort rapidement; car si les diametres sont de 32′, elle est de 1′ 27″ ½, aussitôt que la Lune anticipe seulement de 2″ sur le disque du Soleil, ce qui arrive à-peu-près en 4 secondes de temps, plus ou moins.

2490. Les appulses de la Lune aux étoiles dont elle approche, peuvent s'observer comme les éclipses de Soleil, ou par des distances répétées de l'étoile à un des bords de la Lune, ou par des différences d'ascension droite et de déclinaison (2505). Il en est de même des conjonctions des planetes avec les étoiles. Les observations d'une éclipse ou d'une conjonction doivent toujours se réduire par le calcul, à trouver un grand nombre de fois le temps de la conjonction, et la latitude au temps de la conjonction (1971, 2153), afin de comparer les tables avec l'observation, et de trouver les différences des méridiens des pays où l'observation aura été faite; car ce sont-là les avantages de ces sortes d'observations.

Nous avons parlé fort en détail de l'observation des passages de Vénus et de Mercure sur le Soleil (2116).

2491. Les observations des satellites de Jupiter se font communément avec des lunettes ordinaires de 18 pieds, ou des lunettes acromatiques équivalentes; il seroit inutile d'y en employer de plus longues, cela produiroit un défaut de correspondance, entre les différens observateurs, qui ne compenseroit pas le petit avantage de voir les immersions plus tard, et les émersions plutôt: la plupart des astronomes n'ayant pas de plus longues lunettes, il convient, ce semble, quant à présent, de s'assujettir à l'usage ordinaire.

Nous expliquerons (3054, 3059) la maniere de savoir à quel endroit est le satellite dont on veut observer une éclipse. Avant l'immersion d'un satellite on le voit diminuer peu à peu; lorsqu'on est bien assuré qu'il ne paroît plus, on quitte la lunette, si l'on est seul en comptant zéro, une, deux, etc., jusqu'à ce qu'on soit arrivé à l'horloge; alors on soustrait ce qu'on a compté de secondes depuis le moment où le satellite a disparu, et l'on a le moment de l'immersion.

2492. Les émersions des satellites demandent une attention particuliere pour saisir le premier moment de l'apparition. A l'instant qu'on commence à voir poindre ou pointiller le satellite, ou à le soupçonner, on commence à compter les secondes sans quitter la lunette, jusqu'à ce qu'on soit assuré de ne s'être point trompé; alors on va à l'horloge, et l'on soustrait ce qu'on a compté depuis le moment où l'on a apperçu le satellite jusqu'à celui où l'on est arrivé à l'horloge.

2493. La différence des lunettes avec lesquelles deux astronomes observeroient des éclipses de satellites, et même la différente conformation de leur vue, n'empêchent point d'en conclure avec assez d'exactitude la différence des méridiens, pourvu qu'on compare entre elles autant d'immersions que d'émersions. La différence des méridiens entre Paris et Vienne en Autriche, se trouvoit de 55′ 35″, lorsque le P. Hell ne comparoît entre elles que les immersions du premier et du second satellites, observées à Paris avec un excellent télescope de 30 pouces, et à Vienne avec une lunette ordinaire; mais elle se trouvoit de 56′ 43″, en ne comparant que les émersions: le milieu entre ces deux résultats est 56′ 9″, quantité fort exacte, puisqu'on a trouvé, par un très grand nombre d'observations, 56′ 6″ ou 10″ (*Ephém. de Vienne*, 1764, *pag.* 189).

2494. Par de semblables comparaisons on détermineroit à-peu-près combien de secondes une immersion doit arriver plus tard avec une lunette de 18 pieds qu'avec une lunette de dix. On a dit qu'il falloit ajouter 3″ de temps pour 2 pieds de plus sur la longueur des lunettes, lorsqu'il étoit question du premier satellite.

2495. A l'égard des télescopes, M. le président de Saron en ayant fait lui-même d'excellens de 12 et de 30 pouces de foyer, le premier avec 3 pouces, le second avec 6 pouces d'ouverture, a trouvé assez constamment 10″ de différence entre ces deux télescopes, pour les éclipses du premier satellite. Cette quantité est bien plus grande pour les autres (3041), et doit varier pour les lunettes de différentes longueurs, de différentes bontés, de différentes ouvertures, pour les vues plus ou moins fixes, et pour les différentes latitudes du premier satellite (3040). Voyez aussi la *Connoiss. des temps de* 1704, *pag.* 101). Mais il est bien plus exact et plus sûr de déterminer les différences des lunettes par le moyen des diaphragmes qui font disparoître les satellites (3049).

2496. Les lunettes simples qui sont un peu grandes, ont besoin d'être soutenues du côté de l'oculaire par quelque support qu'on puisse mouvoir aisément, et l'on se sert communément d'un

cric ; c'est un instrument composé de 3 pieds, assemblés vers le haut par une tablette horizontale, ou par une piece de bois verticale creusée en forme de coulisse ; dans le milieu de cette coulisse glisse une tringle de bois ou de fer, qui se termine en haut par une traverse en forme de croix, sur laquelle on appuie la lunette.

Pour fixer la croix ou le support à différentes hauteurs, on se sert d'une vis de pression, ou bien on y applique une crémaillere et une roue dentée; on l'éleve aussi par une corde qui s'enveloppe sur un axe placé sur le côté, et qu'on tourne avec une manivelle, ou bien l'on fait tendre la corde par un contre-poids; chacun imaginera facilement une maniere d'ajuster de semblables machines, et comme l'on peut aussi s'en passer, je n'insisterai pas sur cette partie.

2497. Lorsqu'une lunette est exposée long-temps à l'humidité de l'air pendant les observations nocturnes, le verre se ternit, et l'on ne voit plus rien, si l'on n'a soin de nettoyer le verre; cet inconvénient est très grand dans les observations; on peut le prévenir en ajustant au bout de la lunette un tuyau de papier brouillard qui absorbe l'humidité, et l'empêche d'aller jusqu'à l'objectif de la lunette; il y a des temps où l'on sera même obligé de changer plus d'une fois ce tuyau de papier.

Des Observations qui se font avec le Réticule.

2498. LA LUNETTE qui porte un réticule doit être bien *centrée*, c'est-à-dire que le centre de l'ouverture de l'objectif doit être celui de la plus grande épaisseur du verre à l'endroit où les deux surfaces sont paralleles, afin que le rayon principal, ou l'axe optique de la lunette qui passe par les centres des deux convexités, passe aussi par le centre de l'objectif; sans cela le mouvement de l'astre au travers de la lunette seroit inégal, et les mesures prises en différens points du champ de la lunette ne seroient pas les mêmes. Pour concevoir l'effet d'un verre mal centré, imaginons un objectif dont on a coupé la moitié; la plus grande épaisseur se trouvera au bord du verre, de même que l'axe principal autour duquel toutes les images doivent être égales, également distinctes, également lumineuses.

2499. Si l'on expose au Soleil un objectif convexe des deux côtés, et qu'on fasse réfléchir l'image du Soleil sur les objets voisins, on voit deux images; la plus vive doit être au centre de celle qui est la plus grande et la plus pâle; si elles ne sont pas exactement concentriques,

triques, c'est une preuve que le verre est mal centré; on peut alors prendre un diaphragme ou cercle de carton qui soit ouvert circulairement, et le promener sur l'objectif jusqu'à ce que l'ouverture tombe sur une partie de verre qui soit bien centrée, et l'on se servira seulement de cette partie de l'objectif en couvrant le reste du verre; car alors le foyer de réflexion de la surface concave aura le même axe que le foyer de réflexion de la surface convexe, puisque les deux images seront concentriques, et l'on sera sûr que le verre est bien centré dans cette partie.

2500. Si l'on place un objectif à l'extrémité d'un tube bien rond, et qu'on fasse faire au verre un demi-tour sur son axe en regardant un objet terrestre, l'objet ne doit pas changer de place; il paroîtra toujours au même point des fils du réticule, si l'objectif est centré; s'il ne l'est pas, et qu'on lui fasse faire un mouvement de rotation circulaire, l'on verra l'axe optique changer de place. Dans ce cas on scellera le verre avec de la cire molle au bout d'un tube plus étroit que le verre, de maniere qu'il puisse changer de place; on fera tourner le tube, en donnant successivement différentes situations au verre sur le tube, et l'on verra celle qui est nécessaire pour que la portion du verre, qui répond à l'ouverture du tube, fasse un objectif bien centré : ce sera la partie du verre dont il faudra se servir.

2501. La parallaxe optique dont Bouguer a beaucoup parlé (2599), fournit un troisieme moyen de centrer une lunette. On pointera sur un objet fort éclatant, et ayant fixé la lunette dans une situation invariable, on enfoncera l'oculaire, autant qu'il sera possible, sans cesser d'appercevoir l'objet; on le retirera ensuite autant qu'on le pourra, toujours sans que la lunette varie; si dans ce mouvement de l'oculaire, l'objet que l'on regarde paroît toujours sur le milieu des fils, et que la parallaxe optique se fasse autant d'un côté que de l'autre, on sera assuré que le verre est bien centré; car les deux images que l'on verra dans ces deux situations, étant nécessairement sur l'axe optique principal, ne peuvent être toutes deux sur le milieu de la lunette, à moins que l'axe optique ne concoure avec le rayon moyen, ou avec l'axe du cône de lumiere que donne la lunette (Bouguer, *figure de la Terre*, *pag.* 212).

2502. Enfin, on peut centrer des verres en rendant leur épaisseur circulairement égale, par le moyen d'un bon niveau (2303); car si un verre est tourné bien rond, et que son épaisseur, prise circulairement, soit toujours la même à égale distance du centre, on est sûr que le verre est centré.

2503. Il est utile à un astronome d'avoir une LUNETTE D'ÉPREUVE AB (FIG. 198), qui porte deux carrés C, D, aux extrémités de son tube, et qui puisse servir à vérifier divers instrumens; les tasseaux C et D doivent être exactement égaux, rectangles, avec leurs faces opposées paralleles et bien dressées; l'objectif doit être centré, en sorte que la ligne AB passant par la croisée des fils, réponde au même point, lorsqu'on place la lunette sur ses deux faces opposées. Ceux qui font les instrumens d'astronomie, ont sur-tout besoin de cette lunette d'épreuve, dont nous parlerons plus d'une fois (2555, 2569, 2594).

2504. Le réticule de 45 degrés (2349) sert à déterminer la différence d'ascension droite et la différence de déclinaison entre une étoile et une planete, dont on veut connoître la position, ou entre deux planetes, comme dans les passages de Vénus sur le Soleil (2136), enfin entre une tache et le bord du Soleil et de la Lune (3244).

Dans ces sortes d'observations, nous appellons *fil équatorial* ou *fil parallele* (on sous-entend *à l'équateur*), le fil AB (FIG. 138) qui est dans la direction du mouvement diurne, et qu'on doit faire parcourir à l'un des astres que l'on observe; le fil horaire est celui qui est perpendiculaire au mouvement diurne, et placé dans le plan d'un cercle de déclinaison.

On doit être fort attentif à mettre le réticule au foyer de l'objectif, pour éviter totalement la parallaxe optique de l'image (2599). Il est aussi très nécessaire que le réticule soit bien placé dans la direction du mouvement diurne, c'est-à-dire qu'un des astres décrive exactement le parallele sans le plus petit écart, parceque toute l'erreur se trouveroit sur la différence d'ascension droite. Il y a des moyens d'éviter cette condition (2131, 2509), en y suppléant par le calcul; mais il ne faut y avoir recours que quand il est difficile de faire autrement.

Il faut absolument vérifier les angles d'un réticule avant que de s'en servir; pour cela on trace des lignes qui fassent exactement des angles de 45° et de 90°, sur un grand carton, qu'on place à une distance considérable; en regardant ces lignes dans la lunette, on voit si tous les fils du réticule se confondent exactement avec les lignes qu'on a tracées. Nous verrons bientôt une autre maniere de savoir si l'angle droit est exact (2521).

2505. La différence des temps écoulés entre le passage de deux astres au fil horaire du réticule, doit se convertir en degrés pour former la différence d'ascension droite entre les deux astres (88,

197, 876); mais la maniere de faire cette conversion exige des attentions (952) : si l'horloge est réglée sur le premier mobile (954), c'est-à-dire si elle fait 24 heures justes entre deux passages d'une étoile au méridien, et que les deux astres soient fixes, comme sont deux étoiles, il suffit de convertir le temps à raison de 15° par heure; c'est le cas le plus simple.

Mais si l'horloge ne fait pas exactement 24 heures dans l'intervalle du retour d'une étoile au méridien (2613), il faudra faire cette regle de trois : le nombre d'heures, de minutes et de secondes que fait l'horloge entre deux passages de l'étoile d'un jour à l'autre, est à 360°, comme le nombre d'heures, de minutes et de secondes écoulées entre les passages des deux astres, est au nombre de degrés, minutes et secondes, qui font la différence d'ascension droite entre les deux astres observés. On abrege le calcul, en opérant seulement sur la différence qu'il y a d'un jour à l'autre : je suppose que l'étoile ait passé 4′ plutôt, le second jour, on dira 23ʰ 56′ sont à 4′ 0″, comme les heures et minutes écoulées sont aux minutes et secondes, qu'il faut en ôter pour avoir le temps du premier mobile; on le convertit ensuite en degrés.

2506. Si l'horloge suit le temps solaire moyen, il faudra convertir le temps en degrés, à raison de 360° 59′ 8″3 pour 24ʰ, ou 15° 2′ 27″8 pour chaque heure. Il y a des tables pour cette conversion, dans la Connoissance des temps et ailleurs. Si l'horloge retardoit de 2″ par jour sur le mouvement moyen, on seroit obligé de faire une proportion comme ci-dessus, pour réduire le temps observé en temps moyen, en y appliquant une petite correction avant de le convertir en degrés. Par exemple, pour une heure d'intervalle, on dira 24ʰ : 2″ : : 1ʰ : 0″, 08 que l'on ajoute à l'intervalle d'une heure compté sur l'horloge à pendule, et l'on trouve 1ʰ 0′ 0″ 08 de temps moyen. On pourroit aussi dans ce cas-là ne point corriger le temps, mais ajouter 1″ 26, ou 1″ $\frac{1}{4}$ pour chaque heure, à la différence d'ascension droite en degrés, ou les retrancher si l'horloge avance de 2″ par jour; ce sera le double si l'horloge avance de 4″, et ainsi de suite; l'on aura également par ces deux méthodes les degrés qui répondent à un intervalle de temps.

2507. La différence d'ascension droite ainsi trouvée en degrés, minutes et secondes, s'ajoute à l'ascension droite de l'astre qui a passé le premier, pour avoir celle de l'astre suivant. Si l'un des astres a un mouvement en ascension droite, et que l'autre soit fixe, on aura, par l'opération précédente, l'ascension droite de la planete pour le moment où elle a passé au fil horaire du réticule.

Lorsqu'on a observé la différence d'ascension droite entre deux planetes qui ont chacune leur mouvement, par exemple, Mercure et le Soleil, on n'a qu'à convertir le temps en degrés (2505), sans égard aux deux mouvemens; on ajoutera cette différence d'ascension droite à celle du Soleil, calculée pour le moment de son passage (908), si le Soleil a passé le premier, on la retranchera s'il a passé le second, et l'on aura l'ascension droite de Mercure au moment où Mercure a passé. En effet, l'observation nous donne la différence entre le point du ciel qu'occupoit le Soleil à son passage au méridien, et le point où étoit Mercure lorsqu'il y est venu à son tour; ce sont les seuls points dont on ait besoin, et l'on peut supposer qu'ils sont fixes pendant toute la durée de l'observation. Dès que le Soleil a passé au réticule, il n'importe plus pour cette observation qu'il ait un mouvement, ou qu'il n'en ait point, et dans l'instant où Mercure y arrive, il est égal qu'il ait eu auparavant, ou qu'il doive avoir ensuite un mouvement quelconque; on a toujours sa position pour le moment même du passage de Mercure, par le moyen de la position qu'avoit le Soleil, lorsque celui-ci passoit au réticule.

2508. Pour trouver la différence de déclinaison entre les deux astres qui ont passé au réticule, il suffit d'observer les passages aux fils obliques, et de convertir l'intervalle en arc de grand cercle (3879), en multipliant par le cos. de la déclinaison, l'on a la distance de chaque parallele au centre du réticule (2351).

2509. Il y a des cas où l'on n'a pas le temps de placer le fil du réticule exactement dans la direction du mouvement diurne, et de le faire suivre par un des deux astres; ce qui exige un tâtonnement quelquefois assez long; on peut alors recourir à la méthode suivante, que M. Cassini et M. de l'Isle employerent autrefois, et que M. Zanotti a publiée le premier (*Comm. inst. bon. Tom. II, part.* 3, *pag.* 75).

Soit la route d'un astre ou son parallele BAD (FIG. 146), AC le fil horaire du réticule, qui devroit être placé suivant Ca, perpendiculairement à la route BD; BC et DC les deux obliques, dont la position devroit être Cb et Cd, si le réticule étoit exactement disposé dans la direction du mouvement diurne; on observera les passages d'un astre en B, A, D, et l'on en conclura les intervalles de temps BA et AD, que j'appelle m et n, alors on aura la perpendiculaire Ca, ou la différence de déclinaison entre l'astre observé et le centre du réticule, $= \frac{m^2 n + n^2 m}{m^2 + n^2}$, qu'il faudra réduire en degrés

de grand cercle (3879). La quantité Aa sera $= \frac{m^2 n - n^2 m}{m^2 + n^2}$, et ajoutée au temps du passage de l'astre en A, dans le cas où BA est plus grand que AD, elle donnera le passage en a sur le vrai cercle horaire Ca, qui passe au centre C de la lunette. On peut voir la démonstration dans les *Mémoires* de 1742, et dans le 4[e] volume de ma seconde édition.

2510. M. Cagnoli (*Trigon.*, *pag.* 436) donne des formules encore plus commodes; il cherche d'abord l'angle aCA dont la tangente $= \frac{AB - AD}{AB + AD}$; le sinus du double, multiplié par AB + AD, donne la valeur de Ba — Da, et quand on a un des segmens Ba ou Da, on trouve Aa; cette quantité divisée par la tangente de l'angle aCA, donne Ca : enfin M. de Lambre observe que C$a = \frac{1}{2}(m+n)$ cos. 2ACa .cos. déclin. convertis en degrés, et Aa = Ca. tang. aCA $= \frac{1}{2}(m+n)$ cos. 2aCA. tang. aCA. Ayant ainsi les passages de chacun des deux astres par le fil horaire Ca, l'on en conclura la différence d'ascension droite (2505). Lorsqu'il s'agit du Soleil, on peut aussi employer la méthode de M. de Fouchy (2132), et se passer des fils obliques.

2511. On pourroit observer des différences d'ascension droite et de déclinaison entre une planete et une étoile, sans le secours d'aucun réticule ni micrometre, si l'on avoit seulement un diaphragme ou cercle de cuivre au foyer des verres, bien rond et bien terminé; les temps que la planete et l'étoile emploieront à le traverser, convertis en degrés et multipliés par le cosinus de la déclinaison (3879), seront les valeurs des cordes décrites; connoissant le diametre d'un cercle et deux cordes paralleles, il est aisé de connoître leur intervalle, qui est la différence de déclinaison des deux astres, comme la différence des temps où ils ont été au milieu de ces cordes est la différence d'ascension droite.

2512. Dans l'usage des réticules et des micrometres, on est souvent obligé d'éclairer les fils pour les appercevoir (2395), et c'est une chose assez embarrassante dans les observations; si l'on éclaire trop, on cesse d'appercevoir les petites étoiles; si l'on éclaire trop peu, les fils ne paroissent pas; si l'on éclaire le haut de la lunette en faisant tomber la lumiere sur l'objectif, il faut que la lumiere soit à l'abri du vent, qui, en agitant la flamme, produit une parallaxe dans les fils, et fait vaciller dans la lunette l'image de l'objet. Il y a des astronomes qui éclairent les fils par une ouverture pratiquée vis-à-vis de l'oculaire; mais les fils éclairés de côté paroissent alors

d'une forme différente par un reflet de lumiere qui est souvent irrégulier.

On éviteroit bien de l'embarras si l'on parvenoit à voir les fils même dans l'obscurité ; cela est possible, pourvu que l'on obscurcisse l'observatoire, et que l'œil destiné à regarder dans la lunette ne voie point la lumiere ; pour lors il ne doit pas servir à regarder l'horloge ; c'est avec l'autre œil qu'il faut regarder le cadran et écrire l'observation, et l'on ne doit pas même l'ouvrir directement vers la lumiere qui éclaire le cadran. Ces attentions sont difficiles ; mais quand on s'y est plié par habitude, on en est dédommagé par la facilité que l'on trouve dans les observations des plus petites étoiles.

2513. Après avoir parlé de l'usage du réticule de 45°, je passe à l'usage du réticule rhomboïde (2353) : il y a trois vérifications à y faire ; car il faut reconnoître 1°, si les deux fils EF, BD (FIG. 147), sont à angles droits ; 2°, s'ils font exactement les deux diagonales du parallélogramme BEDF ; 3°, si l'une des diagonales BD est exactement double de l'autre. Pour y parvenir, on doit tracer en grand, et avec soin, un réticule semblable sur un mur éloigné, sur un carton, ou sur une planche ; en examinant cette figure avec la lunette, on voit si les lignes qu'on a tracées correspondent exactement à celles du réticule, et l'on parvient ainsi à connoître les défectuosités de celui-ci, pour y avoir égard dans le calcul ; on fait ensuite parcourir à une étoile les deux diagonales, et l'on voit si l'une est double de l'autre.

2514. Lorsqu'on emploie le réticule dans une observation, on doit d'abord s'assurer que l'un des astres parcourt exactement le parallele EF, sans le quitter depuis son entrée dans la lunette en K, jusqu'au moment où il se cache en E sous la lame du réticule ; si l'astre ne suit pas bien exactement le fil, on tournera la vis qui est ordinairement dans la boîte du réticule, et qui lui donne un petit mouvement de rotation, pour faire incliner le fil jusqu'à ce que l'astre le parcoure exactement. Cette inclinaison se produit par le moyen de quelques dents qui sont ordinairement à la circonférence du chassis du réticule, ou d'une vis comme dans la fig. 163 : si l'on n'a pas un réticule denté, ou propre à un semblable mouvement, on peut incliner la lunette à la main d'une petite quantité, jusqu'à ce que l'astre parcoure exactement le fil FE.

Le réticule étant ainsi disposé dans la direction du mouvement diurne, on compte exactement le temps qu'une étoile emploie à aller de F en E ; on le convertit en degrés (2505), pour avoir l'arc de l'équateur, ou l'angle au pole qui correspond à EF, ou qui passe

dans le même temps, et l'on multiplie cet arc par le cosinus de la déclinaison de l'astre pour avoir l'arc de grand cercle EF (3879).

2515. EXEMPLE. Le 14 novembre 1763, au matin, voulant comparer Mercure avec l'épi de la Vierge, je trouvai que l'étoile, en parcourant le fil équatorial FE, étoit en F à 5h 22′ 12″, et en E à 5h 25′ 24″; ainsi elle employoit 3′ 12″ à aller de F en E; je convertis cette quantité en degrés, à raison du temps solaire moyen, j'ai 48′ 8″; c'est l'arc de l'équateur qui passoit pendant le temps que l'étoile alloit de F en E; je multiplie cette quantité par le cosinus de 9° 55′, déclinaison de l'épi. j'ai 47′ 25″, valeur de l'arc EF, qui étoit la largeur du réticule (*Mém. acad.* 1766); c'est en même temps sa hauteur BM, puisqu'elle est égale à la base (2353).

2516. Pour connoître la différence de déclinaison entre deux astres observés au réticule rhomboïde en *d* et en *m*, on convertira en degrés chacun des intervalles de temps que les astres ont mis à traverser le réticule, on multipliera chacun de ces intervalles par le cosinus de la déclinaison de l'astre auquel il appartient; la somme des produits se retranchera de la longueur du réticule ou de BD, et l'on aura la différence de déclinaison *d m*. Si les deux astres ont passé du même côté ou dans le même triangle BEF, on prend la différence des produits pour avoir la différence de déclinaison.

2517. On abrege un peu en supposant la déclinaison sensiblement la même pour les deux astres; alors on prend la différence des intervalles de temps employés à traverser le réticule, convertie en degrés, minutes et secondes, et multipliée par le cosinus de la déclinaison moyenne; si c'est la différence, on aura sans autre calcul la différence de déclinaison; si c'est la somme, on la retranchera du double de la largeur du réticule, pour avoir la différence de déclinaison.

EXEMPLE. Après avoir observé l'épi de la Vierge en F et en E (2515), j'observai Mercure en *f* à 6h 15′ 4″, et en *e* à 6h 17′ 9″, la différence 2′ 5″ convertie en arc, à raison de 15° par heure, parceque Mercure employoit 24 heures à revenir au méridien, donne 0° 31′ 15″; multipliant par le cosinus de 9° 55′, qui est la déclinaison de l'étoile, on a 30′ 47″ pour l'arc *ef*, ou B*d* qui, retranché de 47′ 25″ = BM, donne 16′ 38″ pour la différence de déclinaison *d*M, entre Mercure et l'épi de la Vierge.

On peut se contenter de retrancher du temps par EF, le temps par *ef*, ou 2′ 5″ de 3′ 12″; le reste 1′ 7″ étant converti en temps et multiplié par le cosinus de la déclinaison, donne 16′ 30″ pour la différence de déclinaison M*d*. Il y a 8″ de moins que dans l'autre procédé; mais cela est insensible dans ce genre d'observations.

Des observations précédentes il est aisé de conclure que l'épi de la Vierge étoit au milieu M du réticule à 5h 23′ 48″, et Mercure en *d* à 6h 16′ 6″ ½, la différence 52′ 18″ ½ devoit être convertie en degrés à raison de 23h 55′ 50″ pour 360° (2506), parceque l'horloge retardoit de 14″ par jour sur le moyen mouvement; mais il est plus commode d'augmenter l'intervalle de temps d'une demi-seconde, et de le convertir ensuite comme un temps solaire moyen, et l'on a 13° 6′ 8″, différence d'ascension droite entre Mercure et l'épi de la Vierge, le 13 novembre 1763, à 18h 16′ 16″ de temps vrai.

2518. Si la grande diagonale BD est plus que double de la petite, le réticule donnera des différences de déclinaison trop petites par rapport au centre; on pourra s'en assurer en observant deux étoiles dont les déclinaisons sont connues, et la correction trouvée se distribuera proportionnellement pour les autres distances au centre du réticule. Si le fil EF n'est pas exactement dirigé suivant le parallele de l'étoile, elle emploiera plus de temps à aller d'un des côtés à la diagonale BD, que de celle-ci à l'autre côté; alors la différence entre les temps, divisée par leur somme, et multipliée par la cotangente du demi-angle au sommet, donne la tangente de l'inclinaison du réticule sur le parallele. (*Formule de M. de Lambre*).

On peut voir différentes formules sur les usages et les vérifications de ce réticule dans les OEuvres de M. Boscowich, *Tom. IV*, *pag.* 395. M. Wollaston en a donné dans les Transactions de 1785, et M. Englefield donne une méthode graphique dans la Connoissance des temps de 1791.

Nous parlerons ci-après des corrections qu'il faut faire dans certains cas à ces sortes d'observations, à raison des parallaxes (2538) et des réfractions (2544).

Des Observations qui se font au Micrometre.

2519. Le micrometre (2359) donne les diametres apparens des planetes; il détermine les différences de déclinaison plus exactement que le réticule, parcequ'il ne suppose pas la mesure du temps et l'obliquité des fils. Il sert aussi à mesurer la plus courte distance d'un objet à l'autre, par exemple celle de Mercure et de Vénus au bord le plus proche du Soleil (2133). On peut même l'employer à mesurer des différences d'azimut au lieu des intervalles des passages par le vertical (2123), pourvu qu'il y ait un niveau sur le micrometre; et cela peut être utile dans des observations qui se feroient fort près de l'horizon, où les différences d'azimut sont préférées, comme

comme n'étant point affectées de réfractions. Pour que les deux fils du micrometre soient vus avec la même clarté, il y a eu des astronomes qui ont employé le *binocle*, c'est-à-dire deux oculaires placés l'un à côté de l'autre. Mais le binocle que le P. Chérubin d'Orléans présenta au roi en 1676, et dont il traita fort au long dans son livre de *la Vision parfaite* (part. 2, 1681, *in-fol.*), étoit composé de deux oculaires, pour regarder à la fois des deux yeux le même objet; j'ai vu à la Haye, en 1774, M. Hemstruys qui en avoit fait exécuter un grand nombre, et qui assuroit qu'on avoit grand tort de ne pas suivre cette méthode.

2520. Le premier examen qu'on doit faire dans un micrometre, consiste à rendre le curseur exactement parallele au fil fixe, et à rendre le fil horaire exactement perpendiculaire aux deux autres; cela se peut faire aisément par le moyen de deux lignes exactement perpendiculaires l'une à l'autre, tracées à une grande distance de la lunette (2504), comme nous l'avons indiqué pour le réticule (2504).

2521. Pour être sûr que les deux fils sont bien perpendiculaires l'un à l'autre, on peut observer les différences de passages entre deux étoiles, en faisant parcourir chacun des deux fils alternativement, c'est-à-dire en faisant faire un quart de tour au micrometre; on trouvera l'une plus grande que l'autre du double de l'erreur que produit le défaut de l'angle droit.

2522. On doit examiner ensuite le premier point de la division, c'est-à-dire, le nombre de parties que marque le micrometre quand le curseur est confondu et réuni avec le fil fixe; c'est ce que nous appellons *erreur de l'index* : on est obligé de la connoître exactement pour en tenir compte dans toutes les observations; car l'index ne marquera la vraie distance des fils, que dans le cas où il marquoit zéro quand cette distance étoit nulle; s'il marquoit 10″, dans ce cas-là il faudra retrancher 10″ de toutes les mesures prises avec le micrometre. Pour connoître cette erreur, il ne s'agit que de réunir exactement les deux fils, et de voir ce que l'index marque, plus ou moins que zéro, et ce sera l'erreur, soustractive s'il marque plus, additive s'il marque moins.

2523. Dans les micrometres où les fils ne peuvent concourir ensemble et ne font que se toucher, il faut voir ce que marque l'index, quand les fils commencent à se toucher le plus légèrement, en retrancher encore le nombre des parties qui répondent à une épaisseur de fil (2535), et l'on aura la quantité de parties que l'index auroit marquées si les fils eussent pu concourir l'un sur l'autre.

Bradley avoit observé que, dans un micrometre, les fils en se

touchant exactement l'un et l'autre, s'unissent par une espece de cohésion ou d'attraction, qui les retient unis quelque temps, lors même qu'on détourne la vis; en sorte qu'on les voit ensuite se quitter subitement, et avec une espece de secousse. Pour éviter l'erreur qui naît de cette attraction, il faut éviter de faire toucher les fils, et il faut déterminer le commencement de la division, et l'erreur de l'index par une autre méthode que celle de rapprocher les fils l'un contre l'autre; j'ai oui dire à Londres que Bradley se servoit de la méthode suivante.

Soient A et B (FIG. 199), deux mires (2529), placées à une distance quelconque, BC le fil fixe du micrometre placé sur la mire B, et AD le fil mobile placé sur la mire A; on examinera le nombre des parties indiquées par le micrometre; je suppose qu'il soit de 124, c'est-à-dire un tour de vis et 24 centiemes: on changera ensuite la position du micrometre, en mettant le fil mobile AD, sur la mire BC, et le micrometre étant fixé invariablement dans cette situation, on fera mouvoir le curseur jusqu'à ce qu'il atteigne la mire supérieure; on examinera les parties que marque alors le micrometre, et si l'on trouve exactement le double de ce qu'on a trouvé dans la premiere opération, par exemple, 248, on sera sûr qu'il n'y aura rien à ajouter pour l'erreur du commencement de la division, et que l'index seroit à zéro exactement, si les centres des deux fils pouvoient concourir l'un sur l'autre; si l'on ne trouve que 238, c'est-à-dire 10 de moins que le double de 124, ce sera une preuve qu'il y a 10 parties pour l'erreur, et qu'elle est soustractive: en effet la distance des mires n'étant véritablement que de 114, comme le prouve l'espace parcouru par le curseur, le micrometre ne devoit marquer que 114 dans la premiere situation, au lieu de 124 qu'il marquoit; ainsi l'on ôtera 10 parties de toutes les mesures prises avec ce micrometre, et réduites au centre du fil.

2524. On assure qu'en mesurant le diametre de la Lune ou du Soleil avec un micrometre, Bradley étoit dans l'usage de rendre les deux fils tangentes intérieures au limbe, en sorte qu'au dehors de chaque fil on commençât d'appercevoir un filet de lumiere; dans ce cas, il faut ajouter au nombre des parties qui marquent la distance des deux fils, la valeur d'une épaisseur de fil, pour avoir le nombre qui s'observeroit si chaque bord du Soleil étoit sur le centre de chaque fil. Cependant je préfere de rendre les deux fils tangentes extérieures aux bords de l'astre que je mesure; cela me paroît plus facile et plus exact; je distingue mieux l'attouchement quand je vois le disque entier en dedans des fils, et la rondeur du disque me fait

appercevoir, ce semble, avec une très-grande précision si le fil mord sur le disque, ou s'il en est éloigné. Dans ce cas, il faut ôter des parties du micrometre l'épaisseur d'un fil (2536), afin d'avoir la quantité de parties que marqueroit le micrometre, si les bords du Soleil étoient exactement sur le milieu de chaque fil. Il faut y appliquer ensuite l'erreur de l'index (2522).

2525. L'intervalle des pas de vis, qui dans un micrometre sert à mesurer les petits angles, étant supposé le même, il répond à un plus petit nombre de secondes, si la lunette est plus longue; en effet l'intervalle GF (FIG. 143) étant supposé de 2 pouces et l'angle GAF d'un degré, cette même étendue de 2 pouces, portée à une plus grande distance du point A, ne rempliroit pas l'angle GAF, elle sontendroit un plus petit angle au point A.

Si l'on mesure avec grand soin la distance qu'il y a entre la surface intérieure *a* de l'objectif et les fils (en y ajoutant pour plus d'exactitude le tiers de l'épaisseur du verre), et qu'on mesure aussi la demi-distance BF des fils, quand l'index marque un nombre donné, on pourra dire AB : BF : : R : tang. BAF, et l'on aura en minutes et secondes la valeur des parties du micrometre qui répondent à BF (Cassini, *p.* 125).

2526. La seconde méthode pour connoître les parties du micrometre est celle du temps; on connoît le diametre du Soleil par le temps qu'il emploie à traverser le méridien (1008, 1383); on mesurera ce diametre en parties du micrometre, et l'on saura combien ces parties valent de minutes et de secondes.

2527. On peut y employer aussi une étoile observée dans le crépuscule, qu'on fera mouvoir le long d'un des fils du micrometre; les autres fils étant écartés d'une certaine quantité de parties du micrometre, marquées par l'index, on observera le temps que l'étoile emploie à aller d'un fil à l'autre; on convertira ce temps en secondes de degrés (2505); on multipliera les secondes par le cosinus de la déclinaison de l'étoile (3879), et l'on aura l'arc de grand cercle qui répond aux parties du micrometre.

2528. Lorsqu'on ne veut point employer la mesure du temps ni la mesure du foyer d'une lunette, pour trouver la valeur des parties du micrometre, on est obligé de mesurer une base; mais on a rarement besoin d'en venir là, puisque le diametre du Soleil est connu aujourd'hui avec la plus grande précision (1388), en sorte qu'on peut s'en servir pour évaluer les micrometres.

2529. La méthode qui emploie la mesure d'une base, est la plus exacte de toutes pour connoître les parties d'un micrometre. Je

prendrai pour exemple l'opération par laquelle je déterminai les diametres du Soleil avec plus de précision qu'on ne l'avoit encore fait ; savoir, de 31' 30" $\frac{1}{2}$ en été (*Mém.* 1760); je mesurai l'étendue de la rue de Tournon, en face de l'observatoire que j'occupois au palais du Luxembourg, en employant les grandes perches qui avoient servi à la base de Villejuif (2660); ayant abaissé un à-plomb du haut de mon observatoire, et nivellé la rue avec soin, je trouvai 915 pieds $\frac{3}{4}$ de distance. Je plaçai à l'extrémité de la rue, sur le mur de la maison qui fait face au Luxembourg, une regle AB (FIG. 200), mise exactement d'à-plomb, avec deux mires A et B, c'est-à-dire deux cartons sur lesquels il y avoit un cercle noir avec un cercle blanc dans le milieu. Leur distance étant exactement de 8 pieds $\frac{1}{3}$, et l'abaissement HLA au-dessous de l'horizon de 2° 36', on trouve par le calcul du triangle ALB, que la distance AB des mires devoit paroître sous un angle de 31' 15", en supposant 915 pieds $\frac{3}{4}$ de L en H entre les objectifs de la lunette et le plan des mires. Je mesurai exactement leur distance en parties du micrometre, et je trouvai 4930 ou 49 tours de vis, et 30 centiemes; telle étoit la valeur de l'angle de 31' $\frac{1}{4}$; ainsi il est certain que quand la Lune paroîtra sous le même nombre de parties, et qu'elle sera comprise entre les mêmes fils, son diametre apparent sera aussi de 31' $\frac{1}{4}$, pourvu que le micrometre n'ait pas changé de place, et qu'il soit toujours à la même distance des objectifs de la lunette. C'est ainsi que j'ai trouvé le diametre du Soleil (1388).

Dans le calcul précédent la base étoit assez longue pour que le foyer des objets terrestres fût sensiblement le même que celui des astres, en sorte que je voyois les mires fort distinctement, sans alonger ma lunette et sans changer la situation des fils; à la rigueur il auroit fallu l'alonger de 12 lignes $\frac{3}{5}$; mais sur un foyer de 9 pieds, le changement d'un pouce est peu sensible dans les lunettes ordinaires.

2530. Bouguer, en traitant des différentes images qui sont distribuées le long de l'axe d'une lunette, évalue l'espace dans lequel elles sont à-peu-près de même force, à un peu moins de la moitié de l'intervalle compris entre les extrêmes, lequel est de $\frac{1}{37\frac{1}{2}}$ du foyer (*Figure de la Terre, pag.* 204). Le P. Pezenas dit qu'en observant sur terre un objet placé à 443 toises avec une lunette de 15 pieds, l'image restoit parfaitement distincte dans un espace de plus d'un pouce (*Mém. de Marseille,* 1755, *pag.* 105). Mais quoique l'image soit très distincte, la mesure de l'objet en parties du micrometre va

sans cesse en diminuant quand on enfonce l'oculaire ; car l'image GF (FIG. 143), prise un peu plus près de l'objectif A, y est nécessairement un peu plus petite ; ainsi quand on change la longueur de la lunette, on ne peut plus compter sur la valeur des parties du micrometre, quand même l'image seroit également bien terminée.

2531. Si la base ou la distance mesurée n'est pas assez longue, et si l'image des mires n'est pas très distincte et très nette en laissant l'oculaire au point qui lui convient pour les objets célestes, on est obligé de le retirer un peu plus que pour les objets célestes, et l'on aura pour la mesure de l'objet un trop grand nombre de parties. ans ce cas-là, on placera l'oculaire au point où l'image des mires Dt la plus distincte, et l'on aura la longueur du foyer pour les mires ; esant trouvé la mesure en partie du micrometre, on dira : *la dis-ay e des m ires aux fils du micrometre est à la distance des mires à 'objectif, comme le nombre de parties qu'on vient de trouver est à lelui qu'on auroit au foyer des rayons paralleles* [a]. On chèrchera ensuite exactement le point où il faut placer les fils, ou la quantité dont il faut repousser les fils pour qu'ils soient exactement au foyer des rayons paralleles, par le moyen de cette proportion : *la distance des mires aux fils du micrometre est à leur distance à l'objectif, comme la longueur du foyer pour les mires est à celle du foyer des rayons paralleles ;* on verra de combien de lignes ce nouveau foyer est plus court que celui des objets terrestres, et l'on enfoncera exactement de cette quantité le micrometre pour observer les astres ; alors le nombre de secondes qui répond à un tour de vis augmentera en raison inverse de la longueur du foyer.

Dans l'exemple précédent, je suppose que l'oculaire de la lunette ait été placé au point où l'image des mires étoit la plus distincte, et qu'on ait trouvé 1296 lignes pour la longueur du foyer, on dira 924 $\frac{3}{4}$ sont à 915 $\frac{3}{4}$ comme 1296 lignes qui sont le foyer de la lunette, sont à 1283, 4, qui sont le foyer des rayons paralleles, plus court de 12 lignes $\frac{6}{10}$ ou 12 lignes $\frac{3}{5}$ que le précédent ; il faut dans ce cas rapprocher de l'objectif le micrometre et l'oculaire, et cela de 12 lignes $\frac{3}{5}$ pour observer les astres, et les parties du micrometre diminuent dans le même rapport. Si l'on peut voir assez distinctement les objets terrestres avec la disposition de l'oculaire qui convient aux astres, on peut se passer de ces opérations ; mais quand on se sert des lunettes acromatiques (2297), il est absolument nécessaire de faire ces calculs, parceque leur foyer n'a point cette étendue le long de l'axe, qu'on observe dans les lunettes simples.

(a) Optique de Smith art. 230, 383.

2532. Pour connoître ainsi par le moyen d'une base la valeur des parties d'un héliometre (2440), il est encore plus essentiel d'alonger la lunette de la quantité convenable à la distance terrestre, et quoique l'on pût voir les objets très distinctement sans retirer l'oculaire, on trouveroit une erreur sensible dans la valeur des parties; en effet les différentes images des objets que l'on regarde, étant distribuées sur un espace de 2 à 3 pouces, le long de l'axe d'une lunette de 18 pieds, l'oculaire vous fera voir l'image qui est à 18 pieds, quand il s'agira d'un objet céleste, et celle qui est à 18 pieds 2 pouces, quand vous regarderez un objet terrestre : dans le dernier cas les deux images anticiperont l'une sur l'autre, quoique les deux autres, qui sont à 18 pieds de foyer, ne fassent que se toucher, parcequ'elles sont plus petites. Il est donc nécessaire d'employer la proportion précédente (2531) pour trouver la quantité dont on doit alonger la lunette en regardant les mires; cette quantité étoit de 4 pouces pour un héliometre de 18 pieds et une base de 915 pieds $\frac{3}{4}$ (2529).

2533. Je ne parlerai pas ici de la maniere de trouver la valeur des parties du micrometre objectif appliqué à un télescope, le calcul en est trop compliqué; on peut consulter là-dessus le Mémoire du P. Pezenas. Je dois seulement observer qu'il y a des astronomes qui se sont trompés en croyant que la base qui sert à évaluer les parties d'un micrometre devoit se compter depuis l'oculaire; on peut voir la démonstration que j'ai donnée pour l'héliometre simple (*Mém. de l'acad.* 1760). Le même écartement des verres de l'héliometre, et le même nombre de parties du micrometre, mesurent le diametre d'un astre et celui d'un objet terrestre qui a le même diametre, vu du centre de l'objectif, et non pas vu du foyer de la lunette. Il est vrai que l'image d'un astre qui a 30′ de diametre, ne se forme pas au même point que celle d'un objet terrestre qui paroît sous un angle de 30′; mais cela n'empêche pas que les deux bords ne se touchent dans chacune de ces deux images; les angles qui se forment à ces deux foyers différens ne sont pas les mêmes; mais ils appartiennent à deux objets qui, vus du centre de l'objectif, paroîtroient sous le même angle, et dont le diametre est représenté par le même écartement des objectifs et le même nombre des parties du micrometre.

2534. La méthode que j'ai indiquée pour connoître les parties du micrometre (2529), sert à vérifier les pas de la vis, et à connoître leurs inégalités; car si l'on a deux mires (FIG. 199), et qu'on mesure leur distance en parties du micrometre dans plusieurs endroits de la vis, on verra si cette distance est par-tout exactement

du même nombre de parties, comme elle doit l'être si la vis est par-tout d'un pas égal.

2535. Cette méthode sert aussi à connoître l'épaisseur des fils, car ayant rendu l'un des fils tangente intérieure à l'un des cercles qui servent de mire, et ensuite tangente extérieure, le changement de l'index indiquera la valeur de l'épaisseur du fil, qu'on est obligé d'ajouter dans certains cas au diametre mesuré entre les fils (2524), et à la hauteur méridienne du bord du Soleil (2581).

2536. Pour connoître le vrai diametre du Soleil, il faut le mesurer dans le sens horizontal avec l'héliometre, parceque les diametres verticaux sont diminués par l'effet de la réfraction, et les diametres inclinés le sont plus ou moins (2247); on a aussi à craindre les ondulations de l'air et les décompositions de rayons, qui se font de bas en haut, et qui affectent un peu les diametres verticaux.

2537. Bouguer fut étonné en 1748, la premiere fois qu'il observa le Soleil avec son héliometre, de trouver le diametre vertical du Soleil plus grand que le diametre horizontal, après avoir déduit l'effet de la réfraction qui le fait paroître plus petit, et il pensa que cela pouvoit venir de ce que le bord supérieur paroît élevé par les rayons violets, les plus réfrangibles de tous, tandis que le bord inférieur est vu principalement par les rayons rouges qui sont les moins réfrangibles, et qui s'étendent vers le bas de la partie inférieure du disque solaire (*Mém.* 1748).

Différence entre le Parallele apparent et le Parallele vrai.

2538. Quand on observe ou les taches de la Lune (3308), ou les différences d'ascension droite entre la Lune et une étoile qui la suit [a], on est obligé de faire parcourir au bord de la Lune le fil parallele à l'équateur; mais, à cause du changement rapide qu'il y a dans la déclinaison de la Lune et dans la parallaxe en déclinaison, il arrive que si le bord de la Lune parcourt exactement le fil, celui-ci n'est point parallele à l'équateur, et il faut faire une double correction à la différence d'ascension droite et de déclinaison. J'appelle donc *parallele apparent* la trace que suit la Lune, ou la direction du fil qu'elle parcourt dans la lunette, et *parallele vrai* celui qu'elle

(a) Si l'étoile précede la Lune, c'est l'étoile qui parcourt le fil; et pour lors la différence des paralleles vrai et apparent devient indifférente pour l'ascension droite; cependant, pour le passage aux fils obliques, il faudroit avoir égard au changement de déclinaison et de parallaxe dans l'intervalle d'un fil à l'autre.

suivroit si, pendant qu'elle traverse la lunette, elle ne changeoit point de déclinaison, et que son mouvement fût exactement parallele à l'équateur; de même le cercle horaire apparent est celui qui est perpendiculaire à la trace apparente ou observée, et le cercle horaire vrai celui qui seroit perpendiculaire au véritable parallele; il s'agit de trouver leur différence. Soit DE (FIG. 201) un arc d'un degré pris sur l'équateur, et qui passe en quatre minutes de temps, LB une portion du parallele qui traverse le cercle horaire dans le même temps: supposons que la Lune, pendant ces quatre minutes, se soit éloignée de l'équateur de la quantité BC, ou par le changement de la parallaxe, ou par celui de la déclinaison vraie, elle se trouvera en C au lieu de se trouver en B, et elle aura parcouru la ligne LC au lieu du parallele LB; cet arc LC est le parallele apparent, et l'arc perpendiculaire à LC est le cercle horaire apparent; c'est celui par rapport auquel on se trouve avoir mesuré la différence d'ascension droite, quand on a dirigé le fil du micrometre sur le parallele de la Lune; l'angle que font entre eux ces deux cercles, est l'angle CLB du parallele vrai et du parallele apparent; c'est cet angle qu'il s'agit de trouver.

2539. Mayer avoit donné une formule pour cet effet, relativement à la parallaxe, dans son Mémoire sur la libration, pag. 125 des Mémoires de Nuremberg, que j'ai cités (3307), elle a été démontrée par M. Kæstner dans le 4e volume des nouveaux Mémoires de l'académie de Gottingen, par M. Lambert (Ephémérides de Berlin, 1776), et par M. Lexell (Mém. de Pétersb., 1774); mais ces démonstrations sont très prolixes. Il suffit de diviser la différentielle de la parallaxe en déclinaison par celle de l'angle horaire, multipliée par le cos. déclin. En effet, soit ZPL (FIG. 201, n°. 2) l'angle horaire de la Lune, AL un petit arc du parallele de la Lune, dont la distance au pole est supposée constante, LV le parallele apparent provenant du changement de parallaxe en déclinaison. L'angle ALV est $\frac{AV}{AL}$ ou $\frac{AV}{APL.\ sin.\ PL}$; la parallaxe en déclinaison est p cos. PZ sin. PL $-$ p cos. PL. sin. PZ cos. P (1688); la différentielle de cette expression ou AV, $= pd$P cos. PL. sin. PZ. sin. P (3446); et comme APL $=$ DP, la valeur de $\frac{AV}{APL\ sin.\ PL}$ devient p cot. PL sin. PZ sin. ZPL. Ainsi l'angle du parallele vrai est égal à la parallaxe horizontale, multipliée par le cosinus de la latitude du lieu, par le sinus de l'angle horaire de la Lune, et par la tangente de sa déclinaison. M. Cagnoli, *Trigon.*, *art.* 822.

2540. Le parallele apparent differe aussi du parallele vrai, à raison de la déclinaison vraie de la Lune, qui change quelquefois plus de 7° par jour ; la Lune, au lieu de parcourir le parallele LB (FIG. 201) dans l'espace de 4′ de temps, parcourra LA, et la différence BC sera alors de 1′ de degré. Pour trouver à cet égard la valeur de l'angle ALB, je prends la quantité moyenne du mouvement horaire de la Lune en ascension droite, qui est de 33′ : je les retranche de 15°, qui est le mouvement de la sphere en une heure, et j'ai 867′ pour le mouvement de la Lune par rapport au méridien ; ainsi LB, que je suppose parcouru en une heure, sera 867′ cos. déclin. ; et si l'on appelle n le mouvement diurne en déclinaison, on aura $\frac{n}{24}$ pour le petit changement BC en une heure de temps ; l'angle BLC en minutes de degrés est égal à $\frac{BC}{BL}$ multiplié par 3438′, que contient l'arc égal au rayon (3499) ; donc l'angle BLC $= \frac{3438\,n}{24.\ 867.\ \text{cos. décl.}} = \frac{\frac{1}{6}n}{\text{cos. décl.}}$, c'est-à-dire que la sixieme partie des minutes du changement diurne de la Lune en déclin., divisée par le cosinus de la déclin. de la Lune, donne l'angle cherché en minutes.

2541. Pour appliquer ces deux équations à l'angle de position, on se servira des mêmes dénominations que dans les art. 1030, 1880, en appellant l'angle de position *Oriental*, quand le cercle de latitude est à l'orient du cercle de déclinaison vers le nord.

La premiere partie de la correction (2539) qui dépend de la parallaxe, sera orientale, et le cercle horaire apparent sera à l'orient du cercle horaire vrai vers le nord, tant que la Lune n'aura pas passé le méridien, ou sera dans l'hémisphere oriental ; elle sera occidentale dans l'hémisphere occidental.

2542. La seconde partie sera orientale, quand la Lune, par sa déclinaison, se rapprochera du pole septentrional ; car alors le cercle de déclinaison apparent sera plus à l'orient que le cercle de déclinaison vrai, vers le nord, il fera un angle oriental, en vertu de la derniere équation $\frac{\frac{1}{6}n}{\text{cos. décl.}}$, c'est-à-dire que cette seconde correction sera orientale ; ce sera le contraire, quand la Lune tendra vers le midi.

2543. On prendra la somme de ces deux équations, quand elles seront toutes les deux orientales, ou toutes les deux occidentales ; sinon on prendra leur différence, et l'on aura la correction totale. Cet angle de correction doit se retrancher de l'angle de position ou de l'angle du cercle de latitude et du cercle de déclinaison vrai, si

les deux angles sont de même dénomination (1038, 1880) ou leur somme; s'ils sont de différente dénomination, l'on aura l'angle du cercle de déclinaison apparent, avec le cercle de latitude dont on a besoin : on en verra l'usage (3308).

2544. Le parallele vrai differe encore du parallele apparent, à raison de la réfraction (2249) qui change pendant le temps que l'astre emploie à traverser la lunette; cela arrive sur-tout quand l'on compare une planete à une étoile près de l'horizon, comme dans la plupart des observations de Mercure. Je prendrai pour exemple les observations faites avec le réticule rhomboïde. Ayant cherché dans les tables combien la réfraction change dans l'intervalle de temps qu'un des astres met à parcourir la demi-largeur MF (FIG. 202), je prends sur le vertical un espace FH égal à cette quantité, en sorte que MH soit le parallele vrai, et MF le parallele apparent sur lequel est dirigé le losange; l'observation nous donne la différence des passages sur le cercle horaire apparent MB; il faut les avoir sur le cercle horaire vrai MC, sur lequel devroit être dirigé le rhomboïde.

2545. Soit $BM = d$, différence de déclinaison entre les deux astres; le sinus de l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison $(1038) = s$, son cosinus $= t$; le changement de réfraction pour 1° d'augmentation sur la hauteur $= r$; on aura la différence des passages au cercle horaire apparent et au cercle horaire vrai $\frac{2tdrs}{3600 \text{ cos. déclin.}}$. En effet ayant tiré la ligne horizontale EMI, l'angle F du réticule est plus élevé que le centre M de la quantité FI = FM multipliée par le sinus s de l'angle FMI; si cette différence de hauteur étoit d'un degré, l'étoile qui paroît avoir été de M en F auroit dû paroître en H si la réfraction n'eût pas diminué, en sorte que l'on auroit $FH = r$; $FM = MR = \frac{1°}{s}$, $FN = rt$; donc $MF : FN :: \frac{1°}{s} : rt :: 1° : rts$: c'est aussi le rapport de MB à BC; mais $MB = d$, donc 1°, ou 3600″ $: rts :: d : BC$, et $BC = \frac{rtsd}{3600}$, cette quantité rapportée sur l'équateur (3879), sera $\frac{rtsd}{3600 \text{ cos. déclin.}}$. C'est la différence des passages en B et en C, qu'il faut ôter du passage observé en B, pour avoir le passage au véritable cercle de déclinaison MC. Cette équation subsisteroit, même en supposant que la différence de déclinaison BM ne fût point accourcie par la réfraction; mais cet accourcissement fait que l'étoile qui devroit paroître en B paroît en A sur le vertical BA, c'est-à-dire plus près de l'étoile M. Pour avoir la quantité BA, l'on considérera que le point B est plus élevé verticalement que le

point M de la quantité BE = BM cos. MBE = dt. Mais BE : BA :: 1° : r; donc BA = $\frac{rtd}{1°}$, AL = $\frac{rtsd}{3600}$, et en comptant sur l'équateur $\frac{rtsd}{3600 \text{ cos. décl.}}$, c'est la seconde partie de la correction cherchée. A raison de cette seconde cause (l'étoile qui passe en M étant supposée décrire MF au lieu de NM) la planete qui la suivra, et qui paroîtra décrire ALG, arrivera plus tard sur MB que sur le véritable fil horaire MC, l'ascension droite paroîtra trop grande; ainsi cette partie sera encore soustractive; et puisqu'elle est égale à la premiere, on aura $\frac{2rtsd}{3600 \text{ cos. décl.}}$ pour la correction entiere, qu'il faut ôter de l'ascension droite observée au cercle apparent BM, quand l'astre va en montant comme dans la figure 202, et que l'astre B est au-dessus du centre.

2546. EXEMPLE. Le 14 novembre 1763, au matin, je comparai Mercure avec l'épi de la Vierge qui traversoit le centre du réticule, et Mercure passoit le dernier; la différence de déclinaison étoit de 16′ 40″ = d, la hauteur 6° 22′; le changement de réfraction pour un degré = 60″ = r, la déclinaison 9° 55′, l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison 37° 53′, dont le sinus est = s et le cosinus = t; la formule devient 16″5, qu'il faut ajouter, parceque Mercure montoit et étoit au midi de l'étoile (*Mém. de l'acad.* 1766, *pag.* 455). M. Lexell avoit contredit cette formule (*Mém. de Pétersb.*, 1774); mais il se trompoit, et M. Cagnoli l'a réfuté (*pag.* 440) : M. Kæstner a trouvé les mêmes expressions que moi, *Novi comm. Gotting*, *Tom. III*.

2547. La correction de la déclinaison est égale à $\frac{rttd}{3600}$. Pour le démontrer, je suppose que les directions apparentes MF, BD des deux astres sont des lignes paralleles, parceque dans l'espace de 4 minutes la réfraction change de la même quantité pour deux astres qui passent à peu de distance l'un de l'autre; mais l'un des deux astres étant rapproché de l'autre de la quantité BA dans le vertical ou de la quantité BL sur le cercle de déclinaison, l'espace PG qu'il parcourra dans le réticule sera plus grand que SD, et la différence de déclinaison paroîtra ML. Pour trouver cette différence, on considérera que BA = $\frac{rtd}{1°}$, donc BL = $\frac{rttd}{1°}$. Cette équation est toujours additive à la différence de déclinaison qu'on observe, parceque la réfraction accourcit les distances.

2548. Il y a une seconde cause de changement dans la longueur

apparente PG, qui vient de ce qu'étant inclinée sur le parallele vrai, elle n'est pas tout-à-fait de la même quantité, comme la base RF du triangle est différente de la ligne inclinée KO; mais l'inclinaison est petite, et la différence est insensible.

Des Observations qui se font avec le Quart-de-cercle.

2549. Les hauteurs apparentes des astres au-dessus de l'horizon sont les premieres observations que l'on fasse (22) et les plus importantes. Après la description que j'ai donnée du quart-de-cercle (2311), il ne me reste qu'à en expliquer les vérifications et l'usage. Je suppose que l'artiste a pris soin de faire en sorte que le limbe fût bien dans un seul plan. Pour parvenir à cette opération difficile, on se sert d'une regle qu'on fait tourner autour d'un grand axe, pour parcourir la circonférence du quart-de-cercle, et l'on voit si dans son mouvement l'extrémité de la regle est toujours également proche du limbe dans tous ses points. On peut aussi reconnoître si le limbe d'un instrument est dans un seul et unique plan, en le plaçant horizontalement, et en y promenant un excellent niveau (2399); mais il n'y a qu'un cercle entier qui puisse être bien plan, parcequ'on a la facilité de le mettre sur le tour.

2550. La premiere vérification que doit faire l'observateur, consiste à voir si le fil du micrometre, qui doit être horizontal, n'est point incliné à l'horizon; pour cela on tirera, par le moyen du fil-à-plomb, une ligne verticale sur un mur éloigné perpendiculaire au rayon visuel, et une ligne horizontale perpendiculaire à la premiere; on dirigera la lunette du quart-de-cercle sur ces lignes, et l'on verra si le fil horizontal n'est point incliné par rapport à la ligne horizontale : il y a ordinairement dans les micrometres des vis (2376, 2378), par le moyen desquelles on corrige cette inclinaison, tant pour le fil fixe que pour le fil mobile.

Le passage des étoiles par le méridien sert aussi à reconnoître si le fil est bien horizontal; car ayant dirigé dans le temps du crépuscule le quart-de-cercle dans le méridien, et vers une des étoiles qui sont à-peu-près dans l'équateur, il faut que pendant deux minutes, l'étoile ne cesse pas d'être coupée exactement en deux parties égales par le fil, et de le parcourir, ou qu'elle s'en écarte également et dans le même sens, avant et après le passage au fil du milieu.

2551. Lorsque la lunette d'un quart-de-cercle est pointée à l'horizon, sa hauteur étant zéro, le fil-à-plomb doit tomber sur le commencement de la division des hauteurs; lorsqu'on divise un in-

strument pour la premiere fois, il seroit très bon de chercher un point dans l'horizon par le moyen d'un bon niveau (2398); on pointeroit la lunette sur cet objet, et marquant sur le limbe l'endroit où bat le fil-à-plomb, on auroit le commencement de la division.

2552. Lorsque l'instrument est divisé, l'astronome qui en veut faire usage doit nécessairement le vérifier par le renversement, pour savoir si l'axe de la lunette fait exactement un angle de 90° 0′ 0″ avec le rayon qui passe sur le premier point de la graduation des hauteurs. Cette vérification consiste à mesurer la hauteur d'un objet à-peu-près horizontal, avec le quart-de-cercle droit et renversé, c'est-à-dire le centre étant successivement en haut et en bas; si la hauteur est plus grande quand l'instrument est renversé, c'est une preuve que le quart-de-cercle est trop petit, ou le fil trop près du zéro des hauteurs; c'est le contraire si la hauteur est plus petite; l'erreur est toujours la demi-différence des deux hauteurs observées dans les deux situations. Soit OC (FIG. 203) la lunette du quart-de-cercle pointée sur une mire M, ou sur un objet quelconque situé vers l'horizon; supposons que dans cet état le fil-à-plomb CBP tombe sur le point B du quart-de-cercle, au lieu de tomber sur le point A, qui est le commencement de la division, l'arc AB sera la hauteur indiquée par la division pour l'objet M.

On renversera le quart-de-cercle, c'est-à-dire qu'on mettra en bas le centre C et la lunette OE (FIG. 204), le commencement A de la division étant en haut, et la lunette OE à même élévation au-dessus du sol que la lunette OC, dans la premiere observation (2554); l'on pointera la lunette OE sur le même objet, et l'on suspendra le fil-à-plomb avec de la cire sur un point D de la division, tel que sa partie inférieure vienne battre sur le centre C, c'est-à-dire sur le point où le fil étoit suspendu dans la premiere situation; l'arc AD marquera la hauteur de l'objet: si cet arc AD n'est pas égal à l'arc AB (FIG. 203) qui marquoit la hauteur de l'objet dans la premiere situation, la moitié de la différence sera l'erreur de l'instrument. En effet, si dans la premiere opération l'on a trouvé la hauteur de l'objet de 1° 20′ égale à l'arc AB, et que dans l'autre on ait la hauteur 1° 24′ égale à l'arc AD, en éloignant de 2′ le point A de la lunette O, l'on aura 1° 22′ dans les deux cas, comme cela doit être, si le rayon qui passe au point A fait véritablement un angle droit avec l'axe optique de la lunette. Le premier point A de la division des hauteurs A étant trop près de la lunette et du point O, est aussi trop près du point B ou du fil-à-plomb dans la fig. 203; ainsi

la hauteur AB, prise dans la situation naturelle du quart-de-cercle, paroît trop petite. C'est le contraire dans la fig. 204 ; le point A étant trop près du point O, se trouve trop éloigné du point D, où est suspendu le fil-à-plomb qui bat sur le centre en C; ainsi l'arc AD qui indique la hauteur de l'objet est trop grand, de la même quantité qu'il étoit trop petit dans le cas de la fig. 203, parceque le point du limbe où répond le fil dans les deux situations, est placé précisément en sens contraire par rapport au commencement A de la division ; il est plus près de la lunette O dans la fig. 203, et plus loin dans la fig. 204.

2553. Si l'objet M est à-peu-près dans l'horizon, on pourra se servir du micrometre (2366) pour mesurer ces hauteurs; on suspendra le fil-à-plomb au centre; on inclinera le quart-de-cercle jusqu'à ce que le fil suspendu sur le centre vienne pendre exactement sur le premier point de la division ; on fera mouvoir le curseur du micrometre jusqu'à ce qu'il atteigne l'objet M (FIG. 203), et l'on aura ainsi le nombre de minutes et de secondes qui marque sa hauteur apparente. Le quart-de-cercle étant renversé (FIG. 204), on suspendra le fil sur le premier point de la division A, on placera le quart-de-cercle de maniere que le fil vienne pendre exactement sur le centre C, et l'on mesurera encore la hauteur de l'objet avec le micrometre ; la différence entre ces deux hauteurs sera le double de l'erreur de l'instrument. Par exemple, je suppose que le quart-de-cercle étant droit, il a fallu faire descendre le curseur du micrometre à 600 parties pour mesurer la hauteur de l'objet, ce qui donne la hauteur de 600 parties au-dessus de l'horizon, et que dans le renversement il a fallu le faire descendre seulement de 400, la moitié de la différence est 100; c'est l'erreur qu'il faut ôter de toutes les hauteurs observées quand le quart-de-cercle est droit.

Dans le cas où l'on voudroit corriger l'erreur trouvée, par le moyen de la vis du chassis dormant (2374), on élevera le fil mobile au-dessus du fil fixe de 100 parties, et mettant la clé sur le cadran en N (FIG. 159), on fera remonter le fil fixe jusqu'à ce qu'il concoure exactement avec le fil mobile; on mettra ensuite les deux index A et I exactement sur zéro, et l'on sera sûr que les hauteurs mesurées avec le quart-de-cercle se trouveront plus petites de 100 parties qu'elles n'étoient auparavant.

2554. J'ai dit que pour cette vérification il falloit que la lunette fût à même hauteur au-dessus du sol où l'on est, dans les deux positions du quart-de-cercle (2552); car comme l'objet n'est jamais à une distance infinie, sa hauteur seroit differente dans les deux

situations, si la lunette étoit plus ou moins élevée ; ainsi quand la lunette sera renversée (FIG. 204), il faudra élever le pied de l'instrument, et, au moyen d'une regle, faire en sorte que le centre de l'objectif de la lunette soit précisément aussi haut que dans la premiere situation (FIG. 203), c'est-à-dire sur la ligne OM.

Si l'on ne peut pas commodément élever le quart-de-cercle, on mesurera la quantité dont la lunette sera plus basse dans le renversement, aussi bien que la distance de la mire M à l'objectif de la lunette; et résolvant le triangle donné par ces deux lignes, on trouvera l'angle qu'il faut ajouter à la hauteur de la mire observée dans le premier état, pour avoir la hauteur qui devroit avoir lieu dans le renversement, indépendamment de l'erreur du quart-de-cercle; et c'est cette hauteur corrigée qu'il faut comparer avec celle qu'on aura effectivement observée dans le renversement.

On peut aussi éviter ce calcul en plaçant deux mires en M et en N, qui soient l'une au-dessous de l'autre, précisément de la même quantité que la lunette est plus basse dans une des situations ; on pointera sur la mire la plus élevée M, quand la lunette sera la plus haute; mais on pointera sur la mire inférieure N dans le renversement : alors tout se fera comme s'il n'y avoit qu'une seule mire, et que la lunette eût été mise à la hauteur de la mire M dans les deux situations.

2555. L'artiste qui construit un instrument, doit employer une méthode semblable pour marquer le premier point de sa division. Lorsque la lunette est placée, le limbe dressé et l'arc décrit, il faut y mettre un fil-à-plomb, et diriger la lunette sur un objet éloigné dans les deux positions de l'instrument, on aura sur le limbe deux points différens, dont le milieu marquera l'endroit où il faut commencer les divisions. On doit aussi marquer le dernier point de la division des hauteurs ou le point de 90°, qui est vers la lunette O (FIG. 203); pour cet effet l'on place une regle bien droite qui passe sur le centre du quart-de-cercle et qui touche le limbe; on met à côté de cette regle, si l'instrument est placé horizontalement, la lunette d'épreuve (2503); on la met sur la regle, si l'instrument est vertical, et l'on fait mouvoir la regle jusqu'à ce qu'on voye au centre de la lunette d'épreuve le même objet qu'au centre de la lunette du quart-de-cercle; alors la regle et la lunette d'épreuve sont exactement paralleles à la lunette de l'instrument; et comme je suppose qu'un des bords de la regle passe toujours sur le centre, la regle marquera par son autre extrémité sur la circonférence du quart-de-cercle, le point où doit finir la division des hauteurs, c'est-à-dire le

point où doit battre le fil-à-plomb quand la lunette sera dirigée au zénit. Si l'objet dont on se sert n'est pas assez éloigné pour que la différence entre la lunette d'épreuve et la lunette de l'instrument soit insensible, il faudra employer deux mires qui soient entre elles à même distance que les lunettes, par la même raison que dans l'art. 2554.

2556. La vérification par le retournement sert à vérifier le dernier point de la division des hauteurs au moyen des étoiles voisines du zénit; cette opération fait voir si le point du zénit a été bien déterminé par l'opération précédente, s'il n'est arrivé aucun dérangement à la lunette et au limbe de l'instrument, et si l'arc total est bien de 90° 0' 0". On observe la hauteur méridienne d'une étoile voisine du zénit dans les deux positions de l'instrument; les divisions ou le limbe regardant l'orient et ensuite l'occident, cette hauteur doit être exactement la même, si la lunette est bien parallele à la ligne de 90°; mais si l'on trouve 4' de différence entre les deux hauteurs, c'est une preuve qu'il y a deux minutes d'erreur au zénit.

2557. En effet, quand on observe une étoile E (FIG. 205.), le fil-à-plomb étant sur CB, si A est le point de 90°, AB sera la distance de l'étoile au zénit marquée par le quart-de-cercle, et DB sera sa hauteur; si le point A est de 2' trop éloigné de la lunette O, la distance au zénit AB paroîtra trop petite, et la hauteur trop grande; mais quand le quart-de-cercle sera retourné comme dans la fig. 206, le fil-à-plomb tombera sur CE, l'arc AE sera la distance de l'étoile au zénit marquée par le quart-de-cercle; et comme le dernier point de la division des hauteurs où le point A est de 2' trop éloigné de la lunette O, et par conséquent du point E, la distance au zénit AE paroîtra trop grande de 2', par la même raison qu'elle paroissoit trop petite dans la premiere situation où le point A étoit entre la lunette et le fil; ainsi l'on trouvera 4' de plus dans cette distance au zénit que dans la premiere, l'erreur au zénit sera de 2': il faudra ôter ces deux minutes de la hauteur observée dans la premiere situation, et par conséquent de toutes les hauteurs que donne le quart-de-cercle dans sa situation ordinaire. Quand le fil-à-plomb sort des divisions, et se trouve, par exemple, au nord au lieu d'être au midi, l'étoile se trouvant de l'autre côté du zénit, les parties du micrometre doivent changer de signe pour la distance au zénit; ce qui est ordinairement en plus, doit être en sens contraire.

2558. Dans l'exemple précédent, l'erreur est différente de ce qu'elle étoit dans l'article 2552, où il falloit ajouter 2' aux hauteurs prises dans la position ordinaire; c'est une preuve que l'arc total, au lieu

lieu d'être de 90°, est trop petite de 4', puisque le premier point de la division est trop près de la lunette (2552), et que le dernier point en est trop éloigné (2557) ; en conséquence le limbe marque trop, et il faut diminuer toutes les hauteurs et les distances au zénit à proportion de 4' pour 90°, indépendamment de l'erreur constante de 2' additive à toutes les hauteurs, en partant de l'erreur du premier point de la division des hauteurs; mais il faudroit augmenter les hauteurs, si l'on partoit de l'erreur du point de 90°, qui est le plus près de la lunette, c'est-à-dire, qu'on ôtât 2' des hauteurs. On peut aussi reconnoître l'erreur de l'arc total par d'autres moyens (2561); mais il est très bon de le vérifier encore par les deux méthodes précédentes : nous avons cité plusieurs exemples de pareilles erreurs (2180).

Vérification d'un Sextant à deux lunettes.

2559. Le sextant à deux lunettes (fig. 207) tient lieu d'un quart-de-cercle; il est plus léger et plus commode; ce qui fait qu'on le préfere souvent lorsqu'il s'agit de grands instrumens mobiles de 5 ou 6 pieds de rayon; les deux instrumens de 6 pieds qu'avoit la Caille, ceux de Milan et de Vilna, en Pologne, qui ont également 6 pieds, sont aussi des sextans ; c'est ce qui m'oblige à parler de la vérification qui convient à cette espece d'instrumens. Les deux lunettes sont fixes, l'une sur le rayon OC, l'autre à angles droits sur la premiere, comme FG; et l'on est obligé de faire trois vérifications au lieu de deux qu'exigent les quarts-de-cercles.

La premiere vérification d'un sextant ou d'un octant (car il suffit que l'arc ait 45°), se fait comme celle du quart-de-cercle, par le retournement (2556), pour connoître la situation de la lunette verticale CO par rapport au point D (j'appelle lunette verticale celle avec laquelle on observe près du zénit). On vérifie aussi le sextant par le renversement (2552), pour déterminer la position de la lunette horizontale FG, par rapport au même point D; cette opération étant un peu incommode dans les grands instrumens, on se contente de déterminer l'angle des deux lunettes par les étoiles élevées de 45°; mais alors on est obligé de supposer que l'arc de 45° soit rigoureusement exact. Je supposerai que les divisions du sextant commencent au point D, et qu'il y ait 60° au point F : les observations faites à la lunette verticale donneront alors sur le limbe des distances au zénit, et les observations faites à la lunette horizontale donneront des hauteurs.

2560. Le limbe du sextant pouvant se tourner vers l'orient et vers l'occident, l'on observera la hauteur méridienne d'une étoile située vers 45°, avec les deux lunettes et dans les deux situations de l'instrument; toutes les étoiles qui sont entre 40 et 60° de hauteur, peuvent servir à la vérification d'un sextant : pour un octant il faut choisir celles qui sont à 45° de hauteur méridienne, ou environ. Si l'on ne trouve pas exactement une même hauteur de l'étoile par les deux lunettes et dans les deux positions, c'est une preuve que les lunettes ne font pas entre elles un angle droit, comme elles le devroient faire; et l'on aura la différence ou l'erreur à cet égard : mais on connoît l'erreur de la lunette verticale CD par le retournement (2556); on en conclura donc l'erreur de la lunette horizontale FG.

Exemple. Je suppose qu'à Milan, sous 45° 25′ de latitude, on ait observé dans le crépuscule, au mois de mars, la distance de la Chevre au zénit dans le méridien, et qu'on ait trouvé 2′ d'erreur additive pour les distances au zénit : il faut les ôter de toutes les hauteurs qu'on aura observées avec la lunette verticale; c'est l'erreur de cette lunette.

On choisira une étoile, telle que δ d'Orion, qui, sous la latitude de Milan, passe vers 44° de hauteur, 20′ après la Chevre; je suppose qu'avec la lunette verticale on l'ait observé au méridien, le fil-à-plomb marquant 45° 50′, ce qui donne sa hauteur 44° 10′, le limbe étant tourné vers l'orient, et que le lendemain avec la lunette horizontale on ait trouvé cette hauteur de l'étoile 44° 7′, le limbe étant tourné vers l'occident; on sait par la premiere vérification qu'il faut ôter 2′ de toutes les hauteurs observées à la lunette verticale : donc, au lieu de 44° 10′ on a 44° 8′ pour la hauteur exacte; mais la lunette horizontale donne 44° 7′, ou 1′ de moins; donc il faudra ajouter 1′ à toutes les hauteurs observées à la lunette horizontale. C'est ainsi qu'on a l'erreur des deux lunettes, par le moyen de cette double vérification, au zénit et à 45°, en supposant que l'arc est bien exactement de 45°; c'est ce qu'on reconnoîtra par d'autres vérifications (2562). L'angle des deux lunettes est aussi de 90° juste, si l'erreur de la lunette horizontale FG, par rapport au point D, se trouve la même par le renversement (2552) que l'erreur de la lunette verticale OC par le retournement (2556).

Vérifications des Divisions du Quart-de-cercle.

2561. La vérification d'un quart-de-cercle, faite au zénit et à l'horizon, fera connoître la situation de la lunette par rapport au premier

et au dernier point de la division. S'il y a 90° 0′ 0″ de différence, ou si l'erreur se trouve exactement égale dans les deux cas, ce sera une preuve que l'arc de 90° est exact (2558); mais en supposant juste l'arc de 90°, les subdivisions peuvent ne l'être pas ; un observateur exact ne sauroit mettre trop de soin à examiner celles de l'instrument dont il se sert : la Caille nous apprend qu'il l'avoit fait sur les siens (*Astron. fund. pag.* 158. *Mém. acad.* 1751, *pag.* 407).

On peut vérifier les divisions avec un compas à verge, dont les deux pointes soient très fines et munies chacune d'un microscope, ou du moins d'une forte loupe : on prend d'abord avec ce compas la distance du centre au premier point de la division, et l'on voit si cette distance est bien égale sur toute la circonférence; car s'il y a la moindre différence, il faut en tenir compte dans le calcul de la distance des points entre eux. On porte aussi ce rayon depuis le commencement de la division jusqu'à 60°; ce point est un des plus importans, et tous les autres en dépendent : on prend ensuite l'arc de 30° avec le compas à verge, et l'on voit si, étant porté 3 fois sur la circonférence, il tombe exactement sur 60 et sur 90°. Il en est de même des autres subdivisions. Le compas qui porte des verres, sur lesquels on trace des lignes très fines, est fort commode pour ces vérifications (*Boscovich de litter. exped.*).

2562. On vérifie l'arc total avec une croix dont les 4 branches sont de la même longueur que le rayon du quart-de-cercle, et dont le centre tourne autour de celui de l'instrument. Chaque branche porte un petit trait destiné à coïncider avec une des extrémités de l'arc total; et quand les traits pris deux à deux s'accordent parfaitement avec les 90°, on est sûr que l'arc n'est ni trop grand ni trop petit. Il faut employer un microscope pour regarder les divisions, et un micrometre extérieur pour déterminer les petites différences de ces arcs.

2563. Si l'on place ensuite au centre un secteur de 15°, dont le rayon soit égal à celui du quart-de-cercle, et que les extrémités de cet arc comprennent exactement 15° de la circonférence, et cela six fois de suite, les six arcs de 15° se trouvent vérifiés, ou les erreurs en sont connues. Pour vérifier les subdivisions, on marque sur le secteur 10°, 5°, 1°, et on les compare de même aux arcs correspondans du limbe; on peut distinguer un centieme de ligne, qui ne fait pas 2″ sur un instrument de 7 ½ pieds de rayon; et voilà la précision que l'on peut se procurer maintenant dans les observations : on peut s'assurer même de 3″ sur un quart-de-cercle de 3 pieds, si l'on opere plusieurs fois et avec une grande précision. Par

Ssss ij

ce moyen, l'on dresse une table des erreurs de chaque point du limbe, pour en tenir compte dans chaque observation ; cela est essentiel pour un astronome exact. M. Cagnoli, de Vérone, qui a vérifié son quart-de-cercle avec plus de soin et plus de scrupule qu'on n'avoit jamais fait pour aucun instrument, se propose de publier ses moyens en détail, en donnant son catalogue des étoiles boréales. S'il s'agit d'un instrument de 45° seulement, il est possible d'y ajouter une regle qui puisse achever les 90°, afin d'y appliquer la croix qui vérifie les 90°, pour en prendre exactement la moitié. Si l'on s'est assuré que l'angle des deux lunettes est bien exactement de 90°, et qu'on observe avec les deux lunettes une étoile à 45° (2560), on trouvera une différence dont la moitié sera l'erreur de l'arc de 45°. Supposons que l'arc de 45° est trop petit d'une minute, en sorte qu'avec la lunette verticale on trouve une distance au zénit de 45° 0' au lieu de 44° 59'; la lunette horizontale lui étant bien perpendiculaire, sera dirigée ensuite à 45° 1' du zénit, quand le fil-à-plomb sera sur le même point de 45°; on jugera donc la distance au zénit trop petite, au lieu qu'on l'avoit jugée trop grande avec la lunette verticale : la moitié de la différence sera l'erreur de l'arc de 45°.

2564. L'observation des angles sur le terrain (2583) fournit un moyen de vérifier les divisions d'un quart-de-cercle, lorsqu'il a une alidade. On mesure divers angles autour de soi, et mettant toujours l'intersection des axes des lunettes à la même place, ou perpendiculairement au même point du plancher, et changeant, s'il le faut, le pied de l'instrument, pour que les angles aient tous le même sommet : la somme doit faire 360°, si l'on fait le tour de l'horizon, et qu'on réduise tous les angles au plan même de l'horizon (2585); quatre angles de 90°, six de 60, etc. vérifieront respectivement les arcs de 60°, et ainsi des autres. C'est ainsi que Bouguer reconnut qu'il falloit ajouter 20″ à l'arc de 60°, et 30″ à l'arc de 90° dans le quart-de-cercle dont il se servoit au Pérou (*Fig. de la Terre*, *pag.* 62 et 66).

La Condamine (*pag.* 18) nous apprend qu'il vérifia avec succès les divisions de son quart-de-cercle de degré en degré, en plaçant perpendiculairement, à une distance de 500 toises du centre du quart-de-cercle, un cordeau avec des mires en ligne droite à la longueur calculée des tangentes de degré en degré. On se sert aussi d'une vis bien égale et bien vérifiée (2534), avec laquelle on mesure les angles sous lesquels paroît un objet connu à une distance bien mesurée; et l'on voit si le quart-de-cercle donne les mêmes angles.

2565. Passement a proposé un moyen par lequel on pourroit corriger très exactement les plus petites erreurs de la division du

limbe quand elles sont faites par des points. Ce moyen consiste à placer les points de divisions excentriquement sur des vis de cuivre qui soient bien au niveau du limbe, mais auxquelles on puisse donner un petit mouvement sur leur axe, aussitôt qu'on aura reconnu, par les moyens précédens, qu'un des points n'est pas tout-à-fait à une juste distance du commencement de la division. (*Hist. acad.* 1746).

2566. Le duc de Chaulnes (mort en 1769) a donné, dans la Collection des arts de l'académie, des méthodes ingénieuses pour diviser des quarts-de-cercles au microscope et à la machine, c'est-à-dire avec une grande plate-forme, beaucoup plus exactement qu'on ne l'a jamais fait; il avoit construit avec ces principes un quart-de-cercle d'un pied, qui donnoit à-peu-près la même précision que les instrumens ordinaires de 6 pieds (*Mém. acad.* 1765): ce quart-de-cercle a passé entre les mains de M. le prince de Conti. M. le chevalier de Borda a fait faire, en 1786, des cercles d'un pied de diametre, avec lesquels on obtient sur le terrain une précision de 2″, en multipliant les observations pour compenser les erreurs de la division.

Corrections à faire dans les Hauteurs observées.

2567. Le fil horizontal d'une lunette, quoiqu'il soit réellement une ligne droite parallele à l'horizon, ne répond pas dans le ciel à des points qui soient à même hauteur. Soit Z le zénit (FIG. 208), ZA le vertical qui passe au centre de la lunette, ZB le vertical qui passe en B par le bord de la lunette; dans le triangle sphérique ZAB, rectangle en A, l'hypoténuse ZB est plus grande que le côté ZA; donc un astre qui paroîtra sur le milieu du fil en A, sera plus près du zénit ou plus élevé au-dessus de l'horizon que l'astre qui paroîtra sur le même fil au point B. Le fil AB est dans le plan d'un grand cercle qui passe par notre œil, et qui est incliné à l'horizon autant que la lunette dans laquelle on regarde [a]; ce plan n'est point celui d'un almicantarat (185) ou d'un petit cercle parallele à l'horizon; c'est pourquoi les points A et B ne sont point à des hauteurs égales sur les verticaux ZA et ZB.

Le point de la division d'un quart-de-cercle, indiqué par le fil-à-plomb, marque la hauteur du point A, qui est le milieu de la lunette; si l'on a observé un astre, et mesuré sa hauteur lorsqu'il étoit au

(a) En effet nous sommes au centre de tous les grands cercles de la sphere, et non au centre des petits cercles; ainsi les arcs de grands cercles nous paroissent nécessairement des lignes droites; donc les lignes droites nous paroissent des arcs de grands cercles.

point B du fil, le quart-de-cercle n'indiquant que la hauteur du point A, il faudra en retrancher la quantité dont le point B est plus bas que le point A, ou dont l'hypoténuse ZB est plus grande que ZA, pour avoir la hauteur du point B. Je démontrerai que, dans un triangle sphérique rectangle AZB, dont l'angle Z est très petit, aussi bien que le côté AB, l'excès de l'hypoténuse BZ sur le côté ZA est égal à $\frac{AB^2 \text{ cotang. } ZA}{2.57^\circ}$, c'est-à-dire la moitié du carré de la distance au centre de la lunette, exprimée en secondes, multipliée par la tangente de la hauteur, et divisée par le nombre de secondes que contient l'arc de 57° égal au rayon (*Mém. acad.* 1757) : on trouvera la table de cette déviation du fil horizontal d'un quart-de-cercle, à la suite des tables du Soleil.

Dans le solstice d'été, où la hauteur du Soleil à Paris est de 65°, si on l'observoit sur le bord d'une lunette dont la moitié du champ eût 40′, il faudroit retrancher 30″ de la hauteur indiquée par le quart-de-cercle, pour avoir la hauteur réelle du Soleil au moment de l'observation : la correction est différente, si l'on ne veut que la hauteur méridienne (2571).

2568. Par la même raison, un astre observé dans le méridien ne doit pas suivre exactement le fil horizontal du quart-de-cercle, à moins que l'astre ne soit dans l'équateur. En effet, puisque le fil horizontal d'une lunette placée dans le méridien est dirigé dans le plan d'un grand cercle AFB (FIG. 209), et non pas dans celui d'un parallele diurne, tel que AGD, il en résulte nécessairement que l'astre observé dans le méridien, et qui passe au point A sur le milieu du fil de la lunette, ne suivra pas le fil AF, et qu'il s'élevera de la quantité FG ; mais PA = PG ; donc la différence FG entre l'hypoténuse PF et le côté PA ou PG est $\frac{AF^2 \text{ cot. } AP}{2.57^\circ}$ ou $\frac{AF^2 \text{ tang. déclin.}}{2.57^\circ}$, ou $\frac{\frac{1}{2} P^2 \text{ sin. } 2AP}{2.57^\circ}$. C'est la quantité dont un astre, si sa déclinaison est boréale, paroît s'élever dans la lunette [a] après avoir passé le méridien, comme si la hauteur méridienne n'étoit pas la plus grande de toutes ; cette espece de paradoxe fut observée par Cassini (*Figure de la Terre*, 1718, *pag.* 225) ; et il est certain que l'astre s'éleva au-dessus du fil : pour s'appercevoir qu'il a réellement baissé, il faudroit mouvoir l'instrument, et diriger sur l'astre le centre de la lunette.

2569. Les observations des hauteurs méridiennes, quand elles ne sont pas faites exactement dans le méridien, exigent deux considérations qui se rapportent à la même formule : supposons d'abord

(a) C'est le contraire, si la lunette renverse les objets.

qu'un astre ait été observé à quelque distance du méridien, mais au centre même de la lunette ; il ne s'agit alors que de trouver le changement de hauteur que le Soleil a éprouvé depuis son passage au méridien. Soit SH (FIG. 212) la hauteur méridienne du Soleil, SL le parallele qu'il décrit, SBC un arc de grand cercle perpendiculaire au méridien ZSH. Supposons L le point où étoit le Soleil quand on a observé sa hauteur après son passage au méridien, SM une portion de l'almicantarat, ou un arc dont tous les points S et N ont la même hauteur au-dessus de l'horizon ; si l'on fait l'arc SB $= m$; SH $=$ H, la quantité BM, dont le point B du grand cercle SBC est plus bas que le point M ou le point S, est égale à $\frac{m^2 \text{ tang. H}}{2.\ 57^\circ}$ (2567); mais le point L du parallele à l'équateur est plus méridional que le point B, dans le cas de la figure 212, parceque le parallele à l'équateur SL s'écarte du grand cercle SBC de la quantité $\frac{m^2 \text{ tang. décl.}}{2.\ 57^\circ.}$ (2568) : ainsi ML est $\frac{m^2}{2.\ 57^\circ.}$ (tang. Haut. $+$ tang. Déclin.); le signe deviendra négatif pour les déclinaisons boréales.

2570. C'est ordinairement en temps, et non pas en degrés, que la quantité m se présente ; il faut alors réduire le temps en minutes de degrés à raison de 15° par heure, ou de 15° 2′ si c'est une étoile; on les multiplie encore par le cosinus de la déclinaison, afin d'avoir l'arc SB ou la valeur de m : ainsi l'on a $(15t)^2 \cos.^2$ déclin, au lieu de m^2; alors ML $= \frac{\overline{15t \cos. D}^2}{2\ 57^\circ.}$ (tang. H $\mp$ tang. D) $= \frac{\overline{15t \cos. D}^2 \sin. (H \mp D)}{2.\ 57. \cos. H \cos. D}$ (3842) $= \frac{\overline{15t}^2 \cos. D \sin. (H \mp D)}{2.\ 57 \cos. H} = \frac{225\, tt \cos. D \sin. (H \mp D)}{2.\ 57^\circ. \cos. H} = \frac{112,5\, tt \cos. D \sin. (H \mp D)}{57^\circ. \cos. H}$ $= \frac{A\, tt \cos. D \sin. (H \mp D)}{\cos. H}$, en faisant $A = \frac{112,5}{57^\circ}$ (2574). Supposons une planete ayant 65° de hauteur à Paris, et 23° 50′ de déclinaison boréale, observée 4′ après son passage au méridien, on fera le calcul ci-joint, par lequel on trouve qu'il faut ajouter 45″ à la hauteur observée pour avoir la hauteur à midi. On trouveroit la même chose par le calcul trigonométrique ; mais l'opération seroit plus longue et moins exacte, du moins pour un très petit intervalle.

Cette valeur se réduit encore à $\frac{A\, tt \cos. D \cos. \text{lat.}}{\cos. H}$, parceque H $\mp$ D est la hauteur de l'équateur.

Log. 112,5.	2.051153
Comp. 57°.	4.685575
Log. constant A . . .	6.736728
2 log. t = 4′.	4.760422
Cos. 23° 50′	9.961290
Compl. cos. 65. 0	0.374052
H—D. . . 41. 10 sin.	9.818392
44″, 76. . . .	1.650884

Cette formule n'a lieu que quand on observe dans le milieu même de la lunette, mais que le quart-de-cercle est un peu hors du méridien. M. d'Agelet m'a donné une table pour le solstice à Paris (*Conn. des temps*, 1784, *pag.* 191), et l'on s'en sert pour avoir un grand nombre de fois la hauteur solsticiale du Soleil. On en trouvera une plus abrégée, mais plus générale, à la suite des Tables du Soleil, *pag.* 41, et avec un peu plus d'étendue dans la Connoissance des temps de 1791; je l'ai faite pour engager les astronomes à ne pas négliger d'observer plusieurs fils à la lunette des passages, sauf à ne mesurer la hauteur méridienne que 2 ou 3 minutes après le passage; celui-ci est absolument indifférent au moyen de ma table de réduction, pourvu que l'on marque à-peu-près le moment où l'on a pris la hauteur, et à quel point de la lunette; car il y a une autre correction à faire quand on n'a pas observé au milieu de la lunette.

2571. Quand le centre des fils et le limbe de l'instrument sont exactement dans le méridien, et qu'on veut avoir la hauteur méridienne, par le moyen de la hauteur observée au bord de la lunette, on n'a besoin que de la seconde partie de la formule 2569 ou de l'art. 2568; et la derniere formule se réduit à A *tt* cos. D sin. D, en ne tenant pas compte de H, cela feroit 11″6 dans l'exemple précédent. Ce cas a lieu quand on se sert d'un quart-de-cercle qui est exactement dans le méridien, et qu'on mesure la hauteur avant ou après le passage au milieu ou au méridien; parcequ'alors on cherche la hauteur, non pour le moment de l'observation, mais pour celui du passage au milieu, c'est-à-dire la hauteur méridienne. La correction est nulle pour un astre situé dans l'équateur, parcequ'alors il suit exactement le fil de la lunette, et paroît toujours, même au bord de la lunette, à la hauteur indiquée par le centre des fils, et par ses divisions du quart-de-cercle, quoique l'astre ait changé de hauteur. On peut se servir, dans ce cas, de la premiere table, en mettant *déclinaison* au lieu de hauteur, et se servant des minutes de degré qui répondent au temps écoulé depuis le passage, au centre de la lunette.

2572. Il est important, dans les observations délicates, et surtout dans les grands secteurs (2380), de mettre la lunette exactement parallele au plan qui passe par le centre de la suspension, et par le limbe; pour y parvenir on se sert de la lunette d'épreuve (2503), on la place sur une regle bien droite, qui va au centre au limbe de l'instrument: on la dirige sur un objet terrestre fort éloigné; et si la lunette de l'instrument se trouve pointée sur le même objet, on est sûr qu'elle est parallele au limbe. On peut

peut aussi appliquer la lunette d'épreuve sur le dos de l'alidade, ou de la lunette de l'instrument, c'est-à-dire sur la partie qui est destinée à porter sur le limbe et sur la platine du centre : les deux lunettes ainsi adossées, doivent répondre au même objet, si l'axe optique de l'alidade est bien parallele à la surface qui doit s'appliquer à l'instrument. On est obligé communément d'employer pour cette vérification deux mires, dont l'une soit un peu plus élevée que l'autre, de la même quantité que la lunette d'épreuve est plus élevée que la lunette fixe, et l'on dirige alors la lunette la plus haute sur la mire qui est aussi la plus élevée.

J'expliquerai ci-après une autre méthode par le retournement (2575, 2594).

Bouguer et la Condamine ont traité fort au long de l'importance du parallélisme des lunettes dans les grands secteurs, et des erreurs qui peuvent résulter du défaut de ce parallélisme ; la formule employée ci-dessus (2567) donne un moyen très simple d'assigner les quantités de ces erreurs dans les deux cas principaux.

2573. Soit P le pole (FIG. 210), PE le méridien, dans lequel on ait placé un instrument avec tout le soin convenable, au moyen d'une méridienne filaire (2579) : soit ED la quantité dont la lunette s'écarte du plan parallele au limbe, ou du plan EP que je suppose le plan du limbe ou le plan du méridien ; alors l'axe de la lunette est dirigé vers un point D du ciel, tandis que le limbe est dirigé vers un point E ; soit DE la perpendiculaire abaissée sur le limbe ; elle tombe au point E, et le point E du limbe est celui auquel on rapporte l'astre observé en D, lorsqu'il étoit au milieu de la lunette ; car dans la vérification au zénit (2556), on fait en sorte que la lunette dans les deux positions en D et en G, donne la même hauteur (et par conséquent la même distance au pole), ou que PD soit égale à PG : or le point E de l'instrument auquel répond une étoile observée en D et en G, ne peut être le même, sans que la ligne DEG soit perpendiculaire en E, sur le plan de l'instrument. Ayant pris PF=PD [a], on aura EF pour l'erreur commise dans la distance de l'astre D au pole, et cette erreur $= \frac{ED^2 \cot. PE}{2. 57^\circ}$ (2567). Ainsi l'erreur est comme la tangente de la déclinaison de l'astre. Elle deviendroit extrême-

(a) On ne part pas du zénit, parceque ce n'est pas ZD que l'on a besoin de connoître, c'est ZE ou PE. L'arc ZD exprime une distance du zénit qui est erronée, hors du méridien, et qui nous est inutile.

ment considérable si l'on observoit un astre très près du pole; mais cela n'arrive jamais : ainsi l'erreur qui résulte d'un petit défaut de parallélisme, qui ne seroit que de 5 à 6′ de degré, est tout-à-fait insensible dans les observations qu'on a coutume de faire, sur-tout près du zénit.

2574. Il y a cependant un autre cas qui a peut-être souvent eu lieu parmi les astronomes, et dans lequel l'erreur est beaucoup plus grande. Je suppose que l'on connoisse bien la marche de l'horloge, et le temps vrai du passage d'un astre au méridien; au moment où l'on sait qu'il y passe, on dirige la lunette au point E du méridien (FIG. 211); mais la lunette s'écarte du limbe de la quantité EH; ainsi le limbe se trouvera placé dans le vertical ZH; je dis dans le vertical, parcequ'au moyen du fil-à-plomb le limbe est toujours vertical : ayant donc élevé la perpendiculaire NEH sur le méridien ZEK, le point H du vertical ou du plan de l'instrument sera celui où l'on rapportera la hauteur observée; ayant pris ZK $=$ ZH, l'erreur sera $= KE = \frac{EH^2 \cot. ZE}{2 \cdot 57^\circ}$. Ainsi cette erreur augmente comme la tangente de la hauteur; elle peut donc devenir considérablement plus grande que celle qui avoit lieu dans le premier cas (2573), parcequ'il est très ordinaire d'observer des astres près du zénit, où la tangente de la hauteur est presque infinie. L'on voit par là combien il importe de placer dans le méridien du limbe, et non pas la lunette (2598), lorsqu'on a quelque doute sur leur parallélisme; ce qui fait la nécessité des méridiennes filaires dans ce cas-là (2579).

2575. Pour faire la vérification du parallélisme sur un quart-de-cercle mobile, on peut se servir du cercle azimutal, en dirigeant la lunette au nord, et ensuite au midi : si les étoiles y passent au même instant qu'elles doivent passer au méridien, d'après des hauteurs correspondantes, c'est une preuve que la lunette est parallele au limbe, en supposant le cercle azimutal bien divisé.

2576. Caler un quart-de-cercle mobile, c'est le rendre droit ou vertical dans tous les sens, et le placer à une hauteur donnée. Il faut non seulement que le fil-à-plomb tombe exactement sur le point de la division, mais il faut que le fil soit un peu en l'air et ne frotte pas sur le limbe : on se sert pour cela des vis du pied (FIG. 149). Pour être sûr que le fil-à-plomb n'est arrêté par aucun obstacle, aucune glutinosité, l'on a soin de lui faire faire quelques oscillations perpendiculaires au plan du limbe; et s'il revient battre exactement sur le même point, on est rassuré

à cet égard. Il faut rendre le plomb aussi pesant qu'il est possible, c'est-à-dire, lui donner toute la masse que le fil est capable de supporter. Quelquefois on fait tremper le poids dans l'eau, afin que les oscillations soient plutôt arrêtées, et qu'on puisse s'assurer à plusieurs reprises que le fil est exactement sur le point (2314).

2577. Si l'on n'a pas une voûte ou un plancher très solide pour asseoir un quart-de-cercle, il est fort à craindre qu'en allant du fil-à-plomb à la lunette, on ne fasse incliner le plancher: cela causeroit dans l'observation une erreur, dont un astronome qui observeroit seul ne pourroit s'appercevoir. Pour y remédier, il faudroit avoir autour du quart-de-cercle un faux plancher, sur lequel on marcheroit, qui ne dépendant point de celui où poseroit l'instrument, ne causeroit aucun dérangement dans sa situation : alors on dépendroit moins de la solidité du bâtiment.

2578. Lorsqu'on veut observer des hauteurs correspondantes, on commence par diriger le quart-de-cercle vers le Soleil, et le caler en tous sens, de maniere que le fil-à-plomb ne fasse que raser le limbe, y touchant à peine, lors même que l'on fait tourner le plan de l'instrument sur son axe, (2576). On dirige la lunette au Soleil, et l'on fait en sorte que le Soleil paroisse à droite et en haut de la lunette, par exemple en S (FIG. 135); car le Soleil, qui monte réellement, paroît descendre dans la lunette. En attendant que le bord du Soleil soit descendu sur le fil horizontal ED, l'on va au fil-à-plomb, que l'on regarde au travers des microscopes (2314); s'il ne répond pas exactement sur un des points marqués de dix en dix minutes, on donne au limbe un petit mouvement avec la verge de rappel, ou avec les vis du pied, si l'on n'a point de verge de rappel ; et l'on fait venir le fil exactement sur le point. Alors on retourne à la lunette, et l'on attend que le premier bord du Soleil vienne toucher le bord supérieur du fil horizontal ED : on compte les secondes, et l'on a l'heure, la minute et la seconde, où le bord du Soleil s'est trouvé à la hauteur qui est marquée sur le limbe par le fil-à-plomb (921).

Après midi l'on dirige encore la lunette au Soleil dans le temps qu'il approche de la hauteur où il a été observé le matin ; on met alors le Soleil à la droite du centre de la lunette et au-dessous du fil horizontal, c'est-à-dire, en G ; et comme le Soleil paroît monter après midi de G en C dans la lunette, on a le temps, avant que le dernier bord parvienne au fil horizontal ED, d'ajuster

le fil-à-plomb sur le même point, c'est-à-dire sur la même dizaine de minutes où l'on a observé le matin. Quand le fil est bien placé, l'on retourne à la lunette, on compte l'heure, la minute et la seconde où le bord du Soleil qu'on a observé le matin (par exemple le bord supérieur, qui paroît inférieur dans la lunette) arrive au fil horizontal.

2579. La méthode des hauteurs correspondantes sert à placer dans le plan du méridien un mural (2588), une lunette méridienne (2604); elle sert aussi à tracer les méridiennes filaires dont il est absolument nécessaire de se servir quand on observe avec de grands secteurs (2574, 2598). Pour tracer une méridienne filaire, on perce un trou dans le volet d'une fenêtre ou dans une plaque de métal fixée dans le mur; on tend un fil du centre du trou jusqu'à l'autre extrémité de la chambre, à-peu-près dans la direction de la méridienne; on abaisse des aplombs de divers points de ce fil, et l'on tend un cheveu ou un fil très fin le long de ces aplombs, sur deux tasseaux de fer scellés aux deux extrémités de la chambre; on est assuré par les aplombs que le fil se dirige vers le pied du gnomon, c'est-à-dire qu'il passe sous la perpendiculaire du trou: pour s'assurer que ce fil est aussi dans le méridien, on obscurcira la chambre; l'on observera l'heure, la minute et la seconde où les deux bords de l'image du Soleil arrivent au fil, et l'on en conclura le passage du centre du Soleil à cette méridienne filaire: les hauteurs correspondantes prises le même jour (920, 2578) apprendront si le midi vrai est d'accord avec celui que donne la méridienne; s'il ne l'est pas, on changera la position du fil d'une quantité qui sera facile à reconnoître, par le chemin que fait à chaque minute l'image du Soleil sur le pavé. Quand ce fil sera bien placé, il faudra rendre le plan de l'instrument parallele à ce fil, pour être sûr qu'il est bien dans le méridien.

2580. Les hauteurs correspondantes donnent le moyen de comparer une planete à une étoile fixe, et par là de déterminer la position de la planete. Lorsqu'on ne peut absolument comparer un astre avec des étoiles dont la position soit connue, il reste encore un moyen pour en déterminer l'ascension droite; il est moins exact et plus long à calculer; mais c'est alors le seul qui soit possible d'employer. Ce moyen consiste à observer des hauteurs avec le quart-de-cercle: chacune de ces hauteurs, jointe avec le temps vrai, détermine l'ascension droite, si l'on suppose la déclinaison connue, de même qu'elle donnoit le temps vrai, quand l'ascension

droite étoit connue (1034). Si l'on prend deux hauteurs à quelque distance, elles déterminent à la fois l'ascension droite et la déclinaison de l'astre (3991); cette méthode seroit utile pour les cometes (3218), et pour trouver les latitudes en mer (3991). Il seroit à souhaiter que les voyageurs qui sont revenus des pays inconnus, eussent fait seulement sur la Lune de pareilles observations, pour déterminer les longitudes; mais le calcul en est trop long, pour qu'on doive employer ce moyen pour déterminer la position d'un astre, quand on en peut choisir d'autres. D'ailleurs cette méthode ne peut donner l'ascension droite et la déclinaison tout à la fois que dans la sphere très oblique; et la précision qu'elle donne pour l'ascension droite est toujours aux dépens de celle qu'on pourroit desirer sur la déclinaison : mais en prenant deux hauteurs, dont l'une soit près du méridien, et l'autre près du premier vertical (946), on trouve avec plus de précision et l'ascension droite et la déclinaison.

2581. Les déclinaisons des astres se déterminent directement par les hauteurs méridiennes, et ce sont les observations les plus fréquentes et les plus utiles pour cet objet; mais il faut apporter dans ces observations toutes les attentions dont nous avons parlé ci-devant (2576 et suiv.). Il faut y appliquer les corrections des art. 2569 et 2571, si cela est nécessaire; celle de l'erreur de l'instrument (2556); celles de la parallaxe et de la réfraction (Liv. IX et XII). On doit aussi avoir égard à l'épaisseur des fils (2535) : si en observant la hauteur méridienne du bord d'une planete, on s'est servi du bord supérieur du fil, on doit retrancher de la hauteur observée la demi-épaisseur du fil. Enfin, on doit employer le diametre du Soleil tel qu'il paroît dans la lunette dont on se sert (1395). Voici un exemple dans lequel j'ai rassemblé toutes ces corrections.

2582. EXEMPLE. Le 22 mars 1752, j'observai à Berlin la distance du bord supérieur du Soleil au zénit, 51° 20′ 36″, en faisant toucher le bord supérieur du fil au bord du Soleil, qui paroissoit en bas; il faut en ôter 18″ pour l'erreur du quart-de-cercle, trouvée par le retournement (2556); ajouter 3″ pour la demi-épaisseur du fil; ajouter 1′ 22″ pour la réfraction, ôter 7″ pour la parallaxe du Soleil; ajouter 16′ 5″ pour le demi-diametre du Soleil; et l'on a enfin pour la vraie distance du centre du Soleil au zenit 51° 37′ 33″ : il faut la retrancher de la distance du zénit à l'équateur, ou de la hauteur du pole que j'ai trouvée de 52° 31′ 30″, en tenant compte de l'erreur des divisions

(2561), et l'on a la vraie déclinaison du centre du Soleil 0° 53' 57", comme je l'ai employée (854).

2583. Lorsqu'on emploie le quart-de-cercle à mesurer des angles sur le terrain (2655), on doit avoir quelques attentions particulieres, qui sont expliquées dans les livres faits sur la mesure de la terre, (voyez Bouguer, la Condamine, Maupertuis, Boscovich, Liesganig, et la Trigonométrie de M. Cagnoli).

La premiere attention consiste à diriger l'alidade ou lunette mobile, aussi bien que la lunette fixe, vers un même objet, pour reconnoître si elles sont bien paralleles, quand l'alidade est sur le commencement de la division; dans le cas où elles ne seroient pas paralleles, on examineroit avec le micrometre combien de minutes ou de secondes il y a de différence; et ce seroit la quantité constante qu'il faudroit ajouter à toutes les distances observées, si l'index de l'alidade s'est trouvé hors des divisions du limbe dans la vérification qu'on en a faite; ou soustraire, si l'index s'est trouvé au-dedans du commencement de la division du quart-de-cercle.

La seconde attention est d'examiner si l'alidade tourne bien concentriquement à la circonférence, et si elle ne sort point des divisions un peu plus dans un point que dans l'autre; Bouguer ayant trouvé dans son quart-de-cercle un semblable défaut, explique dans son livre la maniere d'en tenir compte dans le calcul.

La troisieme est une attention nécessaire pour disposer promptement un quart-de-cercle dans le plan des deux objets dont on veut mesurer la distance: Tycho-Brahé faisoit tourner les siens sur un genou, comme dans la FIG. 178, à la maniere de nos télescopes et de nos graphometres ordinaires; Flamsteed se servoit du mouvement parallatique (FIG. 148): on peut aussi incliner le plan du quart-de-cercle par les vis du pied, pour le mettre dans le plan des deux objets, quand il n'y a qu'une petite inclinaison; mais le double genou (FIG. 153, 169), est le moyen le plus commode et le plus général pour mettre promptement le quart-de-cercle dans le plan des deux objets.

2584. On imagine une ligne droite qui passe par les deux astres ou par les deux objets dont on veut mesurer la distance, et qui aille rencontrer l'horizon; on dirige vers ce point de l'horizon la piece horizontale du double genou, c'est-à-dire la piece *a b* (FIG. 169); ou, si l'on est maître d'incliner le pied de l'instrument, l'on dirige le double genou vers un point quelconque de cette ligne qui joint les deux objets; alors on fait incliner très

aisément à droite ou à gauche le plan du quart-de-cercle qui est parallele à *ab*, pour le mettre dans le plan des deux objets (Bouguer, *pag.* 77). Le P. Pezenas a donné une autre construction de genou, propre à mesurer les angles dans des plans inclinés, (*Opt. de Smith*, *II*, 511).

2585. La quatrieme attention qu'exige la mesure des angles sur le terrain, est de réduire à l'horizon les distances des objets terrestres qui sont au-dessus ou au-dessous de l'horizon. Soit Z le zénit (FIG. 213), HO l'horizon, AB la distance observée entre deux objets dont les hauteurs sont AH et BO; dans le triangle ZAB, l'on connoît les trois côtés, on calculera l'angle Z qui mesure l'arc HO de l'horizon; c'est la distance horizontale que l'on cherche, et c'est celle dont on est obligé de faire usage quand on détermine une distance par la trigonométrie, comme dans les opérations de la figure de la Terre (2655).

On évite cette réduction quand on a un THÉODOLITE (a), c'est-à-dire un cercle entier qui porte deux lunettes, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de son plan, chacun tournant sur un axe horizontal comme la lunette méridienne. Le plus beau théodolite que l'on ait jamais fait est celui de trois pieds de diametre, exécuté par M. Ramsden pour les triangles d'Angleterre, et avec lequel M. le général Roy étoit toujours sûr d'une seconde dans la mesure des angles réduits à l'horizon. M. Méchain a éprouvé à cette occasion qu'avec un cercle d'un pied de diametre on peut s'assurer de 2″, en répétant la mesure du même angle sur plusieurs parties du même cercle (*Mém. de l'acad.* 1788). M. de Borda a donné un très bon ouvrage sur l'usage du cercle entier (4175). M. le Gendre a donné un mémoire utile sur ces sortes de mesures géodésiques (*Mém. acad.* 1787).

2586. Les angles observés sur le terrain ont ordinairement besoin d'être réduits au centre de la station où l'on observe : on se place à côté d'un signal, ou à une fenêtre de clocher; et il est nécessaire de trouver quel seroit l'angle observé, si l'on étoit au centre même du signal ou sous la pointe du clocher : cela n'exige que la résolution d'un triangle. La Grive fit imprimer, en 1754, dans son *Manuel de trigonométrie*, des tables de réductions qui sont très commodes pour ces sortes d'opérations; M. Dupain de Montesson a donné des tables pareilles dans son *Nouveau Traité, ou supplément de trigonométrie*, 1773, in-8°; les deux ouvrages ne se trouvent plus; mais on réimprime actuellement celui de M. Dupain.

(a) Θεάω, *specto*; ὁδὸς, *via*.

2587. L'on ne doit observer les signaux, s'il est possible, que quand ils sont dans l'ombre, et pointer à leur milieu, comme au point qui est le moins sujet à changer par les accidens de lumiere; c'est une attention importante. On en trouvera plusieurs autres dans les livres que j'ai cités (2583).

Des Observations que l'on fait au Quart-de-cercle mural.

2588. De tous les instrumens d'astronomie, le Mural (FIG. 155), est le plus commode; mais il est le plus difficile à bien faire, et le plus dispendieux. Les passages des astres par le méridien s'observent au mural, à défaut de lunette méridienne (2387); mais il faut connoître la déviation ou l'erreur du mural à différentes hauteurs, par le moyen des hauteurs correspondantes du Soleil ou des étoiles prises à différentes déclinaisons; car il est presque impossible que le limbe d'un grand quart-de-cercle soit assez bien dressé pour qu'il puisse être, à 2″ de temps ou à 3″ près, dans le méridien à toutes les hauteurs: par exemple, l'erreur du mural de la Hire étoit — 15″ à 18° de hauteur, et à 65° elle étoit + 16″ (1525).

Flamsteed ayant fait faire en 1688 un arc mural de 6 ¾ pieds de rayon, se servit des hauteurs correspondantes du Soleil, à l'exemple de la Hire, pour déterminer en 1690 les erreurs de son mural; à 60° de hauteur, il falloit ajouter 33″ aux temps observés, pour avoir les véritables passages au méridien; mais il ne prenoit point de hauteurs correspondantes d'étoiles; il se servoit des distances observées avec son sextant entre différentes étoiles, pour trouver les ascensions droites de celles qui passoient trop haut ou trop bas; ce fut par le moyen de ces ascensions droites qu'il détermina les erreurs de son mural, depuis le tropique du Cancer jusqu'à l'étoile polaire; cela eût été plus facile par les hauteurs correspondantes (921, 2578).

2589. Il est nécessaire de vérifier un mural au zénit et à l'horizon, aussi bien que tout autre instrument (2556). Je fis élever à Berlin, en 1751, sur les deux façades de l'observatoire, deux grandes pierres, l'une au nord et l'autre au midi, sur lesquelles je plaçai alternativement le mural dont je me servois; et par là je me procurai la vérification par le retournement (2556): mais on n'a pas toujours d'aussi grandes facilités. Le roi de Prusse, qui daignoit prendre intérêt à ces observations, en avoit applani tous les obstacles.

Pour

Pour se procurer une semblable vérification, M. le Monnier a fait placer en 1753 à Paris, le même quart-de-cercle sur un grand bloc de marbre, et celui-ci tourne sur un boulet de canon. Dans le mural de l'école militaire placé en 1788, M. Prévot a fait faire une machine commode pour le transporter d'une face du mur à l'autre ; ce transporteur est composé de plusieurs regles bien dressées qui glissent les unes sur les autres ; un arbre vertical qui tourne à l'extrémité du mur porte un bras horizontal en équerre, auquel sont attachées des regles qui reçoivent le quart-de-cercle, et l'arbre en tournant le présente à l'autre face sur laquelle on le fait glisser également.

2590. Celui de milord Marlborough à Blenheim, est sur un axe vertical qui donne le moyen de le retourner bien plus facilement et plus exactement. Ce bel instrument, fait en 1785, le chef-d'œuvre de M. Ramsden, a six pieds de rayon ; il est porté en avant et à la distance d'un pied de quatre colonnes de cuivre espacées de vingt pouces ; il y a de l'autre côté un contre-poids vers le centre de gravité, et deux autres, l'un vers le centre du mural, l'autre vers l'extrémité du rayon horizontal. Les quatre colonnes sont assemblées en haut et en bas par deux gros pivots autour desquels tourne la machine ; le pivot supérieur a un mouvement par deux tringles horizontales qui sont au plancher, et il est tenu par deux montans très solides. Un long bras de cuivre qui part de l'axe est arrêté dans le méridien entre deux vis, et se leve à charniere quand on veut retourner l'instrument.

La lumiere de la lanterne qui éclaire l'objectif est réunie par une lentille, et réfléchie par deux miroirs jusque sur la division. On ouvre la lunette et l'on tourne le miroir d'en haut par des ficelles : un oculaire prismatique sert pour observer de côté si c'est à de grandes hauteurs. Le fil-à-plomb est par derriere pour ne point embarrasser la division ; il est suspendu sur deux points, mais celui d'en haut est vu à la hauteur de l'œil, par le moyen d'un miroir et de deux lentilles, et on le change de place par une tringle qui descend vis-à-vis de la main. La verge de suspension est mobile sur un levier, pour qu'on éleve plus facilement l'instrument. Enfin tous les genres de perfections, d'inventions et de facilités sont réunis dans ce mural de Blenheim : il n'en existe point d'aussi complet ; et avant que M. Ramsden se fût déterminé à faire des cercles entiers (2333), il étoit impossible de sauver mieux tous les inconvénients du quart-de-cercle. Le plan est par-tout dans le méridien à la seconde : M. Ramsden

y a employé toutes les ressources du talent extraordinaire qu'on lui connoît.

2591. Flamsteed voulant trouver le commencement de la division, dans son mural (2327), conjointement avec Sharp, se servit d'un moyen fort analogue à celui que nous employons pour vérifier les instrumens mobiles : ayant disposé la lunette verticalement, il suspendit du centre sur l'index qui étoit porté par la lunette, un fil-à-plomb, et il observa ainsi plusieurs jours de suite le passage de la belle étoile qui est à la tête du dragon ; tandis que Sharp marquoit sur l'index de la lunette le point où battoit le fil-à-plomb. Il transporta ensuite le centre et la lunette de son mural sur un mur opposé, et il les ajusta convenablement avec le fil-à-plomb ; la lunette ou la surface de l'index regardoit alors l'occident, au lieu de regarder l'orient, comme dans l'opération précédente, où la lunette étoit placée sur l'instrument ; elle faisoit alors comme un secteur à part, qui se trouvoit retourné. On observa dans cette nouvelle position la même étoile, et l'on marqua sur l'index le point du fil-à-plomb ; le milieu entre les deux points marqués sur l'index dans les deux positions de l'instrument, étoit le véritable point où devoit battre le fil-à-plomb, en supposant l'axe optique de la lunette exactement dirigé vers le zénit ; ayant donc remis la lunette sur l'instrument, on fit venir le fil-à-plomb sur ce point du milieu, et dans cet état on marqua sur le limbe le point correspondant, c'étoit le premier point de la division, celui d'où devoient commencer les révolutions de la vis qui engrenoit dans la circonférence, et les divisions qui étoient sur le limbe (*Proleg. pag.* 110). Flamsteed continua de faire pendant les années suivantes cette même vérification, et avec d'autant plus de soin qu'il s'apperçut que l'erreur alloit en augmentant d'une année à l'autre, parceque la situation de son mural n'étoit pas assez fixe.

2592. On ne peut vérifier un mural à l'horizon par le renversement (2552) ; l'opération seroit trop embarrassante, et la flexion des barres seroit trop à craindre dans deux états aussi différens que ceux des figures 203 et 204 ; mais on peut le vérifier en place par le moyen d'un excellent niveau (2399), de la maniere suivante. La lunette du mural porte vers ses deux extrémités en L et en M (FIG. 155), deux tasseaux dont les bords extérieurs forment une ligne exactement parallele à la ligne de foi, ou à l'axe optique de la lunette ; ce qui se peut vérifier par la lunette d'épreuve (2503) ; on place la lunette LM parallèlement au rayon

LB de l'instrument en l'arrêtant sur le premier point de la division en B. Je suppose qu'on ait une grande regle fort épaisse (FIG. 154), et garnie de deux pieds Y, Z, on pose les pieds de cette regle sur les deux tasseaux L et M de la lunette, et le niveau sur la regle; ensuite retournant la regle et le niveau, on apperçoit facilement si la lunette est parfaitement horizontale, et les divisions font connoître la quantité dont il s'en manque ou dont il a fallu incliner la lunette pour que la regle et le niveau retournés dans tous les sens, eussent toujours exactement la même situation. Je suppose un niveau assez parfait pour que 1″ ou 2″ y soient sensibles (2399); mais Bird en a fait de pareils.

On peut ensuite pour une plus grande vérification placer la lunette dans une situation verticale, y appliquer la regle YZ, tendre un fil-à-plomb par les deux points qui sont marqués sur les deux pieds de la regle, et l'on reconnoît si la lunette, quand elle est sur le dernier point de la division, est exactement verticale; ce qui confirme la vérification précédente (2591). On voit par là si l'arc total est exactement de 90°.

2593. Graham employoit le niveau d'une maniere un peu différente pour la même vérification : la regle ou plutôt la planche (FIG. 154), étant supposée un peu plus longue que le rayon, on tend sur les deux pieds YZ, un fil d'argent très délié, on approche la regle du quart-de-cercle, et on la suspend de maniere que le fil d'argent réponde exactement sur le point de zéro et sur un point très fin marqué au centre du mural : dans cet état on trouve par le moyen du niveau si le bord supérieur de la regle est parfaitement horizontal, ou de combien il s'en faut; on suppose comme dans la premiere vérification que la surface des pieds YZ, est sur une ligne exactement parallele à la surface supérieure AB, où l'on met le niveau; mais il n'est pas bien difficile de se procurer deux surfaces paralleles. M. Ramsden vérifie aussi l'arc de 90° par le moyen de deux fils, l'un horizontal et l'autre vertical, portés par une croix; le fil horizontal répond à deux points marqués sur la lunette; en retournant la croix on est sûr que le point d'en bas est bien à angles droits avec le fil horizontal; on place ensuite la lunette verticalement, avec un fil-à-plomb sur les deux mêmes points de la lunette; et si elle est éloignée du premier point de la division, autant qu'elle l'étoit du dernier point dans la premiere opération, l'on est sûr que l'arc est bien de 90°. Au lieu d'un fil horizontal on peut employer seulement deux portions de fils qui soient bien dans la même direction.

Par cette méthode M. Ramsden s'est assuré qu'il n'y avoit pas une seule seconde d'erreur sur les 90° dans le quart-de-cercle de milord Marlbourough à Blenheim, tandis que dans celui d'Oxford, qui est au nord, il y a 13″ de moins.

2594. Le parallélisme de la lunette par rapport au plan du mural peut se vérifier de plusieurs manieres. Lorsqu'on a la facilité de tourner un mural au nord et au midi (2590), on reconnoît aisément le parallélisme par les observations d'étoiles, de la maniere suivante. Mon quart-de-cercle, à Berlin, étoit depuis quelques mois du côté du midi, et j'avois reconnu par des hauteurs correspondantes qu'il étoit exactement dans le méridien vers 53° de hauteur; au mois de juin 1752, je le fis transporter au nord, je le plaçai dans le méridien vers 53° de hauteur comme il l'étoit au midi; et cela par le moyen des étoiles circompolaires dont j'avois pris des hauteurs correspondantes la veille. J'observai le même jour des étoiles au zénit, et je vis qu'elles passoient 20″ plutôt qu'elles ne devoient passer en calculant d'après les passages observés la veille du côté du midi, quoique le mural fût également d'à-plomb; cela me fit connoître que le haut de la lunette étoit de 10″ trop à l'orient au zénit, quoiqu'il fût dans le méridien vers 53° de hauteur; et comme le plan du quart-de-cercle étoit placé de la même maniere et verticalement dans les deux positions, il ne s'agissoit que d'approcher du limbe le fil horaire du réticule qui étoit mobile par le moyen d'une vis; par là je pouvois rendre parallele au limbe, l'axe optique de la lunette, qui auparavant faisoit un angle répondant à 10″ de temps au zénit, et qui décrivoit un cône, au lieu de décrire le plan d'un grand cercle. Ce changement du réticule exigeoit aussi un changement dans la situation du mural, dont le plan n'étoit plus dans le méridien à 53°; mais la lunette devenue parallele au plan, étant mise une fois dans le méridien, ne pouvoit plus donner 10″ d'erreur dans un point, et zéro dans un autre, comme cela étoit arrivé auparavant.

Le cercle entier a encore ici un grand avantage sur le mural; car quand il est retourné et la lunette dirigée vers le même objet terrestre, les astres ne doivent passer au même instant que dans la premiere situation; s'il y a une différence, elle vient du défaut de parallélisme dans la lunette; et l'on en corrigera la moitié par la vis qui fait mouvoir horizontalement le réticule. On peut aussi vérifier le parallélisme de la lunette d'un mural, par le moyen de la lunette d'épreuve (2569). Lorsqu'on s'est assuré qu'elle

est parallele au plan, si l'on met l'instrument dans une situation bien verticale, on sera sûr que la lunette passe par le zénit, et l'on achevera de mettre le mural dans le méridien par des hauteurs correspondantes, ou par les méthodes qui seront expliquées ci-après (2607). Il faut voir sur le calcul des vérifications de toute espece qui appartiennent au mural, le IVe volume des Œuvres de M. Boscovich, p. 1-68.

Toutes les fois qu'on fait une observation au mural, on a soin de regarder le fil-à-plomb, et s'il ne répond pas exactement au point A, on l'y ramene avec la vis F. Pour que ce fil-à-plomb soit bien tendu, on charge le poids jusqu'à ce qu'il casse, et comme ensuite on le fait tremper dans l'eau, cela suffit pour que le fil puisse soutenir le même poids sans se rompre.

Des Observations qui se font aux grands Secteurs.

2595. On n'a employé jusqu'ici les grands secteurs (2380) que pour l'aberration, la nutation et la figure de la Terre. Ces observations se réduisent à mesurer la distance d'une étoile au zénit à une seconde près; l'attention la plus importante consiste à bien vérifier le secteur par le retournement (2556). Ordinairement le pied et la monture de l'instrument tournent autour de deux pivots; à Greenwich, où le secteur est contre un mur, on le transporte sur le mur opposé, où il y a une barre pour le suspendre, et un limbe, fixé en 1785, pour régler exactement la situation du limbe du secteur. Il est essentiel, dans ces instrumens, de rendre la suspension bien libre (2386), et de bien connoître la valeur des parties du micrometre. Il faut encore avoir égard à trois choses qui sont particulieres à ces grands instrumens; la flexion des barres qui en composent la carcasse, la difficulté de les mettre dans le méridien, et la parallaxe des fils au foyer de la lunette.

2596. Une barre de fer de 8 pieds de long, qui avoit 2 pouces 8 lignes de largeur par un bout, et 3 pouces 3 lignes par l'autre, avec 2 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaisseur étant posée horizontalement de chan, c'est-à-dire sur son épaisseur, et dans le sens où elle devoit se plier le moins, se courboit encore de 3 quarts de ligne (Bouguer, *pag.* 191); et si l'on augmente la longueur de la barre, la flexion croît comme la quatrieme puissance de la longueur. Pour remédier le plus qu'il est possible à un inconvénient aussi considérable dans les grands instrumens, il est nécessaire d'employer les barres les plus larges, d'assujettir l'objectif très fortement avec le centre, et le mi-

crometre avec le limbe, afin que la flexion de l'instrument soit exactement égale à celle de la lunette. Il faut aussi éviter de mettre de l'huile dans les vis; ce qui peut produire à la longue quelque jeu dans les assemblages. Enfin il faut mouvoir ces instrumens avec précaution, pour empêcher qu'ils ne changent de forme d'une façon plus irréguliere par la flexion (La Condamine, *pag.* 143 *et suiv*).

2597. On peut mesurer la flexion des barres par le moyen du *sphérometre*, qui consiste en plusieurs pointes, dont trois se placent en ligne droite, et sur lesquelles on met la piece dont on veut mesurer la courbure; on fait mouvoir une vis au milieu, et lorsqu'elle approche du plan, on y distingue à l'oreille une différence de $\frac{7}{1440}$ de ligne, et l'on mesure avec la vis combien il s'en faut qu'elle ne fasse avec les autres une ligne parfaitement droite. Cet instrument, imaginé par M. de la Roüe, a été exécuté par M. Mégnié, et pourroit être fort utile pour mesurer la courbure des verres (2307).

2598. Il est important que ces instrumens soient placés très exactement dans le méridien, et cela non par le moyen des hauteurs correspondantes des astres et du temps de leurs passages; mais par le moyen d'une méridienne filaire (2579), sur laquelle on dirige le limbe dans le méridien; sans cela les hauteurs des étoiles qu'on observe fort près du zénit, pourroient être affectées très considérablement par la moindre erreur dans le parallélisme de la lunette (2574).

2599. Il est nécessaire que l'image de l'étoile qu'on observe se forme exactement sur le chassis du micrometre; sans cela elle est mal terminée: on distingue avec peine si le fil la coupe exactement en deux parties égales; et le moindre mouvement de l'œil fait qu'on apperçoit l'étoile au-dessus ou au-dessous du fil, par une espece de parallaxe optique, dont il est très important de se garantir.

Le foyer des grandes lunettes non acromatiques est sensiblement différent, selon la constitution des yeux de l'observateur, et selon qu'on enfonce plus ou moins l'oculaire; la disposition même de l'atmosphere, et la lumiere plus ou moins grande des astres que l'on observe, rend le foyer plus ou moins long. La Condamine et Bouguer ont vu dans leur lunette de 12 pieds, le jeu de l'image, ou la parallaxe des fils aller à plus de 2′ 5″ dans certaines nuits, et devenir insensible d'autres fois. La respiration qui s'échappa une fois sur l'oculaire, rendit tout d'un coup la parallaxe des fils beaucoup moindre. Il paroît que dans ce cas les fils étoient d'abord un peu trop loin de l'objectif; l'humidité de l'oculaire intercepta les rayons violets et bleus, qui se rassembloient avant que d'arriver aux

fils ; les rayons rouges, qui traversent l'air et l'eau avec moins de réfraction que les autres, prévalurent, et le foyer devenant plus long, l'image se rapprocha du réticule, et diminua la parallaxe.

Pour y remédier, Bouguer (*pag.* 209) propose plusieurs moyens, principalement de faire en sorte que l'astre passe toujours à peu de distance du centre de la lunette, d'employer un objectif légèrement coloré de rouge ou de jaune, de restreindre beaucoup l'ouverture de l'objectif, et de le centrer exactement. Les micrometres extérieurs dont j'ai parlé (2335), et qu'on emploie communément en Angleterre, sont très utiles pour diminuer les effets de cette parallaxe, en faisant toujours passer l'astre sur le centre de la lunette ; mais le meilleur remede est de faire des lunettes acromatiques (2297) ; car comme elles rassemblent mieux les rayons, et qu'elles n'ont presque point de couleurs, elles ont beaucoup moins de parallaxe.

Des Observations qui se font à l'Instrument des passages.

2600. Avant que l'on se serve d'une lunette méridienne (2387), ou instrument des passages, il faut s'assurer de l'exactitude de ses différentes parties, et de leur situation respective ; pour y parvenir il y a cinq vérifications importantes.

Il faut d'abord faire en sorte que l'axe optique de la lunette passant par l'intersection des fils qui sont au foyer commun des verres, soit exactement perpendiculaire à l'axe de la machine ; pour cet effet, la lunette étant placée sur ses supports dans une situation à-peu-près horizontale, on la dirige sur une mire ou sur un objet terrestre bien terminé, et on la place de maniere que le fil vertical du réticule coupe l'objet exactement en deux parties égales : alors, sans toucher aux supports, on enleve la lunette le plus doucement qu'il est possible [a] ; on la retourne de maniere que le pivot qui étoit à droite se trouve à gauche, et l'on regarde le même objet ; s'il ne se trouve plus coupé comme dans la situation précédente par le fil vertical du réticule, il faut faire faire la moitié du chemin par le fil vertical, au moyen de la vis qui est vers l'oculaire L (fig. 174), et qui fait mouvoir le réticule au dedans de la lunette ; ensuite on corrigera le reste de cette différence par la vis P du support, et l'on achevera de ramener la lunette sur l'objet, si l'on veut qu'il serve de regle pour la

(a) Quand la lunette est très grande, il faut avoir une poulie en haut pour soulever la machine, ou bien un support en bas qui la souleve, et qui se tourne pour retourner l'axe de l'instrument.

suite. Avec ces deux corrections, si on les a faites bien égales, on tombera précisément sur le même objet dans les deux situations de la lunette; l'on sera assuré que l'axe optique du réticule et des verres de la lunette est perpendiculaire à l'axe des pivots, et que la lunette décrit un grand cercle de la sphere; au lieu que, sans cette vérification, elle décriroit un petit cercle qui ne partageroit pas le Ciel en deux parties égales, et qui ne pourroit former ni le plan d'un vertical, ni celui d'un méridien. Pour faire avancer le fil de la lunette vers l'objet, comme nous venons de le dire, on se sert d'une vis qui est placée vers l'oculaire L sur le côté de la lunette, et que l'on tourne avec une petite clef; cette vis conduit le chassis du réticule sur lequel sont tendus les fils, et l'oblige de se mouvoir de côté pour correspondre à l'objet qui est dans le milieu de la lunette, à-peu-près comme la vis *fg* (FIG. 163) servoit à donner au chassis fixe du micrometre un petit mouvement de haut en bas.

2601. La raison de cette opération se voit dans la fig. 214 : soit AB et CD deux lignes qui se coupent à angles droits; on voit assez qu'en retournant la ligne AB, que nous considérons comme l'axe de la machine, la ligne CD, qui lui est perpendiculaire, ne changera point de situation; mais s'il y avoit une autre ligne EF inclinée du côté du pivot A, lorsqu'on retourneroit les pivots, la ligne FE seroit aussi retournée, elle se dirigeroit suivant HG, puisque son inclinaison est du côté du pivot A, qui se trouveroit en B, c'est-à-dire à droite, par la nouvelle situation de l'axe. Ainsi il y auroit entre la premiere position EF, et la seconde position GH, une différence ou un angle EKG double de l'erreur EKC, qu'il y avoit à corriger dans la premiere situation; voilà pourquoi nous avons averti de faire seulement parcourir au réticule la moitié de l'espace EG que l'on appercevra entre les situations de l'objet dans les deux cas : cela suffira pour amener la lunette de la situation oblique EF à la situation perpendiculaire CD.

2602. Il faut aussi faire en sorte que l'axe des pivots soit dans une situation bien horizontale : pour cela on se sert d'un niveau à bulle d'air (2398), ou d'un simple fil-à-plomb; ce dernier moyen étant le plus exact et le plus simple, nous commencerons par celui-là.

Si l'on peut marquer en dehors sur le tuyau de la lunette une ligne de C en L (FIG. 174), qui soit exactement perpendiculaire à l'axe des pivots, et qu'on mette cette ligne dans une position verticale au moyen du fil-à-plomb, on sera sûr que l'axe des pivots sera parfaitement horizontal; or, on peut faire l'un et l'autre à la fois par un simple renversement.

Il y a aux deux extrémités de la lunette de petits cylindres de cuivre qui ont une certaine saillie ; dans le centre de chacun est marqué un point, comme on le voit en C et en L; on place la lunette verticalement, et l'on suspend avec de la cire un cheveu chargé d'un petit poids sur le point C qui est en haut; on fait jouer la vis V qui est à l'un des supports, jusqu'à ce que la lunette soit droite, et que le cheveu soit exactement sur les deux points ; alors on détache le fil, on retourne la lunette, en sorte que le point C, qui étoit en haut se trouve en bas, et l'on suspend de nouveau le cheveu sur le point L qui est en haut; si le cheveu ne tombe pas exactement sur le point inférieur, comme dans la situation précédente, mais à une petite distance, c'est une preuve que la ligne des deux points n'est pas perpendiculaire à la ligne des pivots : on partagera la petite distance par la moitié, et l'on aura le point qui doit être substitué au point C, pour marquer avec le point L une ligne perpendiculaire à l'axe. On fera mouvoir la vis du support, jusqu'à ce que le fil tombe sur le nouveau point ; l'on sera sûr que l'axe est horizontal, et l'on aura la ligne qui est perpendiculaire à l'axe des pivots : ainsi la moitié de la différence qu'on a trouvée se corrige par la vis du coussinet ou du support, et l'autre moitié par le point lui-même, soit en en marquant un autre à côté, soit en repoussant le cylindre qui porte le point d'une petite quantité. Pour cet effet, les trous dans lesquels passent les vis d'un de ces cylindres sont ovales, et lui permettent un petit mouvement de droite à gauche lorsqu'on desserre les vis. Quant au mouvement des supports, dans un axe de 30 pouces, avec une vis dont le filet a une demi-ligne, chaque tour change la lunette de 5′ de degré.

2603. On peut aussi conserver le même point de suspension, et retourner l'axe, en mettant à droite le pivot qui étoit à gauche ; on trouve dans les deux situations la même différence pour le fil, et on la corrige de la même maniere. La méthode la plus exacte consiste à suspendre le fil-à-plomb sur une tringle supérieure qui ne touche point à la lunette ; un des deux points marqués sur la lunette est mobile avec une vis, et on l'ajuste de maniere que, dans les deux positions de la lunette, le fil-à-plomb réponde exactement sur les deux points. M. Ramsden a même imaginé de faire passer le fil par les images des deux points, transmises chacune par une petite lentille ; et par ce moyen il n'y a point de parallaxe.

Par cette opération l'on fait en sorte que la ligne des deux points soit parfaitement perpendiculaire à l'axe; comme elle est toujours d'à-plomb dans les deux cas, on est sûr que l'axe est parfaitement

horizontal. En effet, si l'axe n'étoit pas perpendiculaire à cette ligne des deux points, on peut voir par la fig. 214, que dans une des positions, la ligne des points prendroit une direction EF, et dans l'autre cas, une position GH; ainsi elle ne sauroit être à-plomb dans le renversement de la lunette, ou dans le retournement de l'axe, après avoir été à-plomb dans la premiere position ; il n'y a que la seule ligne CD qui puisse être verticale dans les deux cas. Quand, par le moyen de la ligne CD, on a placé l'axe bien horizontalement, on est sûr que l'axe optique de la lunette qui lui est perpendiculaire (2600), décrit exactement un vertical. Lorsqu'on se servira du niveau à bulle d'air pour rendre l'axe horizontal, on aura recours à l'article du niveau (2616).

On a proposé pour cette même vérification, d'observer l'image de l'étoile réfléchie par une surface de mercure qu'on met à terre; si elle passe en même temps que l'étoile dans la lunette, on est sûr que l'axe est horizontal. Pour vérifier l'axe d'un cercle entier (2333), M. Ramsden a imaginé de mettre un fil-à-plomb en dehors, et il le rapporte sur des points qui sont à la même distance du plan en haut et en bas ; ce dont il est facile de s'assurer, parceque le cercle est parfaitement plan, et qu'il contient, par un simple et léger contact à la même distance, les deux pieces qui portent les points dont j'ai parlé.

2604. On est assuré par les deux vérifications précédentes que la lunette, en tournant sur son axe, décrit un grand cercle (2600), et que ce grand cercle est un vertical (2603); il faut encore faire en sorte que ce vertical soit le méridien même, c'est-à-dire, qu'il passe par le pole du monde. Si l'on a la liberté de faire tourner la lunette méridienne jusqu'au nord vers les étoiles circompolaires, on se procure aisément cette vérification : on observe les passages d'une même étoile au-dessus et au-dessous du pole; et si les intervalles de temps sont égaux, c'est une preuve que la lunette passe exactement par le pole, et qu'elle tourne dans un cercle de déclinaison ; ce qui forme la condition la plus importante de cette sorte d'instrument. L'on a déja fait que le cercle décrit par la lunette passe aussi au zénit ; on est donc certain que ce cercle est véritablement le méridien.

2605. Si l'on n'a pas la facilité d'observer les étoiles circompolaires, on se servira des hauteurs correspondantes. En supposant les deux premieres vérifications bien exactes, il suffira de mettre la lunette dans le méridien en un seul point, pour qu'elle y soit dans tous les autres ; en effet, puisque la lunette est perpendiculaire à

l'axe des pivots, et que cet axe est bien horizontal, la lunette est toujours dans le même plan vertical, et décrit un cercle qui passe par le zénit; si ce vertical concourt avec le méridien dans un seul point, outre celui du zénit, ils seront d'accord dans toute la circonférence du ciel.

Il suffit donc de prendre des hauteurs correspondantes du Soleil (2578), dans un jour quelconque, pour déterminer l'instant du midi vrai; on observera le même jour avec la lunette méridienne les deux bords du Soleil au fil du milieu, d'où l'on déduira le passage du centre du Soleil. Si c'est, à une seconde près, la même chose que le midi vrai déduit des hauteurs correspondantes, on sera assuré que l'instrument est bien placé; je dis à 1″ près, car il ne faut pas espérer une précision plus grande que celle de 1″ de temps sur 90°, ou depuis le zénit jusqu'à l'horizon, dans une petite lunette comme celle que je décris. Mais dans un grand instrument des passages, dont l'axe a 4 pieds et la lunette 8, on n'a pas besoin des hauteurs correspondantes; l'axe étant bien horizontal, il suffit d'observer les passages d'une même étoile au-dessus et au-dessous du pole, pour voir si la révolution diurne est partagée exactement par la moitié, et l'on ne se trompe pas d'un quart de seconde de temps sur les 90°.

2606. On remarque alors dans l'horizon, sur un mur ou sur un clocher, quelque point distinct, sur lequel on apperçoive le fil de la lunette; cet objet terrestre, placé dans le méridien, sert à reconnoître si la lunette ne s'est point dérangée, à la remettre dans le méridien en cas d'accident, à corriger, si l'on veut, à chaque observation, les petites inégalités que la chaleur aura pu y causer (2609), ou du moins à en tenir compte dans les observations.

2607. Lorsqu'on est assuré que la lunette méridienne décrit un vertical, on peut aussi, par le moyen de deux étoiles dont la différence d'ascension droite est connue, trouver sa déviation dans tous les points. Soit PZBDH (FIG. 215) le méridien, P le pole, Z le zénit, ZCFO le vertical que décrit la lunette, HO l'arc de sa déviation dans l'horizon, BC et DF les paralleles de deux étoiles fort éloignées l'une de l'autre en déclinaison, comme de 40 à 50°, PCE le cercle de déclinaison qui passe par le pole du monde et par l'étoile C au moment où elle est au fil de l'instrument; la seconde étoile arrivera au point E après un intervalle de temps qui est connu, parcequ'il est égal à la différence d'ascension droite des deux étoiles convertie en temps; ainsi l'on connoît l'instant où la seconde étoile devroit arriver au point E; on observera l'instant où elle arrivera en F au fil de l'instrument; la différence est le temps mesuré par l'arc

EF ; j'appelle t ce nombre de secondes en temps, et je vais en conclure la valeur de HO en secondes de degrés; le petit angle $C = \frac{EF}{\sin. CE} = \frac{15 t \sin. PD}{\sin. BD}$; or, sin. HO ou sin. $Z = \frac{\sin. C \sin. PC}{\sin. PZ}$, ou $\frac{C \sin. PB}{\sin. PZ}$, et substituant la valeur de C, on a $HO = \frac{15. t. \sin. PD \sin. PB}{\sin. BD \sin. PZ}$.

Connoissant la distance des objets sur lesquels tombe la lunette pointée dans l'horizon, et la grandeur de ces objets, par exemple, deux lignes tracées à un pouce de distance l'une de l'autre, il est aisé de savoir à combien de pouces on doit faire répondre la lunette à droite ou à gauche, pour changer son vertical de la quantité HO, qu'on a trouvée par la formule précédente. On peut aussi, par la mesure des pas de la vis A (FIG. 173), ou P (FIG. 174), savoir de combien il faut tourner cette vis pour faire avancer l'axe, et par conséquent la lunette, d'une quantité égale à HO. On peut trouver, par la même méthode, le petit angle P, qui est la distance de l'étoile C au méridien, ou la déviation en C; car Z : P : : sin. PB : sin. ZC; si l'on substitue la valeur de Z et celle de C, l'on aura $P = \frac{15 t \sin. PD \sin. ZC}{\sin. BD \sin. PZ}$. Enfin on peut trouver la valeur de EF en temps; car $C = \frac{P. \sin. PZ}{\sin. ZC}$; donc $EF = C \sin. CF = \frac{P. \sin. PZ \sin. CF}{\sin. ZC}$, et sur l'équateur $= \frac{P \sin. CE \sin. PZ}{\sin. ZC \sin. PE}$, ou bien $\frac{CE \sin. P \sin. PZ}{15. \sin. ZC \sin. PE}$, si l'angle P est en minutes de degré, et que l'arc CE soit très petit. C'est le temps qu'il faut ôter du passage de l'astre Fa qui est le plus bas, si c'est après le passage au vrai méridien.

2608. M. de Lambre a calculé, en 1789, une table fort commode pour ces opérations. Soit L la latitude de Paris, et D la déclinaison de l'étoile, la correction de son passage au méridien est HO (sin. L $\mp$ cos. L tang. D), le signe + étant pour les déclinaisons australes; cette table sert à trouver HO, quand on a observé la différence des passages de deux étoiles connues par un bon catalogue; la même table sert à trouver la correction des passages de toute autre étoile, quand on connoît HO. La quantité de l'article précédent est aussi égale à la parallaxe d'ascension droite qui auroit lieu, en supposant CE égale à la parallaxe de hauteur (1645). Cette parallaxe doit s'ajouter au passage observé en F, si c'est après le méridien; car quand la Lune passe en F, son vrai lieu C a une ascension droite marquée par le point E, plus grande que celle du point F. Cette parallaxe est encore sensiblement ce qu'il faudroit ajouter au passage de la Lune

observé en E, si la lunette décrivoit le cercle horaire PCE ; car la Lune passant en E, son vrai lieu G dans le vertical ZGE a une ascension droite plus grande de la quantité CG qui est sensiblement égale à EF. On peut voir sur ces différentes vérifications de la lunette méridienne, plusieurs formules dans les Œuvres de Boscovich, *Tom. IV*, *pag.* 184.

2609. Quoiqu'on ait mis la lunette exactement dans le méridien, par les méthodes précédentes, on n'est point assuré qu'elle y demeurera toujours ; l'action du Soleil et de la gelée sur les murs des bâtimens fait changer la situation et la figure des édifices les plus solides. On en a vu une preuve bien sensible dans les expériences de Bouguer aux Invalides (*Mém. acad.* 1754) ; les nuages en se séparant un jour laisserent passer tout à-coup quelques rayons de Soleil ; à l'instant même la lunette, qui étoit suspendue par une chaîne de 187 ½ pieds au dôme de l'église, parut changer de direction ; c'étoit à la vérité d'une quantité fort petite, mais aussi ce n'étoit qu'un instant, et dans un bâtiment très solide, où l'on a en dedans une température très égale. Les différences doivent être bien plus considérables dans d'autres circonstances.

2610. Lorsqu'on voit dans la situation de la lunette un petit dérangement HO, qui ne vaut pas la peine de toucher aux supports (2393), calculer l'erreur qui doit en résulter sur la différence d'ascension droite observée à l'instrument, c'est-à-dire la petite quantité $EF = \frac{HO.\sin BD \sin. PZ}{\sin. PD \sin. PB}$ (2607). Je suppose que l'axe est toujours exactement de niveau, c'est-à-dire que le dérangement ne tombe que sur la situation de la lunette de droite à gauche, ou qu'au moins on a corrigé par le niveau celle qui a lieu de haut en bas.

2611. Un des fils de la lunette doit être exactement vertical, afin qu'on puisse observer indifféremment les passages des astres à la partie supérieure, inférieure ou moyenne de la lunette ; pour s'en assurer, on suspendra à une certaine distance sur un fond noir une ficelle blanchie avec de la craie, chargée d'un petit poids pour lui donner une situation verticale ; on regardera cette ficelle par la lunette, et l'on verra si le fil la cache exactement dans tous ses points ; si le fil paroît être un peu oblique, on desserrera les vis H et K, qui serrent les collets des porte-lunettes (FIG. 174), et l'on tournera tant soit peu la lunette, après quoi l'on resserrera les vis ; mais l'on examinera avec soin si en les resserrant, il n'en résulte pas quelque dérangement sur les objets des vérifications précédentes (2600 et suiv.).

2612. La derniere vérification que l'on doit faire dans une lunette méridienne, consiste à savoir si les fils du réticule sont bien au foyer de l'objectif pour les objets célestes ; car sans cela on ne distingueroit pas, de nuit, le moment où une étoile passe derriere le fil, et l'on continueroit de la voir, à-peu-près comme si le fil n'y étoit pas. Pour cela, on attendra au méridien une étoile de la premiere grandeur, dans le crépuscule du soir : on lui fera suivre le fil horizontal : on examinera si en élevant l'œil et en l'abaissant, l'étoile continue d'être exactement sur le fil, en sorte qu'il n'y ait aucune parallaxe ; le fil doit toujours paroître distinctement sur l'étoile, et ne pas diminuer de largeur dans cette partie ; alors on est assuré que l'objectif est bien placé ; sinon, il aura besoin d'être retiré ou renfoncé d'une certaine quantité.

Dans une grande lunette où l'on met plusieurs fils, il est très utile de les voir tous perpendiculairement : alors on rend l'oculaire mobile avec une vis, et on l'amene successivement vis-à-vis de chaque fil à mesure que l'astre les parcourt.

2613. LE PRINCIPAL usage de la lunette méridienne consiste à observer les différences d'ascension droite entre deux astres avec une grande facilité ; on évite par son moyen la méthode pénible des hauteurs correspondantes, et l'on obtient la même précision. Il suffit alors d'observer l'heure, la minute, la seconde, et même la fraction de seconde où chacun des deux astres passe au milieu du fil ; on corrige s'il le faut les deux temps par la déviation qui convient à la hauteur de chacun des deux astres ; la différence convertie en degrés, suivant la marche de l'horloge, donnera la différence d'ascension droite (2505).

On se sert aussi de la lunette méridienne pour régler l'horloge des observations (4132) : en observant le passage d'une étoile deux jours de suite, s'il n'y a que 3′ 55″ de différence, c'est une preuve que l'horloge avance de 1″ par jour.

2614. On met dans le réticule d'une lunette méridienne deux ou quatre fils verticaux, aux deux côtés du fil horaire qui est dans le milieu de la lunette, de sorte que l'astre passant successivement à ces trois fils paralleles, on puisse vérifier l'observation du milieu, et la suppléer si elle venoit à manquer. Pour réduire au centre les passages observés aux fils collatéraux, il faut savoir combien les astres doivent employer de temps à aller d'un fil à l'autre suivant leurs différens degrés de déclinaison. Supposons qu'on trouve une minute de différence par le moyen d'une étoile qui est dans l'équateur, et qu'on veuille savoir combien emploie-

ront les étoiles qui sont à 30° de déclinaison, on divisera 60″ par le cosinus de 30° (3879), et l'on aura 69″ 3, c'est le temps que ces étoiles emploieront à aller d'un fil à l'autre. De même, si l'on a observé qu'un astre à 30° de déclinaison employoit 69″ 3 à aller d'un fil à l'autre, on multipliera 69″ 3 par le cosinus de 30°, et l'on aura 60″, temps qu'emploient les étoiles situées dans l'équation pour aller d'un fil à l'autre.

2615. L'étoile polaire est la plus propre à déterminer l'intervalle des fils ainsi que leur épaisseur, parcequ'elle est fort long-temps à les traverser : si les fils sont un peu gros, il faut observer le bord d'une planete au bord du fil, et tenir compte du diametre de la planete et de la demi-épaisseur du fil.

Quand on observe Vénus, on marque de plus le passage du milieu des deux pointes du croissant au milieu du fil; c'est la même que le passage du centre de Vénus, et c'est une confirmation pour le passage du bord.

Du Niveau à bulle d'air.

2616. Le fil-à-plomb est un moyen très exact de trouver la ligne du niveau ou la ligne horizontale (2602); cependant les niveaux à bulle d'air (2399), quand ils sont bien faits, sont encore plus sensibles; ils ont l'avantage d'être beaucoup plus commodes, parcequ'ils sont à l'abri des oscillations que cause dans le fil-à-plomb la moindre agitation de l'air; aussi voyons-nous qu'on les a appliqués quelquefois en Angleterre à de petits quarts-de-cercles pour tenir lieu du fil-à-plomb, et Graham les a employés pour vérifier les grands quarts-de-cercles de 8 pieds qui sont à l'observatoire de Greenwich (2592). Mais il ne faut pas s'en servir pour tenir lieu de fil-à-plomb en prenant des hauteurs du Soleil (2399).

2617. Pour niveler promptement l'axe autour duquel tourne la lunette méridienne, on doit d'abord vérifier le niveau, en le présentant dans les deux sens, et marquer l'endroit où paroît à chaque fois le centre de la bulle d'air; le milieu de ces deux points est celui où elle doit être pour que l'axe soit horizontal. Il est aisé de voir qu'un niveau peut se vérifier ainsi, même avec une base qui n'est point horizontale. Supposons une base inclinée KX (FIG. 200), sur laquelle on place le niveau des maçons NIV; le fil-à-plomb IP tombera en E au lieu de tomber dans le milieu M. Mais quand on retournera le niveau de droite à gauche, le fil tom-

bera sur C; le milieu entre les points E et C sera le point M où doit répondre le fil-à-plomb, quand la base KX sera exactement horizontale. Il en est de même du niveau à bulle d'air; il ne s'agit que de tourner la vis V du support (FIG. 174), pour élever le pivot jusqu'à ce que la bulle d'air vienne à ce point du milieu qu'on a marqué sur le tube, après avoir retourné le niveau.

L'axe étant placé ainsi horizontalement, si le niveau est bien disposé et bien réglé, c'est-à-dire si la bouteille ou le tube du niveau est parallele à ses supports, en retournant le niveau, la bulle viendra toujours au point du milieu. Si elle n'y vient pas, on l'y amenera en tournant la vis C du niveau (FIG. 175), et le niveau se trouvera réglé. Il sera bon de vérifier l'axe à son tour; pour cela on retournera le niveau une seconde fois; et marquant encore sur le tube les deux points où vient la bulle dans ce retournement, on fera venir la bulle au milieu de ces deux points, en tournant la vis V du support (FIG. 174). Par ce moyen l'on aura une vérification réciproque et complete de l'axe et du niveau.

Des Observations faites à la Machine parallatique.

2618. L'USAGE de cette machine (2400) consiste 1°. à trouver dans le ciel un astre que l'on n'apperçoit pas à la vue simple (2623); 2°. à suivre d'une maniere facile et commode le mouvement diurne des astres; 3°. à observer les différences d'ascension droite et de déclinaison hors du méridien, avec le réticule qu'on y applique (2904).

La premiere vérification d'une lunette parallatique consiste à mettre l'axe dans le plan du méridien. Pour cela on dirige la lunette vers une étoile qui soit du côté de l'orient 6 heures avant son passage au méridien; et l'on fait passer l'étoile au centre de la lunette. Lorsque l'étoile est à l'occident, 6 heures après son passage au méridien, et 12 heures après la premiere observation, on tourne la lunette vers l'étoile, sans changer la position de l'axe ni la déclinaison de la lunette; et si l'étoile se trouve ne passer plus par le centre des fils, c'est une preuve que l'axe est un peu trop à l'orient ou à l'occident: on le tournera donc ou vers l'orient ou vers l'occident, en sorte que par ce mouvement l'étoile soit rapprochée du centre de la lunette, de la moitié de la quantité dont elle aura passé dans la lunette plus au nord ou plus au sud dans la seconde observation; on sera sûr alors que l'axe est exactement dans le méridien. Cette vérification est indépendante de la réfraction, et même de l'erreur qu'il

Fig. 201.

Fig. 201. N.° 2.

Fig. 202

Fig. 204.

Fig. 206.

Fig. 207.

Fig. 208.

Fig. 210.

Fig. 211.

Fig. 213.

Fig. 214.

Fig. 215.

qu'il peut y avoir dans l'inclinaison de l'axe ; car cet axe pourroit être incliné trop ou trop peu, d'un demi-degré, sans que l'étoile cessât de passer à-peu-près par le centre de la lunette à 90° du méridien, parceque le parallele que décriroit la lunette autour d'un axe trop ou trop peu élevé, passe sensiblement par le même point que le vrai parallele, pourvu que l'axe de la machine ne differe pas trop du véritable axe du monde ; et si l'étoile est dans l'équateur, la différence devient tout-à-fait nulle.

2619. Lorsque par cette premiere vérification l'on aura amené l'axe de la lunette parallatique dans le plan du méridien, il faudra examiner si l'axe est au degré d'inclinaison convenable à la hauteur du pole, c'est-à-dire s'il fait avec l'horizon le même angle que l'axe de la Terre. Pour cela on dirigera le centre de la lunette vers une étoile, 6 heures avant son passage au méridien, comme nous l'avons déja dit ; lorsqu'elle arrivera ensuite au méridien, six heures après, on examinera si elle passe encore par le centre de la lunette dont la déclinaison n'a point changé ; dans ce cas, l'axe est à son élévation convenable. Si l'étoile en passant au milieu paroît dans la lunette au-dessus du centre, c'est-à-dire qu'elle soit véritablement au-dessous, il faudra élever le sommet de l'axe, c'est-à-dire augmenter l'angle qu'il fait avec l'horizon, jusqu'à ce que l'étoile revienne au centre de la lunette, comme elle y étoit 6 heures avant, sans changer la déclinaison, et sans toucher à la lunette : on se sert pour cela de la vis N (FIG. 176) qui est au bas de l'axe près du cercle équatorial KCO. Je néglige ici l'effet de la réfraction ; mais on peut en tenir compte en suivant les principes des art. 2544, 2624 ; si la réfraction en déclinaison dans la premiere observation surpasse la réfraction dans le méridien, l'étoile doit y paroître réellement plus basse dans le méridien, de toute cette quantité, sans qu'il n'y ait rien à changer dans la hauteur de l'axe.

2620. Quand on est assuré de la situation de l'axe, il faut, au moyen d'un niveau P, d'un fil-à-plomb *r*R et de deux lignes tracées sur une table fixe ou sur le pavé le long des regles BK et DE, s'assurer les moyens de replacer la machine dans la même position, lorsqu'elle aura été déplacée ou transportée d'un endroit à l'autre.

On examinera ensuite la situation des deux alidades, dont l'une marque les heures, et l'autre les déclinaisons. Pour vérifier l'alidade des heures, on observera le passage du Soleil au fil horaire de la lunette, l'alidade étant placée sur midi ; par le moyen d'une hor-

loge réglée, on verra si le Soleil y a passé au moment du midi vrai ; dans le cas où il y auroit une différence, on lâchera les vis qui serrent l'alidade CO autour de l'axe de la machine ; et comme elles passent dans les trous ovales, on fixera aisément cette alidade sur le point de midi, en faisant passer le Soleil au milieu de la lunette au moment du midi, qui sera indiqué sur l'horloge à secondes ; on pourra faire cette opération à toute autre heure que midi, par exemple, à trois heures, pourvu que le Soleil soit au milieu de la lunette à l'instant où l'horloge marque trois heures : si l'on ne peut pas commodément changer l'alidade, on se contentera d'en marquer l'erreur, pour en tenir compte dans les observations.

Les déclinaisons se marquent vers W par un autre index, qu'il faut aussi vérifier. Pour cela on dirigera la lunette vers une étoile qui soit au nord de l'équateur, et vers une autre qui soit au midi ; si l'alidade marque exactement la déclinaison de chacune, telle qu'on la connoît par les hauteurs méridiennes (2582), ou par les catalogues d'étoiles, on sera sûr que l'alidade est bien placée ; si elle est mal placée, l'une des déclinaisons paroîtra trop grande et l'autre trop petite ; alors on lâchera les vis qui tiennent le vernier des déclinaisons attaché sur la mâchoire S qui est au sommet de l'axe, et l'on changera l'index de la quantité dont il a été trouvé en erreur par les deux étoiles observées sur les différentes vérifications de la lunette parallatique : on peut voir les Œuvres de Boscovich, T. IV, p. 284.

2621. Pour vérifier l'équatorial, ou plutôt pour faire en sorte que l'axe de la lunette passant par la croisée des fils, décrive bien dans le ciel un parallele à l'équateur ; il y a six opérations à faire : je vais les expliquer d'après la description de l'équatorial de Ramsden (2410).

Il y a au-dessous de la lunette de *e* en *f* une tringle de cuivre qui est parallele à l'axe de la lunette à laquelle on suspend un niveau à bulle d'air, qui sert à plusieurs opérations.

On doit d'abord mettre le cercle azimutal C parfaitement de niveau : pour cela on le tourne de maniere qu'un de ses niveaux soit dans la direction de deux des pieds du support AA : on y met un niveau et l'on marque la place de la bulle d'air : on lui fait faire un demi-tour ou 180°, et si la bulle ne répond pas au même point, on corrige la moitié de l'erreur par la vis du niveau, et l'autre par la vis du pied, quand la bulle revient au même point dans les deux situations : on fait venir le niveau à 90° de sa premiere

situation, et on fait la même vérification sur l'autre niveau qui est à angles droits par rapport au premier, et l'on est assuré que le cercle azimutal est parfaitement de niveau.

L'axe polaire de l'équatorial qui doit représenter l'axe du monde, se met d'abord dans une situation verticale, comme dans la sphere parallele ; on ajuste le niveau par le moyen du pignon du demi-cercle des déclinaisons ; on retourne le niveau, et si la bulle n'est pas au même point, on corrige la moitié de l'erreur par la vis du niveau, et l'autre moitié par le pignon du demi-cercle, et par là on est assuré que le niveau est exactement parallele à la tringle *ef* à laquelle on le suspend, que les deux crochets qui le suspendent sont égaux, et que le niveau est vérifié.

L'axe polaire étant ensuite placé horizontalement et le demi-cercle des déclinaisons sur zéro, on tourne l'équateur ou le cercle des heures jusqu'à ce que la bulle du niveau soit au point où elle doit être. On met le demi-cercle des déclinaisons sur 90°, on ajuste la bulle en élevant ou abaissant l'axe polaire, d'abord avec la main jusqu'à ce qu'il soit à-peu-près bien, et ensuite avec une clef qui sert à tourner la vis qui est à l'extrémité de l'arc sur lequel coule l'extrémité de l'axe. Cette clef sert à mettre la bulle du niveau à son juste point. On met aussi le demi-cercle sur le point opposé de 90° : si alors le niveau n'est pas bien, on corrige la moitié de l'erreur par la vis dont nous avons parlé, et l'autre moitié par les deux vis qui pressent l'une contre l'autre l'extrémité de la tringle de cuivre *ef*.

Pour que l'axe du mouvement de la lunette en déclinaison fasse bien des angles droits avec l'axe polaire, on met celui-ci dans une situation horizontale, et le demi-cercle sur zéro : on ajuste la bulle du niveau par le moyen du cercle des heures : on met ensuite le demi-cercle sur 90°, et l'on ajuste la bulle en élevant ou en abaissant l'axe polaire : on tourne le cercle des heures de 180° ou 12 heures, et si la bulle n'est pas bien, on corrige la moitié de l'erreur par l'axe polaire, et l'autre moitié par les deux paires de vis qui sont aux pieds des deux supports à un côté de l'axe du mouvement de la lunette.

Par ces trois vérifications, on a rendu le niveau parallele à la tringle extérieure ; et celle-ci (qui doit être parallele à la ligne de collimation ou à l'axe de la lunette) est perpendiculaire à l'axe de son mouvement, et cet axe perpendiculaire à celui des poles.

Pour rendre la ligne de collimation exactement parallele à la tringle, il faut d'abord s'assurer que le centre des fils reste sur

le même objet lorsqu'on fait tourner le tuyau des oculaires, par le moyen du pignon qui meut l'équipage de réfraction. Pour cela on met l'index sur la premiere division de la coulisse, et le point marqué 18″ dans le cercle de réfraction sur son index; on regarde un objet dans la lunette, et l'on fait tourner les oculaires; et si la croisée des fils ne reste pas sur le même point pendant cette révolution, il faut corriger ce défaut par les petites vis, que l'on trouve en dévissant l'extrémité du tuyau des oculaires qui contient le premier verre; on tourne deux de ces vis à la fois, et l'on répete cette correction jusqu'à ce que le centre des fils ne change pas d'objet quand on les fait tourner. Après cette vérification, on met l'axe polaire horizontalement, l'équateur sur six heures, et le demi-cercle sur 90°; on ajuste le niveau par le moyen de l'axe; on dirige la croisée des fils sur un objet éloigné; on renverse la lunette en faisant faire un demi-tour, ou 12h à l'équateur: si le centre des fils ne couvre pas le même objet, on corrige la moitié de l'erreur par la plus haute et la plus basse des 4 petites vis qui sont à l'extrémité du grand tuyau de la lunette du côté des oculaires.

Quand on est parvenu ainsi à avoir le même objet dans les deux positions de la lunette, on met l'équateur exactement sur 12 heures, le demi-cercle restant à 90° comme auparavant; et si la croisée des fils ne couvre pas le même objet qu'auparavant, on l'y ramene par les deux autres vis qui sont à l'extrémité du tuyau; par là on sera sûr que la ligne de collimation est parallele à la tringle extérieure où l'on suspend le niveau.

Il reste à vérifier la position du vernier qui marque les déclinaisons, et de celui des heures. On éleve d'abord l'équateur de la quantité qui convient à la latitude du lieu, et on le met sur six heures; on ajuste le niveau par le moyen du pignon qui meut le demi-cercle des déclinaisons; on fait faire un mouvement de 12 heures à l'équateur, et si le niveau n'est pas bien, on corrige la moitié de l'erreur par le cercle équatorial, et l'autre moitié par le demi-cercle des déclinaisons, et l'on répete l'opération jusqu'à ce que la bulle soit au même point dans les deux situations; alors on place les verniers exactement l'un sur six heures, l'autre sur le zéro des degrés de déclinaison.

2622. L'équatorial où la lunette est sur le côté (2413), a l'avantage de pouvoir se vérifier encore plus facilement que les autres; car 1°, en retournant la lunette dans sa gouttiere de droite à gauche, on voit si un objet terrestre répond au même point, et par là si la lunette est perpendiculaire à son axe; 2°., en mettant l'équateur

dans une position verticale, et faisant décrire 180° à la lunette, on voit sur un objet terrestre si l'axe est perpendiculaire au plan du cercle qui représente l'équateur; 3°., le cercle entier pour les déclinaisons donne le moyen de s'assurer si les divisions sont sur un cercle concentrique à l'axe, et si elles sont égales, en observant une étoile au-dessus et au-dessous du pole; car la déclinaison indiquée par l'alidade sera la même, si cette alidade est bien placée.

2623. Quand on veut observer un astre pendant le jour avec la lunette parallatique ou l'équatorial, c'est-à-dire chercher un astre qu'on ne voit pas, ce qui est souvent nécessaire, on calcule son angle horaire (1011); on tourne l'axe et la lunette jusqu'à ce que l'alidade des heures CO marque sur le cercle équatorial l'angle horaire de l'astre, ou sa distance actuelle au méridien; on incline aussi la lunette LL sur son axe, en sorte que l'index W marque sur son demi-cercle la déclinaison de l'astre qu'on veut observer; dans cet état, l'on verra l'astre cherché au milieu de la lunette, si toutes les vérifications précédentes ont été bien faites. Seulement dans les petites hauteurs, la réfraction peut faire paroître l'astre un peu plus bas dans la lunette; mais cela n'empêchera pas qu'on ne le trouve aisément, l'effet des réfractions étant ordinairement moindre que le champ de la lunette.

* 2624. Pour faire usage de l'équatorial plus commodément, il faut avoir une table de la réfraction en ascension droite et en déclinaison pour chaque degré de déclinaison et d'angle horaire, et pour la latitude de l'observateur; cette table est aisée à calculer quand on a celle des hauteurs et des angles parallactiques (1040); car la réfraction en ascension droite est égale à la réfraction en hauteur multipliée par le sinus de l'angle du vertical et du cercle de déclinaison, et divisée par le cosinus de la déclinaison. De même la réfraction en déclinaison est égale à la réfraction en hauteur multipliée par le cosinus de l'angle du vertical et du cercle de déclinaison, du moins quand elle est petite. M. Cagnoli a donné une formule plus rigoureuse (*pag.* 441); mais la mienne est suffisante : madame Dupiery en a fait une table pour Paris, *Conn. des temps*, 1791.

2625. JE TERMINERAI ce traité des observations astronomiques par un exposé succinct des objets qui méritent le plus l'attention des astronomes. On trouve chaque année, dans la *Connoissance des temps*, le détail des principales choses qui se présentent à observer; mais je vais rappeller ici en peu de mots tout ce que l'on peut faire journellement pour le progrès de l'astronomie.

Les conjonctions de la Lune aux étoiles arrivent presque tous les

jours, et fournissent des occasions continuelles de déterminer les longitudes des lieux (1970), et de perfectionner les tables de la Lune. Les passages de la Lune au méridien doivent être également une observation journaliere (4136).

Les éclipses des satellites de Jupiter servent de même aux longitudes (2494) : leur théorie a également besoin d'être perfectionnée; c'est sur-tout dans les limites et dans les nœuds qu'ils doivent être observés (2982, 3006).

Les oppositions des planetes supérieures donnent les temps les plus favorables pour connoître leurs longitudes vues du Soleil, pour déterminer leurs mouvemens, et rectifier leurs tables (1152, 1201); mais les quadratures servent aussi pour déterminer leurs distances (1226).

Les conjonctions de Vénus produisent le même effet pour la théorie de cette planete (1201), sur-tout les conjonctions inférieures (1318).

Les plus grandes digressions de Vénus et de Mercure fournissent des moyens de déterminer le mouvement de l'aphélie et l'excentricité de l'orbite, sur-tout pour Mercure (1285, 1318).

Les passages des planetes, par leurs nœuds et par leurs limites, fournissent un moyen de déterminer les nœuds et les inclinaisons de leurs orbites (1332, 1355).

Les passages des planetes, par leurs apsides, servent à déterminer leurs excentricités et leurs aphélies (1260, 1279).

Les conjonctions des planetes aux étoiles fixes, sur-tout celles de Mars en opposition, peuvent déterminer sa parallaxe (1718), et les variations qu'on a attribuées à son atmosphere (2274).

2626. Les hauteurs solsticiales du Soleil servent pour déterminer l'obliquité de l'écliptique et ses variations (2749).

Les hauteurs méridiennes du Soleil tous les jours pour déterminer les réfractions (2215); pour trouver le moment où il passe par les équinoxes (883), par les paralleles des principales étoiles, ou en général par un même parallele, en montant ou en descendant, et par là connoître mieux ses inégalités.

Les différences d'ascensions droites entre le Soleil et les étoiles fixes, quand il passe dans un même parallele (872), servent pour déterminer les longitudes du Soleil et celles des étoiles; pour former les catalogues (712), et rectifier les tables du Soleil.

Les positions des étoiles fixes sont nécessaires pour avoir leurs mouvemens propres et leurs dérangemens (2771); pour étendre le catalogue des étoiles, encore très incomplet, sur-tout par rapport aux étoiles du nord (714).

L'observation des nébuleuses dont le catalogue est encore incomplet (842), et qu'il est nécessaire de connoître quand on veut chercher des cometes (3082).

Les taches de la Lune pour déterminer sa libration et la position de son équateur (3326); celles du Soleil, pour mieux connoître sa rotation (3279).

L'anneau de Saturne, quand il est dans sa plus grande ouverture, pour connoître son inclinaison; et, quand il disparoît, pour déterminer ses nœuds (3360, 3364).

Les satellites de Saturne (3074). Les taches et les rotations des planetes (3340), qu'on a si peu et si rarement observées.

Les périodes de lumiere des étoiles changeantes, de la Baleine et du Cygne, d'Algol et de beaucoup d'autres étoiles que l'on croit sujettes à de semblables variations (809 *et suiv.*).

2627. Enfin les cometes, que l'on rencontreroit peut-être bien souvent, si l'on prenoit la peine de les chercher. Cette partie seule offre un vaste champ à la curiosité des amateurs; il ne faudroit ni des instrumens de prix, ni des connoissances en astronomie, pour être fort utile à cette science, en nous avertissant des apparitions des cometes (3082).

2628. Les personnes qui ne sont pas à portée d'avoir des instrumens précieux, peuvent encore faire diverses observations utiles; les plus importantes exigent seulement qu'on ait une horloge à pendule, et un quart-de-cercle pour prendre des hauteurs correspondantes; mais ce quart-de-cercle peut se faire en bois sans difficulté, comme sans art.

Il seroit avantageux que les occultations d'étoiles et les éclipses des satellites, si utiles aux longitudes, fussent ainsi observées assidûment par les amateurs qui habitent dans les pays méridionaux, où le beau temps fournit des occasions continuelles de contribuer au progrès de l'astronomie, tandis que les observatoires de Paris, de Greenwich, etc. sont ensevelis une partie de l'année dans les nuages et les brouillards.

2629. Les observations que l'on doit conseiller aux voyageurs, sont les hauteurs du Soleil à midi par le moyen des gnomons (72) pour les latitudes, et les hauteurs de la Lune hors du méridien pour les longitudes (4212), quand ils peuvent transporter un quart-de-cercle. J'ai parlé des recueils d'observations qui existent jusqu'à présent (1399).

Fin du second Volume.

